Аналіз формул (18) показує, що напруження $\tau\tau$ – обмежені на одиничному колі. Напруження $\tau\vartheta$ – необмежені при підході до кінців щілини зовні; $\vartheta\vartheta$ – обмежені зовні і необмежені при підході до її кінців з внутрішньої сторони.

Для визначення максимального кута, при якому буде проходити контакт по всій щілині, скористаємося формулою

$$tg\frac{\varphi^*}{2} = -|m| + \sqrt{m^2 + \frac{3+\varkappa}{2(1+\varkappa)}} ,$$

де
$$m = \frac{Y}{X} .$$

Зауважимо, що коли

$$|m| < \sqrt{\frac{3+\varkappa}{6(1+\varkappa)}} \quad і \quad tg\frac{\varphi}{2} = |m| ,$$

то всі напруження будуть обмеженими на кінці щілини, до якого напрямлена сила.

Л і т е р а т у р а

1. Г р и л і ц ь к и й Д. В., Л у ц и ш и н Р. М. Про один випадок пружної рівноваги пластинки, ослабленої криволінійним розрізом. – "ДАН УРСР", серія А, 1968, № 4.

2. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.3

М.К.Зварич

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛІПТИЧНОГО КІЛЬЦЯ З ВПРЕСОВАНИМ СТЕРЖНЕМ

Розглянемо пружну ізотропну пластинку, серединна площина якої займає область D, обмежену двома співфокусними еліпсами L_1 і L_2. У точках кільця z_i та z_j прикладено відповідно зосереджені сили

$P_i(x_i, y_i)$ і моменти M_j $(i=1,2,...,r;\ j=1,2...,s)$. Нехай в отвір пластинки, обмеженого контуром $\mathcal{L}_1$, впресовано або натягнуто на кільце замкнутий криволінійний стержень постійного поперечного перерізу, а до іншого краю пластинки $\mathcal{L}_2$ прикладені напруження N_2 і T_2 (N_2, T_2 – нормальна і дотична складові заданих напружень). Вважається, що зовнішні зусилля, прикладені до пластинки і стержня, задовольняють умови статики. Тертям між контактуючими тілами нехтуємо. Напружено деформований стан стержня описується рівняннями теорії тонких криволінійних стержнів.

Визначення напруженого стану в контактуючих тілах зводиться до знаходження компонент деформації e_o, θ_ε стержня і функцій $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ комплексного змінного $z=x+iy$, які задовольняють граничні умови

$$\int_{\mathcal{L}_1} F_1(t)\, Re\, dU^* = 2\mu \int_{\mathcal{L}_1} F_1(t)\, d[U_{1n} \mp \varepsilon^*(t)];$$

$$\int_{\mathcal{L}_1} F_1(t)\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_1} N^{(1)} F_1(t)\, dt; \quad \int_{\mathcal{L}_2} F_1(t)\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) F_1(t)\, dt; \tag{1}$$

$$\int_{\mathcal{L}_1} \overline{F_1(t)}\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_1} N^{(1)} \overline{F_1(t)}\, dt; \quad \int_{\mathcal{L}_2} \overline{F_1(t)}\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(t)}\, dt.$$

де

$$\begin{aligned} U^* &= i\dot{\bar{t}}\left[\varkappa\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}\right]; \\ V^* &= \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}; \end{aligned} \tag{2}$$

$\varepsilon^*(t)$ – нормальна величина скачка вектора переміщення; $F_1(z)$ – довільна, голоморфна, в області D, функція; $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$; $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Нормальна складова переміщення u_{1n} контурних точок стержня виражається через відносне подовження e_o нульової (для чистого згину) лінії $\mathcal{L}_o$ і кут повороту θ_ε нормального перерізу стержня згідно з [2] формулою

$$u_{1n} = Re\left\{ i\dot{\bar{t}} \int_{t_o}^{t} \left[\frac{r}{r_1} e_o + \dot{t}(r - r_o)\frac{d\theta_\varepsilon}{dt} + i\theta_\varepsilon \right] dt + \ldots \dot{\bar{t}} \right\}, \tag{3}$$

де $c = u_{1n}^{*} + i u_{1t}^{*}$ – стала інтегрування.

