4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., "Наука", 1967.
5. Уфлянд Я. С. Кручение упругого слоя двумя штампами. - ДАН СССР, 1969, т. 186, № 5.
6. Irwin L. R. Fracture. Handbuch der Physik. Bd.6. Springer-Verlag, Berlin, 1958.
7. Reissner E., Sagoci H.F. Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space, I. J. Appl. Phys. 1944, v.15, N9.

УДК 539.311

Г.Т.Сулим

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ НА ТОНКОСТІННОМУ ВКЛЮЧЕННІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ[x]

1. Розглянемо пружну рівновагу двох спаяних ізотропних півплощин з різних матеріалів з тонкостінним пружним включенням довжиною $2a$ і товщиною $2h$, що розміщене на прямій лінії спаю матеріалів під дією двох зосереджених сил $Q_1 = -iq_1$ та $Q_2 = iq_2$, прикладених відповідно у точках $-id$, id (рис.1).

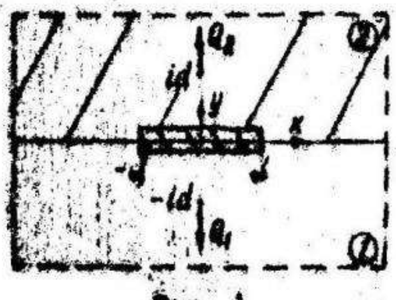

Рис. 1

Зазначимо, що постановка задачі, формули для обчислення характеристик напруженого стану і числовий аналіз за допомогою зображення розв'язку інтегро-диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду для випадку однорідного поля напружень на безмежності наведені в [4]. Аналогічна задача у менш загальній постановці розглядається в [5].

Окремо цієї задачі в [4] маємо ключове рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = n\alpha\int_{-1}^{x}\varphi(t)\,dt + \Phi(x) \qquad (|x|\le 1), \qquad (1.1)$$

а також співвідношення для визначення напружень на лінії $y=0$

---

[x] Робота виконана під керівництвом проф. Д.В.Грилицького.

$$\sigma_{x1}(\alpha x)=2n_{12}T(x)+M_1(x);\qquad \sigma_{x2}(\alpha x)=2n_{21}T(x)+M_2(x);$$

$$\sigma_{y1}(\alpha x)=\sigma_{y2}(\alpha x)=m_{12}T(x)+M_3(x)\qquad (|x|<\infty),\tag{1.2}$$

$$\tau_{xy1}(\alpha x)=\begin{cases}c_{12}\varphi(x)+M_4(x) & (|x|\le 1),\\ M_4(x) & (|x|>1),\end{cases}\qquad \tau_{xy2}(\alpha x)=\begin{cases}\tau_{xy1}(\alpha x)-\varphi(x) & (|x|\le 1),\\ \tau_{xy1}(\alpha x) & (|x|>1),\end{cases}$$

де

$$M_1(x)=m_1J_1(x)+m_2J_3(x);\qquad M_2(x)=m_3J_1(x)+m_4J_3(x);\tag{1.3}$$

$$M_3(x)=m_5J_1(x)+m_6J_3(x);\qquad M_4(x)=m_7J_2(x)+m_8J_4(x);$$

$$\Phi(x)=N\delta+m_9J_1(x)+m_{10}J_3(x);\qquad T(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-x};$$

$$J_1(x)=\frac{\beta}{x^2+\beta^2};\quad J_2(x)=\frac{x}{x^2+\beta^2};\quad J_3(x)=\frac{\beta^3}{(x^2+\beta^2)^2};\quad J_4(x)=\frac{x\beta^2}{(x^2+\beta^2)^2};$$

$$\delta=\frac{k_0}{B'},\quad n=\frac{\delta}{2h};\qquad B'=\frac{c_1\varkappa_2+c_2\varkappa_1}{4c_1c_2}+\frac{k_1m_{12}}{2};\ k_0=\frac{1}{E\delta k};\ k_1=\frac{\nu_{\delta k}}{E\delta k};\ \beta=\frac{d}{\alpha};$$

$$m_1=n_{12}g_3+p_{12}g_{21}+q_{21}g_{11}+v_{212}g_{24}+v_{112}g_{14}+\frac{1}{2}(u_{212}g_{22}-u_{112}g_{12}+g_{12});$$

$$m_2=n_{12}g_4+p_{12}g_{22}+q_{21}g_{12}+v_{212}g_{22}+v_{112}g_{12}-u_{212}g_{22}+u_{112}g_{12};$$

$$m_3=n_{21}g_3+p_{21}g_{11}+q_{12}g_{21}+v_{221}g_{24}+v_{121}g_{14}+\frac{1}{2}(-u_{221}g_{22}+u_{121}g_{12}+g_{22});$$

