УДК 539.3

Я.Г.Савула, Н.П.Флейшман

# ПРО ОДНЕ МОЖЛИВЕ РОЗШИРЕННЯ КЛАСУ ОБОЛОНОК КАНОНІЧНИХ ФОРМ

У спеціальній літературі існує велика кількість робіт, присвячених розрахунку оболонок канонічних форм (сферична, циліндрична, оболонка обертання та ін.), проте в інженерній практиці часто виникає необхідність також у розрахунку тонкостінних конструкцій більш складних конфігурацій. Значно розширити можливості розрахунку конструкцій можна, зокрема, за рахунок оболонок з різаною (монжевою) серединною поверхнею.

Нехай просторова крива $L_2$, так звана напрямна різаної поверхні, задана радіусом-вектором $\vec{r}_0(s)$, де $s$ – натуральний параметр, а твірна $L_1$ поверхні задана параметричними рівняннями $\rho=\rho(\alpha)$, $\zeta=\zeta(\alpha)$ в плоскій системі координат з ортами $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Тоді різану поверхню, утворену рухом заданої твірної $L_1$ по заданій напрямній $L_2$, можна зобразити векторним рівнянням [3]

$$\vec{r}(\alpha,s)=\vec{r}_0(s)+\rho(\alpha)\vec{c}(s)+\zeta(\alpha)\vec{d}(s). \qquad (1)$$

Локальна система координат з ортами $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у точках напрямної кривої $L_2$ вводиться співвідношеннями

$$\begin{aligned}\vec{c}(s)&=\vec{n}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta,\\ \vec{d}(s)&=-\vec{n}\sin\theta+\vec{b}\cos\theta,\end{aligned} \qquad (2)$$

де $\vec{n}$, $\vec{b}$ – вектори головної нормалі і бінормалі напрямної. Параметр $\theta$ виражається через кручення $\varkappa$ напрямної кривої співвідношенням

$$\theta=\int\varkappa ds. \qquad (3)$$

У випадку, коли напрямна $L_2$ є колом, різана поверхня вироджується у поверхню обертання. За аналогією з поверхнями обертання лінії

$L_1$ на різаній поверхні прийнято називати меридіанами, ортогональні ж траєкторії меридіанів - паралелями. Паралелі та меридіани різаної поверхні є лініями головних кривин [2].

Взагалі різані поверхні становлять досить широкий клас, в який, крім поверхонь обертання, включаються ще каналові і трубчасті поверхні [2].

Враховуючи формули диференціювання векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$ [3], легко одержати вирази для коефіцієнтів першої квадратичної форми та головних кривин різаної поверхні

$$A_1^2=(\rho')^2+(\zeta')^2; \quad A_2^2=[1+k(\zeta\sin\theta-\rho\cos\theta)]^2; \tag{4}$$

$$k_1=\frac{\zeta''\rho'-\zeta'\rho''}{\pm[(\rho')^2+(\zeta')^2]^{3/2}}; \tag{5}$$

$$k_2=-\frac{k}{\pm[(\rho')^2+(\zeta')^2]^{1/2}}\ \frac{\rho'\sin\theta+\zeta'\cos\theta}{[1+k(\zeta\sin\theta-\rho\cos\theta)]},$$

де $k$ - кривина напрямної $L_2$.

У випадку, коли меридіаном різаної поверхні є пряма лінія, тобто для різаної поверхні нульової гаусової кривини, зручно ввести параметризацію твірної $L_1$ співвідношеннями

$$\rho=-s_1\cos\gamma; \quad \zeta=-s_1\sin\gamma, \tag{6}$$

де $s_1$ - довжина, яка відлічується від деякого фіксованого початку на кривій $L_1$; $\gamma=const$.

Використовуючи вирази (4), (5) після підстановки у них співвідношень (6), легко записати загальні інтеграли статичних і геометричних рівнянь безмоментної теорії [1] для оболонок з різаною серединною поверхнею нульової гаусової кривини.

Коли ж напрямною різаної поверхні є плоска лінія

$$x=x_0(\beta); \quad y=y_0(\beta); \quad z=0, \tag{7}$$

то формули (4) і (5) значно спрощуються, оскільки кручення в цьому випадку дорівнює нулеві. Це виродження різаної поверхні можна розглядати як узагальнення поверхні обертання в тому сенсі, в якому будь-яка крива $L_2$ є узагальненням кола.

Умови Гаусса-Кодацці [3] для цього випадку виродження різаної поверхні записуються у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_2}{r_2}\right)=\omega(\alpha)\,\chi(\beta);\tag{8}$$

$$\frac{A_1A_2}{r_1r_2}=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\rho'(\alpha)}{A_1(\alpha)}\right]\chi(\beta).$$

Тут

$$\omega(\alpha)=-\frac{\rho'(\alpha)}{r_1};\qquad \chi(\beta)=\frac{y_0''x_0'-x_0''y_0'}{(x_0')^2+(y_0')^2};$$

$r_1$, $r_2$ – величини обернені головним кривинам $k_1$, $k_2$, тобто радіуси головних кривин.

