Література

1. Зварич М. К., Мартынович Т. Л. Анизотропный диск, обжатый изотропным кольцом меньшего радиуса. - "Прикладная механика", 1970, т. 6, вып. 9.

2. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс., Львов, 1970.

3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.377

Т.Л.Мартинович, Махмуд Аллам, Ю.С.Перец

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЯВНОСТІ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА. І.

Розглянемо плоску задачу термопружності для двозв'язної області S, обмеженої гладкими контурами $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ $(\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$. У випадку узагальненого плоского напруженого стану вважається, що бічні поверхні пластинки теплоізольовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем вздовж контура $\mathcal{L}$ відбувається за законом Ньютона. В області S в точках (x_j, y_j) з афіксом z_j поміщені зосереджені джерела тепла потужності Q_j $(j=1,2,\dots,N)$. На зовнішньому контурі $\mathcal{L}_2$ області S задані переміщення u і v, а на внутрішньому $\mathcal{L}_1$ - зовнішні зусилля X_n, Y_n.

Проблема зводиться до розв'язування такої крайової задачі термопружності [1,2,4].

$$\Delta T = -\sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j}{\lambda_t h} \delta(x-x_j)\,\delta(y-y_j) \tag{1}$$

$$\lambda_t \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_n^{(\ell)}\left(T - T_c^{(\ell)}\right) = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{L}_\ell \ (\ell = 1,2) \tag{2}$$

$$d[\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}]=2\kappa T dt+2\kappa t\frac{\partial T}{\partial t}d\bar{t}+$$

$$+i(X_n+iY_n)dS \qquad \text{на} \quad \mathcal{L}_1; \tag{3}$$

$$d[\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}]=-2\kappa T dt-2\kappa t\frac{\partial T}{\partial t}d\bar{t}+$$

$$+2\mu d(u+iv) \qquad \text{на} \quad \mathcal{L}_2,$$

де T - температура; λ_t - коефіцієнт теплопровідності; $\alpha_n^{(\ell)}$ - коефіцієнт тепловіддачі; $T_c^{(\ell)}$ - температура зовнішнього середовища вздовж контура $\mathcal{L}_\ell$; h - товщина пластинки; $\kappa=\frac{\alpha_t E}{4}$ (для узагальненого плоского напруженого стану); $\kappa=\frac{\alpha_t E}{4(1-\nu)}$ (для плоскої деформації), α_t - температурний коефіцієнт лінійного розширення; $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ - комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі; $\delta(z)$ - функція Дірака.

Враховуючи, що $T=\mathrm{Re}\, f(z)$, де $f(z)$ - аналітична функція комплексного змінного, контурні умови (2), (3) можна подати у вигляді [1,2]

$$\lambda_t\int_{\mathcal{L}_\ell}F(t)\,d[f(t)-\overline{f(t)}]+\int_{\mathcal{L}_\ell}\alpha_n^{(\ell)}[f(t)+\overline{f(t)}-2T_c^{(\ell)}]F(t)e^{-i\alpha}dt=0 \tag{4}$$

$$(\ell=1,2);$$

$$\int_{\mathcal{L}_1}\overline{F(t)}\Phi_*(t)dt-\varkappa\int_{\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}\Phi_*(t)dt+\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}\,d[t\overline{\Phi_*(t)}]=$$

$$=i\int_{\mathcal{L}_1}\overline{F(t)}(X_n+iY_n)dS-2\mu\int_{\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}\,d(u+iv)+\kappa(1+\varkappa)\int_{\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}f(t)dt, \tag{5}$$

$$\int_{\mathcal{L}_1}F(t)\Phi_*(t)dt-\varkappa\int_{\mathcal{L}_2}F(t)\Phi_*(t)dt+\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}F(t)\,d[t\overline{\Phi_*(t)}]+$$

$$+\int_{L_1+L_2} F(t)\overline{\Psi'(t)}\,d\bar{t} = i\int_{L_1} F(t)(X_n+iY_n)\,dS - 2\mu\int_{L_2} F(t)\,d(u+iv) + \tag{6}$$

$$+\kappa(1+\varkappa)\int_{L_2} F(t)f(t)\,dt,$$

причому $\Phi_*(z)=\Phi(z)-\kappa f(z)$; α - кут між зовнішньою нормаллю до контура L і віссю Ox ; $F(z)$ - довільна функція, голоморфна в області S .