Закон Гука для стержня візьмемо у вигляді [2]

$$V_t = g e_0; \quad L_g = g \eta_c r_1 t \frac{d\theta_g}{dt}. \tag{4}$$

В (3) і (4) використані позначення з [1].

За допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}) \tag{5}$$

зробимо конформне відображення області D на концентричне кільце з радіусами ρ_1 і ρ_2, де $R = \frac{a_1 + b_1}{2}$; $m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}$; $\rho_2 = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} > 1$; $\rho_1 = 1$; a_j; b_j – півосі співфокусних еліпсів $\mathcal{L}_j$ $(j = 1, 2)$.

Величини e_0 і θ_g подаємо на γ_1 у формі комплексних рядів Фур'є

$$e_0 = \alpha_0 + 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k; \quad \theta_g = \beta_0 + 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k. \tag{6}$$

Функції напруження $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$ в області D, шукаємо у вигляді [3]

$$\varphi(\zeta) = -\sum_{i=1}^{r} P_i \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^{-k};$$

$$\psi(\zeta) = \varkappa \sum_{i=1}^{r} \overline{P}_i \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i \eta_i}{\zeta - \zeta_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{M_j^* \eta_j^*}{\zeta - \zeta_j} + \tag{7}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} A'_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} B'_k \zeta^{-k},$$

де

$$P_i = \frac{x_i + i y_i}{4\pi h(1+\varkappa)}; \quad M_j^* = \frac{i M_j}{4\pi h}; \quad \eta_j^* = \frac{\zeta_j^2}{\zeta_j^2 - m}; \quad \eta_i = \eta_i^*(\overline{\zeta}_i + m\overline{\zeta}_i^{-1}).$$

Довільну функцію $F(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)]$ подаємо у вигляді ряду

$$F(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \zeta^{-n}; \quad \rho_1 \leq |\zeta| \leq \rho_2. \tag{8}$$

У випадку силової та геометричної симетрії задачі відносно координатних осей, нормальна складова контактного напруження має вигляд

$$N^{(i)}=\frac{q}{2hr_1}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}\alpha_k f_k(\sigma), \tag{9}$$

де

$$f_k(\sigma)=\frac{q}{2hr_1}\frac{1}{(1-m^2)^2}\Big\{\big[(1-m^2)^2-k^2(1+4m^2+m^4)\big](\sigma^{k}+\sigma^{-k})-$$

$$-km^2\big[(k+2)(\sigma^{k+4}+\sigma^{-k-4})+(k-2)(\sigma^{k-4}+\sigma^{-k+4})\big]+$$

$$+2km(1+m^2)\big[(k+1)(\sigma^{k+2}+\sigma^{-k-2})+(k-1)(\sigma^{k-2}+\sigma^{-k+2})\big]\Big\}.$$

Враховуючи (2), (3), (5), (6), підставимо (7) - (9) в граничні умови (I) і виконаємо інтегрування вздовж контурів γ_1 та γ_2, приймаючи при цьому всі E_j, крім E_n, рівними нулю. У результаті одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів α_k, β_k, A_k, B_k, A_k' і B_k', яку запишемо для випадку, коли навантаження N_2+iT_2, симетричне відносно координатних осей Ox, Oy і P_i, M_j^* дорівнюють нулеві ($i=1,2,\dots,r$; $j=1,2,\dots,s$). Завдяки силовій та геометричній симетрії задачі відносно обох осей координат, коефіцієнти розкладів (6) з непарними, а (7) з парними індексами дорівнюють нулеві, і A_k, B_k, A_k', B_k', α_k - дійсні, а β_k - уявні величини

$$\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(1)}\alpha_k+\sum_{k=2,4}^{\infty}b_{kn}^{(1)}\beta_k^*=0;$$

