маємо один раз

$$\int_0^\infty t^{2x-1}\left[\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+t^2}\right]^2 dt = \frac{2}{\pi^2}\Gamma(x)\Gamma(2-x), \quad 0<x<2;$$

а інший раз

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}(x+iy)}\right|^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sin^2\frac{\pi x}{2}\,ch^2\frac{\pi y}{2}+\cos^2\frac{\pi x}{2}\,sh^2\frac{\pi y}{2}}.$$

Отже

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sin^2\frac{\pi x}{2}\,ch^2\frac{\pi y}{2}+\cos^2\frac{\pi x}{2}\,sh^2\frac{\pi y}{2}} = \frac{4}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(2-x), \quad 0<x<2.$$

Аналогічно можна також використати інші співвідношення.

Література

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М., "Мир", 1965.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., Гостехиздат, 1948.

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко

РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПУАНКАРЕ ДЛЯ СИСТЕМИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай область S^+ займає внутрішність або зовнішність кола γ одиничного радіуса на площині комплексної змінної $\zeta = x+iy$. Задача Рімана-Гільберта-Пуанкаре [1,6] для системи функцій полягає в тому, щоб знайти голоморфні в області S^+ функції $\Phi_i = \Phi_i(\zeta)$ $(i=1,2\ldots n)$ за граничними умовами

$$Re\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[a_{\alpha ij}(\sigma)\Phi_i^{(j)}(\sigma)+\int_\gamma h_{\alpha ij}(\sigma)\Phi_i^{(j)}(\sigma)\,ds\right]\right\} = f_\alpha(\sigma), \tag{1}$$

$$\alpha = 1,2,\ldots n,$$

де σ - афіко точки на γ ; Re - дійсна частина; $f_\alpha(\sigma, a_{\alpha ij}$, $h_{\alpha ij}$ - задані функції на γ , що задовольняють умову H ; $\Phi_i^{(j)}(\sigma)$ - означає граничне значення $[\Phi_i^{(j)}(\zeta)]^+$ похідної порядку j функції $\Phi_i(\zeta)$ до порядку n включно. Вважатимемо, що функції $\Phi_i^{(j)}(\zeta)$ на γ задовольняють умову H .

Побудуємо розв'язок задачі (1) для випадку, коли

$$h_{\alpha ij} = 0; \quad a_{\alpha ij} = b_{\alpha ij}\,\sigma^{-j}; \qquad \begin{array}{l} j = 1,2,\dots m; \\ \alpha = i = 1,2,\dots n; \end{array} \tag{2}$$

$b_{\alpha ij}$ - сталі коефіцієнти.

Для кінцевої області зобразимо функції $\Phi_i(\zeta)$ у вигляді

$$\Phi_i(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{ki}\,\zeta^k; \quad i = 1,2\dots n. \tag{3}$$

Тоді

$$\Phi_i^{(j)}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\prod_{\ell=0}^{j-1}(k-\ell)\right] d_{ki}\,\zeta^{k-j}; \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots n; \\ j = 1,2,\dots m. \end{array} \tag{4}$$

Підставляючи залежності (4) у граничні умови (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ , одержуємо систему n алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів d_{ki}

$$\sum_{i=1}^{n} b_i D_i = A; \tag{5}$$

де b_i - матриці, коефіцієнти яких $b_{\alpha ij}$; D_i - вектори з коефіцієнтами $\left[\prod_{\ell=0}^{j-1}(k-\ell)\right] d_{ki}$; A - вектор з коефіцієнтами $A_{k\alpha}$; $A_{k\alpha}$ - коефіцієнти розкладу в ряд функцій $f_\alpha(\sigma)$.

Якщо ж область S^+ займає зовнішність кола одиничного радіуса γ , то зображення функцій (3) та їх похідних (4) матиме відповідно вигляд

$$\Phi_i(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{-ki}\,\zeta^{-k};$$

$$\Phi_i^{(j)}(\zeta) = (-1)^j \sum_{k=0}^{\infty}\left[\prod_{\ell=0}^{j-1}(k+\ell)\right] d_{-ki}\,\zeta^{-(k+j)} \qquad i = 1,2,\dots n. \tag{6}$$

Аналогічно, як і для кінцевої області задача зводиться до системи n алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів d_{-ki}.