Напруження обчислюється за звичайними формулами плоскої теорії пружності [3]

$$\sigma_x+\sigma_y = 2[\Phi_*(z)+\overline{\Phi_*(z)}],$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi_*'(z)+\Psi(z)]. \tag{7}$$

Формула для переміщень має вигляд

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi_*(z) - z\overline{\Phi_*(z)} - \overline{\Psi(z)} + \kappa(1+\varkappa)\int f(z)\,dz, \tag{8}$$

причому $\Psi(z)=\Psi'(z)$, $\Phi_*(z)=\varphi_*'(z)$, $\varphi_*(z)=\varphi(z)-\kappa\int f(z)\,dz$.

Нехай функція $z=\omega(\zeta)$ конформно відображає концентричне кільце, обмежене колами γ_1 і γ_2 ($\gamma=\gamma_1+\gamma_2$) радіусів ρ_1 і ρ_2 на розглядувану область S . В круговому кільці функції $f_1(\zeta)=f[\omega(\zeta)]$, $\Phi_1(\zeta)=\Phi_*[\omega(\zeta)]$, $\Psi_1(\zeta)=\Psi[\omega(\zeta)]$, $F_1(\zeta)=F[\omega(\zeta)]$ можна подати в такому вигляді:

$$f_1(\zeta)=q_1^*\ln\zeta+\sum_{j=1}^{N}Q_j^*\ln(\zeta-\zeta_j)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,$$

$$\Phi_1(\zeta)=-\kappa q_1^*\ln\zeta-\kappa\sum_{j=1}^{N}Q_j^*\ln(\zeta-\zeta_j)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\zeta^n, \tag{9}$$

$$\Psi_1(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\zeta^n, \quad F_1(\zeta)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}E_j\zeta^j,$$

де

$$q_1^* = \frac{q_1}{2\pi\lambda_t h}; \quad Q_j^* = -\frac{Q_j}{2\pi\lambda_t h}; \quad q_1 + q_2 = \sum_{j=1}^{N} Q_j \tag{10}$$

$$q_\ell = \alpha_n^{(\ell)} h \int_{L_\ell} T\,dS - \alpha_n^{(\ell)} h \int_{L_\ell} T_c^{(\ell)}\,dS \qquad (\ell = 1,2).$$

Через q_ℓ позначено сумарний потік тепла, що приходить через замкнутий контур L_ℓ області S.

Внесемо вирази (9) у формули (4), (5), (6) і виконаємо інтегрування, вважаючи при цьому, що всі $E_n = 0$, крім $E_j = 1$. У результаті одержимо нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій a_n, A_n, B_n і q_1^* [1,2]

$$2\pi i \lambda_t \left(2 q_1^* \delta_{j0} - j a_{-j} + j \rho_\ell^{2j} \bar{a}_j\right) + (-1)^\ell \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \rho_\ell^{n} + \bar{a}_n \rho_\ell^{-n}\right) \rho_\ell^{j} \beta_{nj}^{(\ell)} +$$

$$+ (-1)^\ell 2 q_1^* \ln \rho_\ell \cdot \rho_\ell^{j} \beta_{0j}^{(\ell)} = 2(-1)^\ell \int_{\gamma_\ell} \alpha_n^{(\ell)} T_c^{(\ell)} \rho_\ell |\omega'(\sigma)| \sigma^{j-1} d\sigma -$$

$$- (-1)^\ell \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_\ell} \alpha_n^{(\ell)} \rho_\ell |\omega'(\sigma)| \ln\left[(\sigma - \zeta_\nu)(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu)\right] \sigma^{j-1} d\sigma - \tag{11}$$

$$- \lambda_t \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_\ell} \left[\frac{1}{\sigma - \zeta_\nu} + \frac{\rho_\ell^2}{\sigma^2(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu)}\right] \sigma^{j} d\sigma \quad (\ell = 1,2);$$

$$(j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n \left(b_{nj}^{(1)} - \varkappa b_{nj}^{(2)}\right) - j \bar{A}_n g_{nj}\right] = \kappa (1 + \varkappa) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{nj}^{(2)} + \tag{12}$$

$$+ \kappa q_1^* \int_{\gamma_1+\gamma_2} \bar{\sigma}^{j} \ln(\sigma\bar{\sigma})\, d\omega(\sigma) + \kappa q_1^* g_{0j} + \kappa \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_1+\gamma_2} \bar{\sigma}^{j} \ln\left[(\sigma - \zeta_\nu)(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu)\right] d\omega(\sigma) +$$