$$\frac{1}{2}a_{0n}^{(2)}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(2)}\alpha_k+\sum_{k=2,4}^{\infty}b_{kn}^{(2)}\beta_k^*+\sum_{k=2,4}^{\infty}c_{kn}^{(2)}A_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{(2)}B_k+$$

$$+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}^{\prime(2)}A_k'+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{\prime(2)}B_k'=6;$$

$$\frac{1}{2}a_{0n}^{(3)}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(3)}\alpha_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}^{(3)}A_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{(3)}B_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}^{\prime(3)}A_k'=0; \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}a_{0n}^{(4)}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(4)}\alpha_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}^{(4)}A_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{(4)}B_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{\prime(4)}B_k'=0;$$

$$\sum_{k=1,3}^{\infty} c_{kn}^{(5)} A_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} d_{kn}^{(5)} B_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} c_{kn}'^{(5)} A_k' = P_n^{(5)};$$

$$\sum_{k=1,3}^{\infty} c_{kn}^{(6)} A_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} d_{kn}^{(6)} B_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} d_{kn}'^{(6)} B_k' = P_n^{(6)}$$

де

$$a_{kn}^{(1)} = \int_{\gamma_1} (\sigma^k + \sigma^{-k})\, d(r_0 \sigma^{-n-1});$$

$$b_{kn}^{(1)} = k(n+1)\int_{\gamma_1} r_1 \varrho_c (\sigma^k + \sigma^{-k}) \frac{\sigma^{-n-2}}{|\omega'(\sigma)|}\, d\sigma;$$

$$a_{kn}^{(2)} = -2\mu \int_{\gamma_1} Re\left\{\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma|\omega'(\sigma)|}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{r_0}{r_1}(\sigma^k + \sigma^{-k})\omega'(\sigma)\, d\sigma\right\}\sigma^{-n} d\sigma;$$

$$b_{kn}^{(2)} = 2\mu \int_{\gamma_1} Re\left\{\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma|\omega'(\sigma)|}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\left[\sigma^k - \sigma^{-k} + \frac{k(r_1 - r_0)}{|\omega'(\sigma)|}(\sigma^k + \sigma^{-k})\right]\omega'(\sigma)\, d\sigma\right\}\sigma^{-n} d\sigma;$$

$$c_{kn}^{(2)} = \int_{\gamma_1} Re\left\{\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}\left(\varkappa\sigma^{k-1} - k\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{-k}\right)\right\}\sigma^{-n} d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(2)} = \int_{\gamma_1} Re\left\{\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}\left(\varkappa\sigma^{-k-1} + k\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{k}\right)\right\}\sigma^{-n} d\sigma; \tag{11}$$

$$c_{kn}'^{(2)} = -\int_{\gamma_1} Re\left\{\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}\sigma^{-k-1}\right\}\sigma^{-n} d\sigma; \quad d_{kn}'^{(2)} = -\int_{\gamma_1} Re\left\{\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}\sigma^{k-1}\right\}\sigma^{-n} d\sigma;$$

$$a_{kn}^{(3)} = \int_{\gamma_1} f_k(\sigma)\sigma^{n}\omega'(\sigma)\, d\sigma; \quad c_{kn}^{(3)} = nk\int_{\gamma_1} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{-k+n} d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(3)} = c_{kn}'^{(3)} = n\int_{\gamma_1} \sigma^{-k+n-1} d\sigma; \quad a_{kn}^{(4)} = \int_{\gamma_1} f_k(\sigma)\sigma^{-n}\omega'(\sigma)\, d\sigma;$$