До розв'язаної вище задачі Рімана-Гільберта-Пуанкаре зводиться задача про вільне опирання круглої (безмежної з круговим отвором) пластинки по несиметричному ребру жорсткості.

Граничні умови [2] для кругової границі мають вигляд

$$2\,Re\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi_2(\sigma)+\chi_2(\sigma)\right\}=f_1(\sigma);$$

$$\begin{aligned}
2\,Re\Big\{&\pm\delta_2\sigma^2\varphi_2'''(\sigma)+(\pm\delta_2\mp\delta_1-\nu+1)\sigma\varphi_2''(\sigma)+2(\pm\delta_1+\nu-1)\varphi_2'(\sigma)+\\
&+(\pm 2\delta_2\mp\delta_1-\nu+1)\sigma^2\chi_2''(\sigma)\pm\delta_2\sigma^3\chi_2'''(\sigma)+6\lambda(1-\nu)\big[\sigma\varphi_1''(\sigma)-\\
&-2\varphi_1'(\sigma)+\sigma^3\chi_1''(\sigma)\big]\Big\}=-\frac{R}{D}f_2(\sigma);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,Re\Big\{&2\lambda\big[\mp\delta_3\sigma^2\varphi_2'''(\sigma)\mp(2\delta_3+\delta)\sigma\varphi_2''(\sigma)\mp 2(\delta+\delta_3)\varphi_2'(\sigma)\mp\\
&\mp\delta_3\sigma^3\chi_2'''(\sigma)\mp(3\delta_3+\delta)\sigma^2\chi_2''(\sigma)\big]\pm\delta_3\sigma^2\varphi_1'''(\sigma)\pm\big[(\varkappa_1+1)\delta_3+\delta\big]\sigma\varphi_1''(\sigma)+\\
&+\big[1\mp(\varkappa_1+1)(\delta+\delta_3)\big]\varphi_1'(\sigma)+\frac{1}{\sigma}\varphi_1(\sigma)+\sigma\chi_1'(\sigma)\pm(3\delta_3+\delta)\sigma^2\chi_1''(\sigma)\pm\\
&\pm\delta_3\sigma^3\chi_1'''(\sigma)\Big]=\frac{1}{\mu h^2}f_3(\sigma);
\end{aligned}\qquad(7)$$

$$\begin{aligned}
2\,Re\Big\langle i\Big\{&\mp 2\lambda\delta_3\big[\sigma^3\varphi_2^{IV}(\sigma)+4\sigma^2\varphi_2'''(\sigma)+\sigma^4\chi_2^{IV}(\sigma)+6\sigma^3\chi_2'''(\sigma)+\\
&+6\sigma^2\chi_2''(\sigma)\big]\pm\delta_3\big[\sigma^3\varphi_1^{IV}(\sigma)+(3+\varkappa_1)\sigma^2\varphi_1'''(\sigma)\big]+\varphi_1'(\sigma)-\\
&-\frac{1}{\sigma}\varphi_1(\sigma)\pm\delta_3\big[\sigma^4\chi_1^{IV}(\sigma)+6\sigma^3\chi_1'''(\sigma)+6\sigma^2\chi_1''(\sigma)\big]+\\
&+\sigma\chi_1'(\sigma)\Big\}\Big\rangle=\frac{1}{\mu h^2}f_4(\sigma).
\end{aligned}$$

Тут і нижче верхній знак береться для внутрішньої області, а нижній – для внутрішньої. Функції $\varphi_2(\zeta)$ і $\chi_2(\zeta)$ визначають прогин пластинки [4]

$$W = 2Re[\bar{\zeta}\varphi_2(\zeta) + \chi_2(\zeta)] + W_0; \tag{8}$$

який задовольняє рівняння

$$D \Delta\Delta W = q; \tag{9}$$

q – поперечне навантаження на пластинку; D – циліндрична жорсткість пластинки; W_0 – частковий розв'язок рівняння (9).

Функції $\varphi_1(\zeta)$ і $\chi_1(\zeta)$ визначають функцію напружень Ері, тобто напружений стан пластинки [4]

$$U = Re[\bar{\zeta}\varphi_1(\zeta) + \chi_1(\zeta)]; \tag{10}$$

$\varkappa_1 = -\frac{3-\nu}{1+\nu}$; ν – коефіцієнт Пуассона; δ ; δ_1 ; δ_2 ; δ_3 – відповідно жорсткості ребра на розтяг, згин і кручення; $\lambda = \frac{h_0}{h}$; h_0 – зміщення осі ребра відносно серединної площини пластинки; h – товщина пластинки; $f_i(\sigma)$ $(i = 1,2,3,4)$ – залежать від навантаження на ребро і W_0 [2].

