Л і т е р а т у р а

1. М а р т ы н о в и ч Т. Л., Н и щ е н к о И. А. К решению плоской задачи термоупругости для двухсвязных областей. - "Прикладная механика", 1972, т. УШ, вып. 7.

2. М а р т и н о в и ч Т. Л., Н і щ е н к о І. О., М а х м у д А л л а м. Температурні напруження біля криволінійних отворів, викликані однорідним тепловим потоком на неокінченності. - „Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

3. П р у с о в И. А. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, 1972.

4. С а в и н Г. Н. Распределение напряжений около отверстия. К., "Наукова думка", 1968.

УДК 534.1

В.М.Флячок

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИХ ПОЛОГИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

У цій роботі ми розглядаємо вільні коливання трансверсально ізотропної пологої циліндричної панелі, на основі рівнянь теорії типу С.П.Тимошенка, які враховують деформації поперечних зсувів і інерцію повороту [1].

Розглянемо прямокутну в плані циліндричну панель товщини $2h$, довжини ℓ, з кутом розкриття β_0, яка вільно оперта вздовж усього контуру. Коливання такої оболонки в ортогональних безрозмірних координатах α, β описуються рівняннями

$$\left[\left(\Delta-\frac{3R^2\varepsilon}{h^2}\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\Delta-\frac{R^2}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)+\frac{3R^4}{h^2}\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]F+\frac{R}{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0;$$

$$\left[\left(\Delta-\frac{R^2}{C_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\varepsilon-R^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}F+\frac{R}{2hE}\Delta\Delta\varphi=0; \qquad (1)$$

$$\Delta\psi - \frac{2R^2}{\varepsilon(1-\nu)}\left[1+\frac{\varepsilon}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\psi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$; $\varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}\frac{E}{G_n}$, $D = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{(1-\nu^2)}$;

$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$; ρ – густина матеріалу оболонки; R – радіус її серединної поверхні; k' – коефіцієнт зсуву; E, ν – пружні характеристики матеріалу оболонки в напрямках α, β; G_n – модуль зсуву в площадках, нормальних до серединної поверхні.

Нормальне переміщення w і кути повороту γ_α, γ_β через функцію прогину $F(\alpha,\beta,\tau)$ і функцію зсуву $\psi(\alpha,\beta,\tau)$ виражаються так:

$$w = \left[1 - \frac{\varepsilon}{R^2}\left(\Delta - \frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]F;$$

$$\gamma_\alpha = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right); \quad \gamma_\beta = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial F}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right). \tag{2}$$

Відповідно можна зобразити компоненти зусиль і моментів через ці функції і функцію напружень $\varphi(\alpha,\beta,\tau)$.

Граничні умови вільного опирання країв оболонки

$$\begin{aligned} &v = w = \gamma_\beta = N_\alpha = M_\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0,\ \alpha = \frac{\ell}{R};\\ &u = w = \gamma_\alpha = N_\beta = M_\beta = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 0,\ \beta = \beta_0, \end{aligned} \tag{3}$$

будуть задовольнятись, якщо розв'язок системи (I) вибрати у вигляді

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\tau) &= \sum_n\sum_m A_{nm}\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta\sin\omega_{nm}\tau;\\ \varphi(\alpha,\beta,\tau) &= \sum_n\sum_m B_{nm}\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta\sin\omega_{nm}\tau;\\ \psi(\alpha,\beta,\tau) &= \sum_n\sum_m C_{nm}\cos\lambda_n\alpha\cos\mu_m\beta\sin\omega_{nm}\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

де $n,m = 1,2,3,\ldots\infty$; $\lambda_n = \frac{n\pi R}{\ell}$; $\mu_m = \frac{m\pi}{\beta_0}$;

ω_{nm} – колова частота коливань

Відзначимо, що в цьому випадку крайова задача розділяється на дві: відносно функцій F , φ і відносно функції ψ . Остання визначає зсувні коливання, які тут не розглядаються.

Підставивши (4) в систему (1), одержимо частотне рівняння, з якого знайдемо власні частоти коливання вільно опертої циліндричної панелі

$$\left(\omega^2_{nm}\right)_{1,2} = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)R^2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{2}\left[1+\varepsilon_0\varkappa^2_{nm}+\delta^2\varkappa^2_{nm}+\frac{\lambda^4_n\varepsilon_0(1-\nu^2)}{\varkappa^4_{nm}}\right]\mp\right.$$

$$\left.\mp\sqrt{\frac{1}{4}\left[1+\varepsilon_0\varkappa^2_{nm}+\delta^2\varkappa^2_{nm}+\frac{\lambda^4_n\varepsilon_0(1-\nu^2)}{\varkappa^4_{nm}}\right]^2-\varepsilon_0\left[\delta^2\varkappa^4_{nm}+\frac{\lambda^4_n(1-\nu^2)}{\varkappa^4_{nm}}\left(1+\varepsilon_0\varkappa^2_{nm}\right)\right]}\right\} \quad (5)$$

Тут $\delta=\dfrac{h}{\sqrt{3}R}$; $\varepsilon_0=\dfrac{\varepsilon}{K^2}$; $\varkappa^2_{nm}=\lambda^2_n+\mu^2_m$.

Із аналізу (5) видно, що власні частоти коливання трансверсально ізотропної оболонки суттєво залежать від відношення $\dfrac{E}{G_n}$, яке для ізотропного матеріалу дорівнює $\dfrac{E}{G_n}=2(1+\nu)$. При $\dfrac{E}{G_n}=0$ з рівняння (5) випливає результат [2] , одержаний на основі класичної теорії оболонок. Прямуючи $R\to\infty$, дістанемо частоти для прямокутної трансверсально ізотропної пластинки [3] .

Як числовий приклад розглянемо циліндричну панель з характеристиками $\nu=0{,}17$; $k'=\frac{5}{6}$; $\beta_0=1{,}5$ рад.; $\ell=6$м, 50м; $\dfrac{E}{G_n}=2{,}34$; 40.

Значення безрозмірного частотного параметра $p_{nm}=\left(\dfrac{\rho R^2}{E}\right)^{\frac{1}{2}}(\omega_{nm})_1$.

p_{nm}	$\ell=6$м				$\ell=50$м			
	$R/2h=8$		$R/2h=30$		$R/2h=8$		$R/2h=30$	
	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$
p_{11}	2,294	1,407	1,128	1,089	0,256	0,237	0,176	0,175
p_{15}	4,766	1,843	1,663	1,300	3,283	1,419	1,059	0,872
p_{23}	6,999	2,528	2,796	2,026	1,434	0,814	0,425	0,392
p_{55}	21,940	5,912	12,979	5,585	3,803	1,575	1,269	1,028

Як бачимо з таблиці, власні частоти коливання трансверсально ізотропної ($\dfrac{E}{G_n}=40$) оболонки менші, ніж ізотропної ($\dfrac{E}{G_n}=2{,}34$). Ця різниця зростає зі зменшенням довжини оболонки, збільшенням відносної товщини, а також для вищих частот і більшого відношення $\frac{E}{G_n}$.

Література

1. Жуць Є. І. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1967, вип. 3.

2. Ониашвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. М., Изд-во АН СССР, 1957.

3. Пелех Б. Л., Тетеро Г. А. О динамическом изгибе пластинок, слабо сопротивляющихся сдвигу. - "Механика полимеров", 1968, № 1.