$$c_{kn}^{(4)} = -n\int_{\gamma_1}\left(\sigma^{k} + k\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{-k+1}\right)\sigma^{-n-1}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(4)} = kn\int_{\gamma_1}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{k-n}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{\prime(4)} = -n\int_{\gamma_1}\sigma^{k-n-1}d\sigma; \qquad c_{kn}^{(5)} = kn\rho_2^{2k-2n-2}\int_{\gamma_2}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{-k+n}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(5)} = n\rho_2^{-2n}\int_{\gamma_2}\sigma^{-k+n-1}d\sigma; \quad c_{kn}^{\prime(5)} = n\rho_2^{2k-2n}\int_{\gamma_2}\sigma^{-k+n-1}d\sigma;$$

$$c_{kn}^{(6)} = n\int_{\gamma_2}\left[\sigma^{k} + k\rho_2^{2k-2}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{-k+1}\right]\sigma^{-n-1}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(6)} = -kn\rho_2^{-2k-2}\int_{\gamma_2}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{k-n}d\sigma; \quad d_{kn}^{\prime(6)} = n\rho_2^{-2k}\int_{\gamma_2}\sigma^{k-n-1}d\sigma;$$

$$P_n^{(5)} = -\rho_2^{-2n}\int_{\gamma_2}(N_2 + iT_2)\sigma^{n}\omega'(\sigma)d\sigma; \quad P_n^{(6)} = \int_{\gamma_2}(N_2 + iT_2)\sigma^{-n}\omega'(\sigma)d\sigma.$$

$$\varepsilon = 2\mu\int_{\gamma_1}\varepsilon^{*}(\sigma)\sigma^{-n}d\sigma. \qquad n = 1,3,5\ldots$$

Для числового прикладу взято мідну пластинку і стальне кільце прямокутного перерізу з такими пружними і геометричними характеристиками $E = 2{,}1\cdot 10^{6}$ кГ/см²; $\mu = 4{,}42\cdot 10^{5}$ кГ/см²; $\varkappa = 2{,}08$; $\gamma = 1$; $\delta = \frac{b}{R} = 0{,}2$; $\rho_2 = 4$; $m = 0{,}2$.

Нижче наводимо числові значення напружень σ_θ і σ_ρ в кільці на лінії контакту і нормальне напруження $\sigma(r = r_1)$ в перерізі отвору:

θ^{o}	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\sigma_\theta/10^{6}\varepsilon$	0,434	0,416	0,381	0,352	0,334	0,322	0,312	0,304	0,298	0,295
$-\sigma_\rho/10^{6}\varepsilon$	0,504	0,489	0,446	0,378	0,307	0,248	0,204	0,178	0,163	0,159
$-\sigma/10^{6}\varepsilon$	0,481	0,664	1,020	1,282	1,397	1,428	1,429	1,424	1,420	1,419

Зовнішне навантаження, прикладене до кільця, відсутнє.

Литература

1. Зварич М. К., Мартынович Т. Л. Анизотропный диск, обжатый изотропным кольцом меньшего радиуса. - "Прикладная механика", 1970, т. 6, вып. 9.

2. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс., Львов, 1970.

3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.377

Т.Л.Мартинович, Махмуд Аллам, Ю.С.Перец

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЯВНОСТІ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА. І.

Розглянемо плоску задачу термопружності для двозв'язної області S, обмеженої гладкими контурами L_1 і L_2 $(L = L_1 + L_2)$. У випадку узагальненого плоского напруженого стану вважається, що бічні поверхні пластинки теплоізольовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем вздовж контура L відбувається за законом Ньютона. В області S в точках (x_j, y_j) з афіксом z_j поміщені зосереджені джерела тепла потужності Q_j $(j=1,2,\dots,N)$. На зовнішньому контурі L_2 області S задані переміщення u і v, а на внутрішньому L_1 - зовнішні зусилля X_n, Y_n.

Проблема зводиться до розв'язування такої крайової задачі термопружності [1,2,4].

$$\Delta T = -\sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j}{\lambda_t h}\,\delta(x-x_j)\,\delta(y-y_j) \qquad (1)$$

$$\lambda_t \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_n^{(l)}\left(T - T_c^{(l)}\right) = 0 \quad \text{на } L_l \; (l=1,2) \qquad (2)$$