УДК 519.21

І.Д.Квіт

ЕНЕРГОМОМЕНТИ

1. Нехай додатнозначна випадкова змінна ξ буде абсолютно неперервна в густиною

$$p(t)=\begin{cases} =0\ , & t<0, \\ \geq 0\ , & t>0. \end{cases} \qquad \int_0^\infty p(t)\,dt=1. \tag{1}$$

Тоді існують такі додатні числа α та β, що мелінове перетворення густини (1)

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}p(t)\,dt, \quad (z=x+iy\ ,\ i=\sqrt{-1}) \tag{2}$$

абсолютно збігається в смузі

$$1-\alpha<x<1+\beta\ , \quad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{3}$$

та є принаймні в ній аналітичною функцією. Вираз (2) при $y=0$ є початковим моментом порядку $x-1$

$$m(x-1)=\int_0^\infty t^{x-1}p(t)\,dt, \quad 1-\alpha<x<1+\beta. \tag{4}$$

Густина розмаху для випадку двох спостережень над випадковою змінною ξ з густиною (1) згідно з [1] має вигляд

$$q_2(t)=2\int_0^\infty p(\tau)\,p(\tau+t)\,d\tau, \quad t>0. \tag{5}$$

При $t=0$ додатна величина (5) може бути скінченна або нескінченна. Якщо інтеграл

$$\mathcal{E}_\xi=\int_0^\infty p^2(t)\,dt \tag{6}$$

збігається, то він називається енергією випадкової змінної ξ з густиною (1). У випадку збіжності (6) існують такі додатні числа A та B, що інтеграл

$$\psi(z)=\int_0^\infty t^{2z-1}p^2(t)\,dt, \quad (z=x+iy,\ i=\sqrt{-1}), \tag{7}$$

абсолютно збігається в смузі

$$\frac{1}{2}-A < x < \frac{1}{2}+B, \quad (A>0, B>0), \tag{8}$$

та є принаймні в ній аналітичною функцією. Вираз (7) при $y=0$ назвемо початковим енергомоментом порядку $2x-1$

$$\mathcal{E}m(2x-1)=\int_0^\infty t^{2x-1} p^2(t)dt, \quad \frac{1}{2}-A<x<\frac{1}{2}+B. \tag{9}$$

Очевидно, що початковий енергомомент нульового порядку збігається з енергією

$$\mathcal{E}m(0)=\mathcal{E}\xi \tag{10}$$

Мета нашої замітки - вказати два зображення початкових енергомоментів (9) і два представлення енергії (6) за допомогою мелінового перетворення (2).

2. З теореми Планшереля [2] відомо, що коли енергія (6) густини (1) існує, то для всіх x з інтервалу (8) початковий енергомомент (9) виражається за допомогою мелінового перетворення (2) формулою

$$\mathcal{E}m(2x-1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^2dy. \tag{11}$$

При $x=\frac{1}{2}$ вираз (11) переходить у вираз для енергії

$$\mathcal{E}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\tfrac{1}{2}+iy)|^2dy. \tag{12}$$

3. З існування початкових енергомоментів порядку $2x-1$ для x з інтервалу (8) випливає, що збігається інтеграл

$$\int_0^\infty t^{z-1}p^2(t)dt, \quad 1-2A<\mathrm{Re}\,z<1+2B.$$

За формулою Парсеваля [2] маємо, що для всіх z зі смуги $1-2A<\mathrm{Re}\,z<1+2B$ дістаємо співвідношення

$$\int_0^\infty t^{z-1}p^2(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\varphi(z-\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta, \tag{13}$$

$$\max(1-\alpha, \mathrm{Re}\,z-1-\beta)<c<\min(1+\beta, \mathrm{Re}\,z-1+\alpha).$$

При $x=1$ вираз (13) переходить у вираз для енергії

$$\mathcal{E}\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(1-\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta, \tag{14}$$

$$\max(1-\alpha,-\beta) < c < \min(1+\beta,\alpha).$$

Формули (11) і (13) представляють початкові енергомоменти відповідних порядків, а формули (12) і (14) представляють енергію випадкової змінної ξ з густиною (1) у термінах мелінового перетворення (2).

4. Для ілюстрації формул, зв'язаних з енергією та енергомоментами, розглянемо кілька прикладів. Випадкова змінна Парето з густиною

$$p(t) = \frac{\alpha a^{\alpha}}{t^{1+\alpha}}, \quad 0 < a < t, \quad (\alpha > 0), \tag{15}$$

має меліновим перетворенням функцію

$$\varphi(z) = \frac{\alpha a^{z-1}}{1+\alpha-z}, \quad \operatorname{Re} z < 1+\alpha.$$

Енергомоменти розподілу (15) дорівнюють

$$\mathcal{E}m(2x-1) = \frac{\alpha a^{2(x-1)}}{2(1+\alpha-x)}, \quad x < 1+\alpha.$$

Енергія розподілу (15) записується

$$\mathcal{E}\xi = \frac{\alpha}{a(1+2\alpha)}.$$

Енергія арксинус-розподілу з густиною

$$p(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}, \quad 0 < t < 1, \tag{16}$$

не існує. Тим більше не існують енергомоменти розподілу (16).

Співвідношення (9) і (11) можна використати для знаходження вартості одного з інтегралів, коли значення іншого відоме. Наприклад, для розподілу з густиною

$$p(t) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, \quad t > 0,$$

і меліновим перетворенням

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi z}{2}}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2,$$

маємо один раз

$$\int_0^\infty t^{2x-1}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\right]^2 dt = \frac{2}{\pi^2}\Gamma(x)\Gamma(2-x), \quad 0<x<2;$$

а інший раз

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}(x+iy)}\right|^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi y}{2}+\cos^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi y}{2}}.$$

Отже

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{ch}^2\frac{\pi y}{2}+\cos^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi y}{2}} = \frac{4}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(2-x), \quad 0<x<2.$$

Аналогічно можна також використати інші співвідношення.

Література

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М., "Мир", 1965.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., Гостехиздат, 1948.

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко

РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПУАНКАРЕ ДЛЯ СИСТЕМИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай область S^+ займає внутрішність або зовнішність кола γ одиничного радіуса на площині комплексної змінної $\zeta = x+iy$. Задача Рімана-Гільберта-Пуанкаре [1,6] для системи функцій полягає в тому, щоб знайти голоморфні в області S^+ функції $\Phi_i = \Phi_i(\zeta)$ $(i=1,2\dots n)$ за граничними умовами

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[a_{\alpha ij}(\sigma)\Phi_i^{(j)}(\sigma)+\int_\gamma h_{\alpha ij}(\sigma)\Phi_i^{(j)}(\sigma)\,ds\right]\right\} = f_\alpha(\sigma), \qquad (1)$$

$$\alpha = 1,2,\dots,n,$$