$$m_4=n_{21}g_4+p_{21}g_{12}+q_{12}g_{22}+v_{221}g_{22}+v_{121}g_{12}+u_{221}g_{22}-u_{121}g_{12};$$

$$m_5=\frac{1}{2}(m_{12}g_3+\ell_{22}g_{24}+\ell_{21}g_{14}+c_{21}g_{11}+c_{12}g_{21})+\frac{1}{4}(\ell_{12}g_{22}-\ell_{11}g_{12});$$

$$m_6=\frac{1}{2}(m_{12}g_4+\ell_{22}g_{22}+\ell_{21}g_{12}+c_{21}g_{12}+c_{12}g_{22}-\ell_{12}g_{22}+\ell_{11}g_{12});$$

$$m_7 = \frac{1}{2}(m_{12} g_1 - c_{12} g_{21} - c_{21} g_{11}) + \frac{1}{4}(\ell_{12} g_{23} + \ell_{11} g_{13});$$

$$m_8 = \frac{1}{2}(m_{12} g_2 - c_{12} g_{22} - c_{21} g_{12} + \ell_{12} g_{22} + \ell_{11} g_{12} - \ell_{22} g_{22} + \ell_{21} g_{12});$$

$$m_9 = -g_3 - d_6 g_{11} - d_5 g_{21} + \frac{1}{2}(d_2 g_{24} + d_1 g_{14} - d_3 g_{22} - d_4 g_{12});$$

$$m_{10} = -g_4 - d_6 g_{12} - d_5 g_{22} + \frac{1}{2}(d_2 g_{22} + d_1 g_{12}) + d_3 g_{22} + d_4 g_{12};$$

$$u_{ijk} = \frac{e_{jk}}{2\sqrt{\mu_i}}; \quad v_{ijk} = \frac{z_{jk}}{8\sqrt{\mu_i}}; \quad \ell_{ij} = \frac{\ell_i}{2\sqrt{\mu_j}}; \quad z_{ij} = 2\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}\left(\frac{3}{c_i} - \frac{1}{c_j}\right),$$

$$e_{ij} = \frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{2}\left(\frac{3}{c_i} + \frac{1}{c_j}\right); \qquad q_{ij} = -\left(\frac{\sqrt{\mu_j}}{c_j} + \frac{c_{ij}}{2}\right);$$

$$p_{ij} = \frac{\sqrt{\mu_i}}{c_i} - \frac{c_{ij}}{2}; \qquad c_{ij} = \sqrt{\mu_i}\,\frac{c_j + c_i \varkappa_j}{2 c_1 c_2};$$

$$m_{ij} = \sqrt{\mu_i}\,\frac{c_j - c_i \varkappa_j}{c_1 c_2}, \qquad n_{ij} = \sqrt{\mu_i}\,\frac{3c_j + c_i \varkappa_j}{2 c_1 c_2};$$

$$z = \frac{c_2 \varkappa_1 - c_1 \varkappa_2}{4 c_1 c_2}; \qquad \ell_1 = \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right);$$

$$\ell_2 = \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right); \quad g_{i1} = \frac{2q_i e_i(\varkappa_i - 1)}{\alpha}; \quad g_{i2} = \frac{8q_i e_i}{\alpha}; \quad g_{i3} = g_{i2}\varkappa_i;$$

$$g_{i4} = 2g_{i1}; \quad e_i = \frac{1}{2\pi(1+\varkappa_i)}; \quad \varkappa_i = \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i}; \quad g_1 = \frac{g_{12} - g_{11} + g_2}{2};$$

$$g_2 = \frac{g_{22} - g_{12}}{2}; \quad g_3 = -\frac{g_{11} + g_{21} + g_4}{2}; \quad g_4 = -\frac{g_{12} + g_{22}}{2}; \quad d_1 = \frac{m_{21} - 2k_1\ell_2}{4\sqrt{\mu_1}B'};$$

$$d_2 = \frac{m_{21} - 2k_1\ell_2}{4\sqrt{\mu_2}B'}; \quad d_3 = \frac{c_{21} + k_1\ell_1}{4\sqrt{\mu_2}B'}; \quad d_4 = \frac{c_{12} - k_1\ell_1}{4\sqrt{\mu_1}B'}; \quad d_5 = \frac{c_{12}k_1 - z}{2B'};$$

$$d_6 = \frac{c_{21}k_1 + z}{2B'}; \quad c_1 = \sqrt{\mu_1} + \varkappa_1\sqrt{\mu_2}; \quad c_2 = \sqrt{\mu_2} + \varkappa_2\sqrt{\mu_1} \quad (i, j, k = 1, 2).$$

Розв'язок рівняння (1.1) повинен задовольняти умову

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt = 0. \tag{1.4}$$

Для знаходження величини N, що характеризує σ_x на торці включення, використаємо співвідношення

$$N = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{\mu_{\ell k}}}{\mu_1}}\,M_1(x) + \sqrt{\frac{\sqrt{\mu_{\ell k}}}{\mu_2}}\,M_2(x)\right]\Bigg|_{x=1}. \tag{1.5}$$

Формула (2.15) в [4] дає для значення N величину, яка дорівнює середньому значенню $\sigma_x(1-0)$ для випадку абсолютно жорсткого включення, тому використання (1.5) видається набагато доцільнішим.

