3. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.- "Прикладная математика и механика", 1970, т. 34, вып. 3.

4. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Напряженное состояние кусочно однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. - "Прикладная механика", 1972, т. УШ, вып. П.

5. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. - "Известия АН АрмССР, Механика", 1970, т. XXШ, № 3.

УДК 539.311

В.К.Опанасович

ПРО ОДИН ВИПАДОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ЩІЛИНОЮ ПО ДУЗІ КОЛА

Розглянемо необмежену ізотропну пластинку, послаблену щілиною вздовж дуги (ab) одиничного кола. Припустимо, що під дією зосередженої сили, прикладеної в центрі даного кола, береги щілини вступають у гладкий контакт по всій її довжині. Визначимо напружений стан у пластинці.

Початок декартової системи координат xOy виберемо в центрі одиничного кола, а вісь x направимо через середину дуги (ab), яку позначимо через L. Тоді кінці щілини в комплексній площині будуть характеризуватись точками $a=e^{-i\varphi}$, $b=e^{i\varphi}$.

Отже, маємо такі граничні умови задачі

$$\tau\tau^{+}=\tau\tau^{-}=\tau\tau, \quad \tau\vartheta^{+}=\tau\vartheta^{-}=0 \quad \text{на} \quad L, \tag{1}$$

$$v_{\tau}^{+}-v_{\tau}^{-}=0 \quad \text{на} \quad L. \tag{2}$$

Тут і надалі знаком "+" позначено граничні значення відповідних величин на лівому березі щілини, а знаком "-" - на правому березі, якщо рухатися по щілині від точки a до b.

Для розв'язання задачі введемо функції напружень Колосова-Мусхелішвілі $\varphi(z)$ і $\psi(z)$. Тоді, наслідуючи [2], для компонент вектора переміщень і тензора напружень матимемо

$$e^{-i\vartheta}\left[\varkappa\varphi(z)-\omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)-\left(z-\frac{1}{\bar z}\right)\overline{\varphi'(z)}\right]=2\mu(v_r+iv_\theta), \qquad (3)$$

$$\varphi(z)+\omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)+\left(z-\frac{1}{\bar z}\right)\overline{\varphi'(z)}=\int_{z_0}^{z}(zr+iz\vartheta)\,dt, \qquad (4)$$

де

$$\omega(z)=z\bar\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)+\bar\psi\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z=|z|e^{i\vartheta}.$$

Використовуючи (4), з (I) одержуємо

$$[\varphi(t)-\omega(t)]^{+}-[\varphi(t)-\omega(t)]^{-}=0 \qquad t\in L. \qquad (5)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (5) має вигляд

$$\omega(z)=\varphi(z)+\rho(z), \qquad (6)$$

де

$$\rho(z)=-\bar P z^2+(1-\varkappa)P\ln z+\bar A_1 z+D_2; \qquad (7)$$

D_2 - невідома постійна; A_1 - значення в нулі функції $\varphi'(z)+\frac{P}{z}$; $P=\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}$, X і Y - проекції зосередженої сили на осі x і y.

Якщо ввести нову функцію

$$F(z)=\frac{\varphi(z)}{z}, \qquad (8)$$

то на основі (I) і (2), з врахуванням (3), (4) і (6), одержимо, що вона задовольняє граничні умови

$$F^{+}(t)+F^{-}(t)=f(t)-\frac{\rho(t)}{t} \qquad t\in L, \qquad (9)$$

$$[F(t)-\bar F(t)]^{+}-[F(t)-\bar F(t)]^{-}=0 \quad t\in L, \qquad (10)$$

де

$$f(t)=\frac{1}{t}\int_{a}^{t}zr\,dt.$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (10), дістанемо

$$F(z)-\bar F\left(\frac{1}{z}\right)=-\bar A_1-\frac{P}{z}\ln z-\bar P z\ln z. \qquad (11)$$

Враховуючи (9), з (11) одержимо

$$\frac{1}{t}\int_{a}^{t} z\bar{z}\,dt + t\int_{a}^{t}\frac{z\bar{z}}{t^2}\,dt = \frac{D_2}{t} - \bar{D}_2 t + \frac{P}{t} - \bar{P}t -$$

$$- A_1 - \bar{A}_1 - (1+\varkappa)\left(\frac{P}{t} + \bar{P}t\right)\ln t. \qquad (12)$$

Розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$z\bar{z} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(A_1 + \bar{A}_1)\ln t - (1+\varkappa)\left(\frac{P}{t} + \bar{P}t\right), \qquad (13)$$

де A – невідома дійсна постійна.