$$+ \kappa \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_1+\gamma_2} \bar{\sigma}^{j} \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu}\, d(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu) + i \int_{\gamma_1} \bar{\sigma}^{j} (X_n + i Y_n)\, dS - 2\mu \int_{\gamma_2} \bar{\sigma}^{j} d(u + iv);$$

$$(j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{B}_n \bar{\tau}_{nj} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(1+\varkappa)A_n z_{nj} + j\bar{A}_n S_{nj}\right] + \kappa(1+\varkappa)\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z_{nj} +$$

$$+\kappa q_1^* \int_{\gamma_1+\gamma_2} \sigma^{-j}\ln(\sigma\bar{\sigma})\,d\omega(\sigma) - \kappa q_1^* S_{0j} + \kappa\sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j}\ln\left[(\sigma-\zeta_\nu)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)\right]d\omega(\sigma) + \tag{13}$$

$$+\kappa\sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j}\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu}\,d(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu) + i\int_{\gamma_1}\sigma^{-j}(X_n+iY_n)\,dS -$$

$$-2\mu\int_{\gamma_2}\sigma^{-j}d(u+iv) \qquad (j=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

Тут введені позначення

$$\beta_{nj}^{(\ell)} = \int_{\gamma_\ell} e^{i(n+j-1)\theta}\alpha_n^{(\ell)}|\omega'(\sigma)|\,d\sigma; \qquad \delta_{nj} = \begin{cases}1 & n=j\\ 0 & n\neq j\end{cases};$$

$$b_{nj}^{(1)} = \int_{\gamma_1}\bar{\sigma}^{-j}\sigma^{n}\,d\omega(\sigma); \qquad b_{nj}^{(2)} = \int_{\gamma_2}\bar{\sigma}^{-j}\sigma^{n}\,d\omega(\sigma);$$

$$g_{nj} = \int_{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\sigma}^{\,j+n-1}\omega(\sigma)\,d\bar{\sigma}; \quad S_{nj} = \int_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j-1}\bar{\sigma}^{\,n}\omega(\sigma)\,d\sigma; \tag{14}$$

$$z_{nj} = \int_{\gamma_2}\sigma^{-j+n}\,d\omega(\sigma); \qquad \tau_{nj} = \int_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j}\bar{\sigma}^{\,n}\,d\overline{\omega(\sigma)}\ .$$

За конкретну двозв'язну область S візьмемо софокусне еліптичне кільце, якому відповідає відображаюча функція

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right) \qquad (|m|<1),$$

$$R=\frac{a_1+b_1}{2}, \quad m=\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}; \ \rho_2=\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}, \ \rho_1=1 \tag{15}$$

(a_j, b_j – півосі софокусних еліпсів $\mathcal{L}_j$).

Температуру середовища $T_t^{(e)}$ вважатимемо сталою. У цьому випадку системи (11), (12), (13) набувають вигляду

$$(1+\varkappa\rho_2^{2j})(mA_{j+1}-A_{j-1})+j\left[(\rho_2^2-1)\bar{A}_{-j+1}+m(\rho_2^{-2}-1)\bar{A}_{-j-1}\right]=$$

$$=\kappa(1+\varkappa)\rho_2^{2j}(a_{j-1}-ma_{j+1})+\kappa q_1^*\left[\rho_2^{2j}(\ln\rho_2^2-1)+1\right]\delta_{j,-1}-$$

$$-\kappa q_1^* m\left[\rho_2^{2j}(\ln\rho_2^2+1)-1\right]\delta_{-j-2,-1}+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^*\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\sigma}^j\ln[(\sigma-\zeta_\nu)\cdot \qquad (16)$$

$$\cdot(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)]\,d\omega(\sigma)+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^*\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\sigma}^j\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu}\,d(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)+$$

$$+\frac{1}{2\pi iR}\int\limits_{\gamma_1}\bar{\sigma}^j(X_n+iY_n)\,dS-\frac{2\mu}{2\pi iR}\int\limits_{\gamma_2}\bar{\sigma}^j\,d(u+iv),$$

$$(j=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

$$(\rho_2^{2j}-1)(m\bar{B}_{j+1}-\bar{B}_{j-1})=(1+\varkappa)(A_{-j-1}-mA_{-j+1})+$$