2. Внаслідок силової симетрії задачі функція $\varphi(x)$ повинна бути непарною. Тоді умова (1.4) задовольняється автоматично і розв'язок рівняння (1.1) шукаємо у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{j=0}^{\infty} A_j T_{2j+1}(x), \tag{2.1}$$

де $T_j(x)$ – поліноми Чебишева першого роду.

Підставляючи (2.1) в (1.1) і використовуючи залежності

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_j(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)} = \begin{cases} 0 & (j=0); \\ \pi U_{j-1}(x) & (j \geq 1); \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} U_i(t)U_j(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \begin{cases} 0 & (i \neq j); \\ \frac{\pi}{2} & (i=j), \end{cases}$$

одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження шуканих коефіцієнтів A_j

$$\Phi_k = \frac{\pi}{2} A_k + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{kj} A_j, \qquad (k=0,1,\ldots) \tag{2.2}$$

де

$$\Phi_k = \int_{-1}^{1} \Phi(t) U_{2k}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt; \qquad \alpha_{kj} = \int_{-1}^{1} H_{2j+1}(t) U_{2k}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt;$$

$$H_{2j+1}(x) = -n\int_{-1}^{x} \frac{T_{2j+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt;$$

$U_j(x)$ – поліноми Чебишева другого роду.

Легко переконатися, що

$$\alpha_{kj} = -\frac{4n(2k+1)}{[(2k+1)^2-4j^2][(2k+1)^2-(2j+2)^2]};$$

$$\Phi_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(N\ell + m_9 H_0 + m_{10} G_0) & (k=0); \\ \frac{\pi}{2}(m_9 H_k + m_{10} G_k) & (k \geq 1), \end{cases} \quad (2.3)$$

де

$$H_k = 2e^k\sqrt{-e}; \quad G_k = \frac{16\beta^3 e^2(1-e)^2}{(1-e^2)^3}[k(1+e)+1]e^k; \quad e = -(\sqrt{1+\beta^2}-\beta)^2.$$

З (2.1) бачимо, що $\varphi(x)$, а отже $\tau_{xyj}(\alpha x)$ $(j=1,2)$ на кінцях інтервалу $[-1,1]$ мають особливість виду $(\sqrt{1-x^2})^{-1}$. У формулах (1.2) для нормальних напружень фігурує інтеграл $T(x)$, який можна записати

$$2T(x) = \begin{cases} n\int\limits_{-1}^{x}\varphi(t)dt + \Phi(x) & (|x| \leq 1); \\ -in\int\limits_{-1}^{x}\varphi(t)dt + i\,sign(x)\,\varphi(x) + \Phi(x) & (|x| > 1), \end{cases} \quad (2.4)$$

де $\varphi(x)$ зображена формулою (2.1).

Звідси випливає, що $\sigma_{yj}(\alpha x)$, $\sigma_{xj}(\alpha x)$ $(j=1,2)$ при $x \in [-1,1]$ обмежені, а при підході x до точок ± 1 зовні $[-1,1]$ мають особливість виду $(\sqrt{x^2-1})^{-1}$. Згідно з (1.2), (2.1) та (2.4) коефіцієнти інтенсивності напружень, що визначаються формулами

$$k_{1j} = \lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}\,\sigma_{yj}(\alpha x), \quad k_{2j} = \lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}\,\sigma_{xj}(\alpha x) \quad (|x| > 1);$$

$$(j=1,2)$$

$$k_{3j} = \lim_{x\to 1}\sqrt{1-x}\,\tau_{xyj}(\alpha x) \qquad (|x| \leq 1),$$

запишуться

$$k_{10} = \frac{1}{2}m_{12}k; \quad k_{21} = -n_{12}k; \quad k_{22} = -n_{21}k; \quad k_{31} = c_{12}k; \quad k_{32} = -c_{21}k, \quad (2.5)$$

де

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{\infty} A_j .$$

3. Система рівнянь (2.2) при довільних пружних характеристиках матеріалів є квазірегулярною [3], тому її можна розв'язувати методом редукції. Числовий аналіз на ЕОМ показав, що для точності 1% достатньо взяти 10 членів ряду (2.1). Досягнення подібної точності методом, запропонованим в [1], [4], виявилося практично неможливим.