Беручи до уваги, що $z\bar{z}$ – дійсна величина, з (13) маємо

$$\operatorname{Re} A_1 = 0.$$

Згідно з [1] і (12), запишемо

$$f(t) = \frac{1}{2}A + \frac{D_2}{t} - \frac{(1+\varkappa)P\ln t}{t} - \frac{(1+\varkappa)\bar{P}t}{2} + \frac{(1-\varkappa)P}{2t}. \qquad (14)$$

Підставляючи (14) у (9) і розв'язуючи відповідну задачу лінійного спряження, знаходимо

$$F(z) = -\frac{P}{z}\ln z + F_0(z) = -\frac{P}{z}\ln z + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}A - \bar{A}_1 +$$

$$+ \frac{1-\varkappa}{2}\left(\frac{P}{z} + \bar{P}z\right)\Big] + \frac{1-\varkappa}{4}\left(\frac{P}{z} - \bar{P}\right)X_0(z), \qquad (15)$$

де

$$X_0(z) = \sqrt{z^2 - 2z\cos\varphi + 1}.$$

Для визначення невідомих постійних A і A_1 скористаємося умовами

$$F_0(\infty) = 0, \qquad F_0(0) = A_1,$$

які з урахуванням (15), наберуть вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}\bar{A}_1 + \frac{1-\varkappa}{4}(\bar{P} + P\cos\varphi) = A_1,\\ &\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}\bar{A}_1 + \frac{1-\varkappa}{4}(P + \bar{P}\cos\varphi) = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Розв'язавши систему (16), одержимо

$$A_1 = i\frac{Y(\varkappa-1)}{2\pi(1+\varkappa)}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad A = \frac{X(\varkappa-1)}{\pi(1+\varkappa)}\cos^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (17)$$

Зауважимо, що для визначення постійних A_1 і A достатньо скористатися тільки одним з рівнянь (16). Постійну D_2 знайдемо з умови $f(a) = 0$. Підставляючи (17) у (15) і враховуючи (8), одержимо

$$\varphi(z) = -P\ln z + \frac{1-\varkappa}{4}\left[P + \bar{P}z^2 - (P + \bar{P}\cos\varphi)z + (P - \bar{P}z)X_0(z)\right].$$

Знаючи $\varphi(z)$, можемо визначити напруження

при $|\theta| < \varphi$

$$rr^+ = rr^- = 2DX\cos^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\pi}(X\cos\theta + Y\sin\theta),$$

$$\vartheta\vartheta^\pm = 2D\left\{X\cos^2\frac{\varphi}{2} \mp \frac{X(\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}) + Y(\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\sin\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}}\right\}, \qquad (18)$$

$$r\vartheta^+ = r\vartheta^- = 0;$$

при $\varphi < \theta < 2\pi - \varphi$

$$rr = -\frac{1}{\pi}(X\cos\theta + Y\sin\theta) + D\left\{X(1+\cos\varphi) + R(\theta)\cdot\left\{X\left[\sin\frac{3\theta}{2} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \sin\frac{\theta}{2}(1+2\cos\varphi)\right] - Y\left[\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}(1-2\cos\varphi)\right]\right\}\right\},$$

$$r\vartheta = -DR(\theta)\left[X\left(\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}\right) + Y\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\sin\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

$$\vartheta\vartheta = rr + \frac{1}{\pi}(X\cos\theta + Y\sin\theta).$$

Тут введені позначення

$$D = \frac{\varkappa - 1}{4\pi(1+\varkappa)}, \quad R(\theta) = \left[\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Аналіз формул (18) показує, що напруження $\tau\tau$ – обмежені на одиничному колі. Напруження $\tau\vartheta$ – необмежені при підході до кінців щілини зовні; $\vartheta\vartheta$ – обмежені зовні і необмежені при підході до її кінців з внутрішньої сторони.

Для визначення максимального кута, при якому буде проходити контакт по всій щілині, скористаємося формулою

$$tg\frac{\varphi^*}{2} = -|m| + \sqrt{m^2 + \frac{3+\varkappa}{2(1+\varkappa)}} \,,$$

де

$$m = \frac{Y}{X} \,.$$

Зауважимо, що коли

$$|m| < \sqrt{\frac{3+\varkappa}{6(1+\varkappa)}} \quad і \quad tg\frac{\varphi}{2} = |m| ,$$

то всі напруження будуть обмеженими на кінці щілини, до якого напрямлена сила.

Література

1. Грилицький Д. В., Луцишин Р. М. Про один випадок пружної рівноваги пластинки, ослабленої криволінійним розрізом. – "ДАН УРСР", серія А, 1968, № 4.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.3

М.К.Зварич

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛІПТИЧНОГО КІЛЬЦЯ З ВПРЕСОВАНИМ СТЕРЖНЕМ

Розглянемо пружну ізотропну пластинку, серединна площина якої займає область D, обмежену двома співфокусними еліпсами L_1 і L_2. У точках кільця z_i та z_j прикладено відповідно зосереджені сили