При заміні $\frac{1}{\zeta}\varphi_i(\zeta) = \varphi_i^0(\zeta)$ задача (7) матиме вигляд задачі (1),(2).

Застосуванням запропонованої методики задача про вільне опирання пластинки по несиметричному ребру жорсткості зводиться до розв'язку системи чотирьох алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу в ряд функцій $\varphi_1(\zeta)$; $\chi_1(\zeta)$; $\varphi_2(\zeta)$; $\chi_2(\zeta)$.

Визначник одержаної системи

$$J_k^* = -\frac{2}{1+\nu}\Big\langle(\delta_2 k^2 + 2k + \delta_1 \pm \nu \pm 1)\Big\{(k^2-1)[(3-\nu)k^2\delta + 2k \mp (1-\nu)]\delta_3 + (2k \pm 1 \mp \nu)\delta \pm (1+\nu)\Big\} + 12\lambda^2(1-\nu)\Big\{(1+\nu)[(k^2-1)^2\delta_3 + \delta] + k^2(k^2-1)[2k \mp (1-\nu)]\delta\delta_3\Big\}\Big\rangle < 0,$$

а тому розв'язок її однозначний.

Для круглої пластинки радіуса R , навантаженої зосередженою силою в довільній точці $R\zeta_0$, розв'язок задачі матиме вигляд

$$W=\frac{PR^2}{16\pi D}\Big\{(\zeta-\zeta_0)(\bar\zeta-\bar\zeta_0)\ln\frac{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\bar\zeta_0)}{(1-\zeta\bar\zeta_0)(1-\bar\zeta\zeta_0)}+(1-\rho_0^2)(1-\rho^2)\Big[1+$$

$$+2\,\frac{1+\nu+(1-\nu)(\delta+\delta_3)}{(\delta_1+1+\nu)[1+\nu+(1-\nu)(\delta+\delta_3)]+12\lambda^2(1-\nu^2)(\delta+\delta_3)}+$$

$$+4\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(k^2-1)[(3-\nu)\delta k^2+2k+1-\nu]\delta_3+(2k+1-\nu)\delta+1+\nu\Big\}\frac{Re(\bar\zeta_0\zeta)^k}{J_k}\Big]\Big\};$$

$$U=-\frac{PR^2}{16\pi D}\lambda\mu h(1-\rho_0^2)\Big\{\frac{(1+\nu)(\delta+\delta_3)(1-\rho^2)}{(\delta_1+1+\nu)[1+\nu+(1-\nu)(\delta+\delta_3)]+12\lambda^2(1-\nu^2)(\delta+\delta_3)}+$$

$$+2(1+\nu)(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}[(k^2-1)(k^2\delta+k-1)+\delta]\frac{Re(\bar\zeta_0\zeta)^k}{J_k}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-1)(k^2\delta+k-1)\,\delta_3\,\frac{Re(\bar\zeta_0\zeta)^k}{J_k};$$

де

$$J_k=-\frac{1+\nu}{2}J_k^*;\quad \rho_0=|\zeta_0|;\quad \rho=|\zeta|.$$

Прийнявши $\lambda=0$, дістанемо розв'язок задачі про згин пластинки, підкріпленої симетричним ребром жорсткості [5]. При $\delta_2=\delta_3=0$ розв'язок задачі збігається з [3], де використовувались пом'якшені граничні умови.

На рис. 1,2 показані залежності прогину під силою від жорсткості δ_1 для різних λ. Вважалося, що ребро прямокутного поперечного перерізу ширини b і висоти h_1 і прийнято $\frac{b}{R}=\frac{1}{20}$, $\frac{b}{h}=1$, $\frac{h_1}{h}=3$, $\nu=0{,}3$. Жорсткості δ, δ_2 і δ_3 визначалися відповідно через δ_1. Для порівняння наведено цю ж залежність (пунктиром) при пом'якшених граничних умовах.