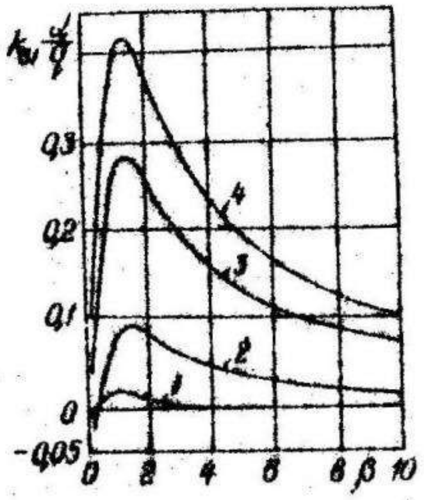

Рис.2

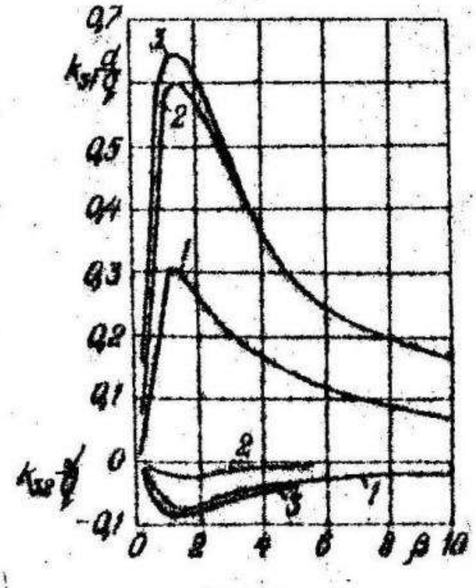

Рис.3

На рис. 2,3 наведені графіки залежності k_{31}, k_{32} від віддалі точки прикладання зосереджених сил, обчислені при $\frac{\alpha}{h}=10$, $\nu_1=\nu_2=\nu_{0k}=\frac{1}{3}$, $q_1=q_2=q$ та різних співвідношеннях модулів Юнга матеріалів $\frac{E_1}{E_2}=\lambda$, $\frac{E_{0k}}{E_1}=k$. Криві 1-4 рис. 2 для k_{31} при $\lambda=1$ $(k_{32}=-k_{31})$ відповідають значенням $k=1$, $k=2$, $k=10$, $k\geqslant 100$. На рис. 3 криві для k_{31}, k_{32} характеризуються такими параметрами: $1-\lambda=5$, $k=2$; $2-\lambda=50$; $k=2$; $3-\lambda=10$, $k=10$.

Література

1. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. – "Прикладная математика и механика", 1968, т. 32, вып. 4.

2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., "Наука", 1971.

3. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.- "Прикладная математика и механика", 1970, т. 34, вып. 3.

4. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Напряженное состояние кусочно однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. - "Прикладная механика", 1972, т. УШ, вып. П.

5. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. - "Известия АН АрмССР, Механика", 1970, т. XXШ, № 3.

УДК 539.311

В.К.Опанасович

ПРО ОДИН ВИПАДОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ЩІЛИНОЮ ПО ДУЗІ КОЛА

Розглянемо необмежену ізотропну пластинку, послаблену щілиною вздовж дуги (ab) одиничного кола. Припустимо, що під дією зосередженої сили, прикладеної в центрі даного кола, береги щілини вступають у гладкий контакт по всій її довжині. Визначимо напружений стан у пластинці.

Початок декартової системи координат xOy виберемо в центрі одиничного кола, а вісь x направимо через середину дуги (ab), яку позначимо через L. Тоді кінці щілини в комплексній площині будуть характеризуватись точками $a=e^{-i\varphi}$, $b=e^{i\varphi}$.

Отже, маємо такі граничні умови задачі

$$\tau z^{+}=\tau z^{-}=\tau z, \quad \tau\vartheta^{+}=\tau\vartheta^{-}=0 \quad \text{на} \quad L, \tag{1}$$

$$v_r^{+}-v_r^{-}=0 \quad \text{на} \quad L. \tag{2}$$

Тут і надалі знаком "+" позначено граничні значення відповідних величин на лівому березі щілини, а знаком "-" - на правому березі, якщо рухатися по щілині від точки a до b.

Для розв'язання задачі введемо функції напружень Колосова-Мусхелішвілі $\varphi(z)$ і $\psi(z)$. Тоді, наслідуючи [2], для компонент вектора переміщень і тензора напружень матимемо