Система трьох рівнянь рівноваги безмежної теорії [1] оболонок з різаною серединною поверхнею, що має плоску напрямну криву, записується

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_2T_1}{\partial\alpha}+A_1\frac{\partial S}{\partial\beta}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}T_2=-A_1A_2q_1;\\
&\frac{\partial A_2S}{\partial\alpha}+A_1\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}S=-A_1A_2q_2;\\
&\frac{T_1}{r_1}+\frac{T_2}{r_2}=q_n.
\end{aligned}\tag{9}$$

Введенням функції напружень $W$ за формулами

$$\begin{aligned}
&T_1=\chi(\beta)\frac{r_2}{A_2^2}\frac{\partial W}{\partial\beta};\\
&S=\frac{1}{\varphi(\alpha)A_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha}+\frac{1}{A_1}\int\left[-A_1A_2q_1+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}r_2q_n\right]d\beta,
\end{aligned}\tag{10}$$

система (9) зводиться до одного рівняння

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{A_2^2}{\varphi(\alpha)A_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right]+\frac{A_1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\chi(\beta)\frac{r_2^2}{A_2^2r_1}\frac{\partial W}{\partial\beta}\right]=\\
&=+A_1A_2q_2-A_1\frac{\partial}{\partial\beta}(r_2q_n)+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{A_2^2}{A_1}\int\left[-A_1A_2q_1+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}r_2q_n\right]d\beta\right\}.
\end{aligned}\tag{11}$$

де

$$\varphi(\alpha)=\frac{r_1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\rho'(\alpha)}{A_1(\alpha)}\right].$$

При цьому використаємо співвідношення

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}\frac{r_2}{r_1}T_1=\frac{r_2}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_2^2}{r_2}T_1\right), \qquad (12)$$

що випливає із умов Гаусса-Кодацці. Третє рівняння (9) служить для визначення зусилля $T_2$.

Аналогічно можна перетворити також систему геометричних рівнянь [1] безмежної теорії оболонок з різаною серединною поверхнею.

Наведені співвідношення значно спрощуються, коли твірну $L_1$ параметризувати кутом $\alpha$ між нормаллю в довільній її точці і бінормаллю кривої $L_2$, а напрямну $L_2$ параметризувати кутом $\beta$ між нормаллю в довільній точці і деяким фіксованим напрямком в її площині [4].

Таким чином, крайові задачі для безмоментних оболонок з різаною серединною поверхнею зводяться до розв'язання при відповідних крайових умовах двовимірного рівняння другого порядку в частинних похідних (11), тип якого визначається знаком гаусової кривини поверхні. Область зміни параметрів $\alpha$, $\beta$ в плоскій системі координат ($\alpha$, $\beta$) є або безмежною смугою в напрямку координати $\beta$ або прямокутником, обмеженим лініями $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_0$, $\beta=\beta_1$.

Для замкненої по $\beta$ оболонки необхідно задовольняти умову періодичності функції напружень по координаті $\beta$, на краях $\alpha=\alpha_0$ і $\alpha=\alpha_1$ задати умови, що відповідають типу закріплення.

Наприклад, два краї оболонки, що проходять вздовж координатних ліній $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$ шарнірно оперті, тобто

$$\begin{aligned} &T_1=T_0^*; \quad v=0, \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0 \\ &T_1=T_1^*; \quad v=0, \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_1 \end{aligned} \qquad (13)$$

Із статичних умов (13), враховуючи співвідношення (10), одержуємо для визначення функції напружень крайові умови

$$W=c_1 \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0; \quad W=c_2 \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_1. \qquad (14)$$

З огляду на те, що зусилля в оболонці визначається через похідні функції напружень, одну із сталих $C_1$, $C_2$ можна прийняти рівною нулеві; другу тоді визначимо із умови рівності нулеві головного вектора всіх діючих на оболонку зовнішніх і крайових навантажень.

У випадку, коли оболонка має площину симетрії, що проходить через лінію $\beta = \beta^*$, одержимо з умови рівності дотичного зусилля $S$ на лінії $\beta = \beta^*$ додаткову умову

$$W = \int H d\alpha + C_3 \qquad \text{при} \qquad \beta = \beta^*, \tag{15}$$

де

$$H(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha) \int \left[ -A_1 A_2 q_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} r_2 q_n \right] d\beta .$$

Прийнявши, наприклад, $C_1 = 0$ дві інші сталі, можемо визначити з умов неперервності функції напружень у точках $(\alpha_0, \beta^*)$ і $(\alpha_1, \beta^*)$.

Аналогічними міркуваннями можна користуватися при постановці інших крайових умов.

Література

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.

2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. I. М.-Л., ГИТТЛ, 1947.

3. Норден А. П. Теория поверхностей. М., ГИТТЛ, 1956.

4. Флейшман Н. П., Савула Я. Г. - "Прикладная механика", 1972, т. УШ, вып. 3.