Для безмежної пластинки з круговим отвором радіуса R, навантаженої зосередженою силою в довільній точці $R\zeta_0$, розв'язок одержуємо у вигляді

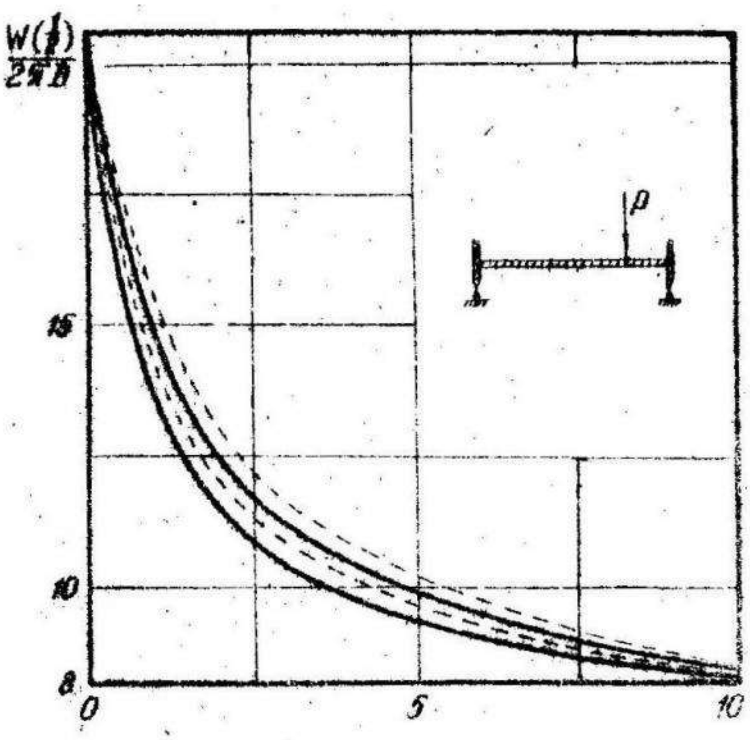

Рис.1

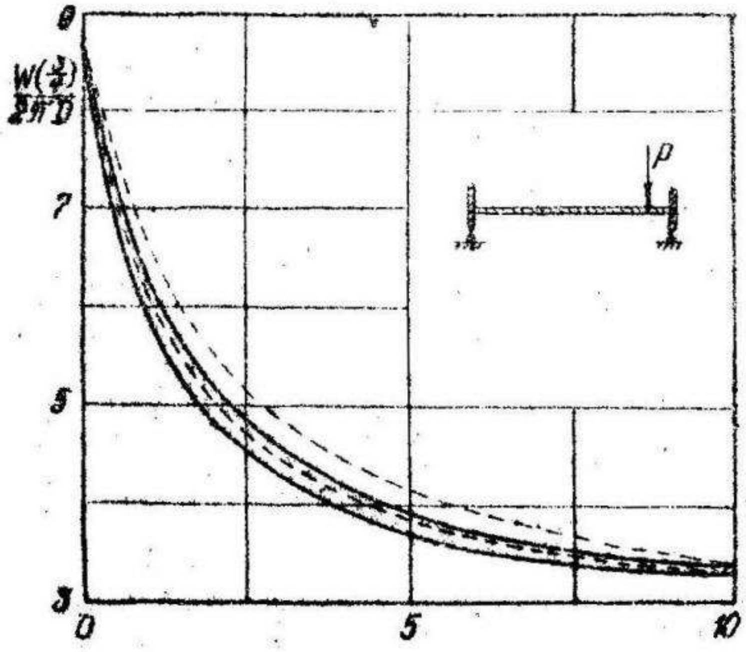

Рис.2

$$W=\frac{PR^2}{16\pi D}\Big\{(\zeta-\zeta_0)(\bar\zeta-\bar\zeta_0)\ln\frac{(\zeta-\zeta_0)(\bar\zeta-\bar\zeta_0)}{(1-\zeta\bar\zeta_0)(1-\bar\zeta\zeta_0)}+2\ln(\rho_0)\cdot(\rho^2-1)+$$

$$+2\Big[\rho_0^2-1-2\frac{(\delta_1-1-\nu)(1+\delta_2+\delta_3)+12\lambda^2(1-\nu)(\delta_2+\delta_3)}{(\delta_1+1-\nu)(1+\delta_2+\delta_3)+12\lambda^2(1-\nu)(\delta_2+\delta_3)}\ln(\rho_0)\cdot\ln\rho+$$