$$+j\left[(\rho_2^{2j+2}-1)\bar{A}_{j+1}+m(\rho_2^{2j-2}-1)\bar{A}_{j-1}\right]+\kappa(1+\varkappa)(a_{-j-1}-ma_{-j+1})+$$

$$+2\kappa q_1^*\ln\rho_2(\delta_{j,-1}-m\delta_{j-2,-1})+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^*\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^j\ln[(\sigma-\rho_\nu)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)]\,d\omega(\sigma)+$$

$$+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^*\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^j\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_j}\,d(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)+$$

$$+\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\gamma_1}\sigma^j(X_n+iY_n)\,dS-\frac{2\mu}{2\pi iR}\int\limits_{\gamma_2}\sigma^j\,d(u+iv), \qquad (17)$$

$$(j=0,\pm1,\pm2,\ldots);$$

$$K_\ell(2q_1^*\delta_{j0}-ja_{-j}+j\rho_\ell^{2j}\bar{a}_j)+(-1)^{\ell+1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n\rho_\ell^{n}+\bar{a}_n\rho_\ell^{-n})\rho_\ell^{j}h_{\frac{n+j}{2}}^{(\ell)}+$$

$$+(-1)^{\ell+1}2q_1^*\rho_\ell^{j}\ln\rho_\ell h_{\frac{j}{2}}^{(\ell)}=2(-1)^{\ell+1}T_c^{(\ell)}\rho_\ell^{j}h_{\frac{j}{2}}^{(\ell)}- \tag{18}$$

$$-\frac{K_\ell}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu\int_{\gamma_\ell}\left[\frac{1}{\sigma-\zeta_\nu}+\frac{\rho_\ell^{2}}{\sigma^{2}(\bar{\sigma}-\bar{\rho}_\nu)}\right]\sigma^{-j}d\sigma+$$

$$+\frac{(-1)^{\ell+1}}{2\pi i R}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu\int_{\gamma_\ell}|\omega'(\sigma)|\ln[(\sigma-\zeta_\nu)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)]\sigma^{-j-1}d\sigma$$

$$(\ell=1,2),\quad (j=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

Тут позначено

$$h_n^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)=h_{-n}^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)=-\frac{2[1+(m\rho_\ell^{-2})^2]}{\pi}I_{|2n|}^{(\ell)}+\frac{2m\rho_\ell^{-2}}{\pi}\left(I_{2|n-1|}^{(\ell)}+I_{2|n+1|}^{(\ell)}\right)$$

$$I_{|n|}^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)=\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)^{\left|\frac{n}{2}\right|}\int_0^1\frac{x^{|n|}dx}{\sqrt{(1-x^2)[1-(m\rho_\ell^{-2})^2x^2]}}\,;\qquad K_\ell=\frac{\lambda_t}{\alpha_n^{(\ell)}\rho_\ell R}. \tag{19}$$

Вираз $I_n^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)$ дорівнює нулеві при n непарних, а величина $h_n^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)$ дорівнює нулеві при n дробових.

Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16), (17) і (18) служать для визначення коефіцієнтів a_n, A_n і B_n розкладу шуканих функцій $f_1(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$.

Література

1. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А. К решению плоской задачи термоупругости для двухсвязных областей. - "Прикладная механика", 1972, т. УШ, вып. 7.

2. Мартинович Т. Л., Ніщенко І. О., Махмуд Аллам. Температурні напруження біля криволінійних отворів, викликані однорідним тепловим потоком на неокінченності. - „Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

3. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, 1972.

4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстия. К., "Наукова думка", 1968.

УДК 534.1

В.М.Флячок

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИХ ПОЛОГИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

У цій роботі ми розглядаємо вільні коливання трансверсально ізотропної пологої циліндричної панелі, на основі рівнянь теорії типу С.П.Тимошенка, які враховують деформації поперечних зсувів і інерцію повороту [1].

Розглянемо прямокутну в плані циліндричну панель товщини $2h$, довжини ℓ, з кутом розкриття β_0, яка вільно оперта вздовж усього контуру. Коливання такої оболонки в ортогональних безрозмірних координатах α, β описуються рівняннями

$$\left[\left(\Delta-\frac{3R^2\varepsilon}{h^2}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\Delta-\frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)+\frac{3R^4}{h^2}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]F+\frac{R}{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0;$$

$$\left[\left(\Delta-\frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\varepsilon-R^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}F+\frac{R}{2hE}\Delta\Delta\varphi=0; \qquad (1)$$