$$+4(1-\rho_0^2)(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(k^2-1)\big[(3-\nu)k^2\delta_2+2k+1-\nu\big]\delta_3+(2k-1+\nu)\delta_2+(1+\nu)\Big\}\frac{\mathrm{Re}(\bar\zeta_0\zeta)^{-k}}{J_k};$$

$$U=\frac{PR^2}{2\pi D}\mu h\lambda\Big\{\frac{2(\delta_2+\delta_3)\ln(\rho_0)}{(\delta_1+1-\nu)(1+\delta_2+\delta_3)+12\lambda^2(1-\nu)(\delta_2+\delta_3)}\ln\rho+$$

$$+(1+\nu)(1-\rho_0^2)(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}\big[\delta_2-(k^2-1)(k^2\delta_2+k+1)\delta_3\big]\frac{\mathrm{Re}(\bar\zeta_0\zeta)^{-k}}{J_k}+$$

$$+2(1-\rho_0^2)\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-1)(2k\delta_2+1+\nu)\delta_3\frac{\mathrm{Re}(\bar\zeta_0\zeta)^{-k}}{J_k}\Big\};$$

де $$J_k=-\frac{1+\nu}{2}J_k^*;\quad \rho_0=|\zeta_0|;\quad \rho=|\zeta|.$$

Прийнявши $\lambda=0$, дістанемо $U\equiv 0$, а W дає прогин пластинки з симетричним ребром жорсткості [5]. Якщо ж прийняти $\delta_2=\delta_3=0$, то матимемо розв'язок задачі при пом'якшених граничних умовах [3].

На рис. 3,4 побудовані графіки залежності прогину під силою від жорсткості на згин δ_1 і ексцентриситету λ. Для порівняння наведені ті ж графіки при пом'якшених граничних умовах.

Графіки рис. 1,2,3,4 наочно демонструють вплив жорсткостей δ_2 і δ_3 на прогин під силою. Як і слід було чекати, з наближенням сили до границі пластинки зростає вплив цих жорсткостей на прогин.

Література

1. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

2. О щ и п к о Л. Й. Равновесие пластин с симметричными и несимметричными упругими ребрами. Автореферат канд. дисс. Львов, 1971.

3. О щ и п к о Л. Й. Упругое равновесие пластинки, опертой по несимметричному ребру жесткости. - "Динамика и прочность машин", 1972, № 15.

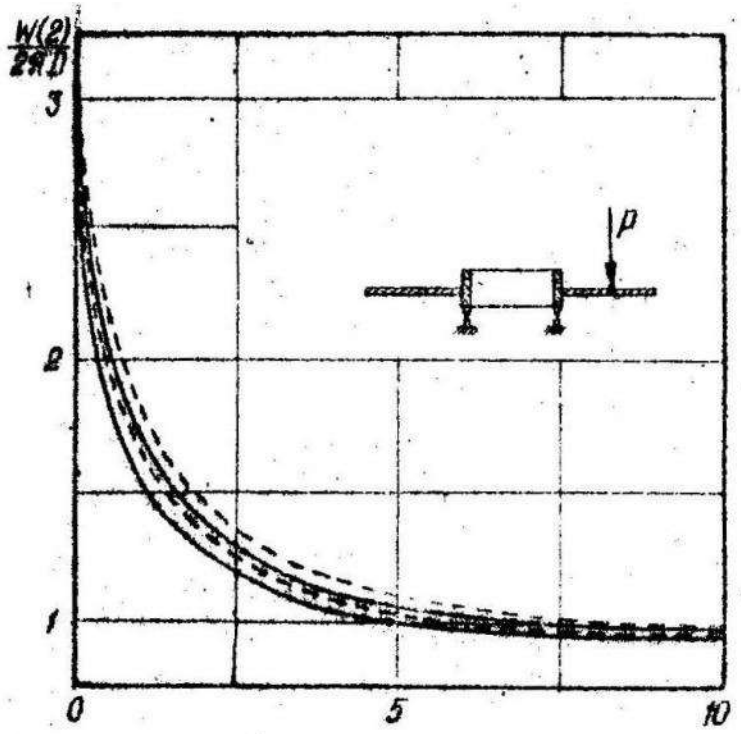

Рис.3

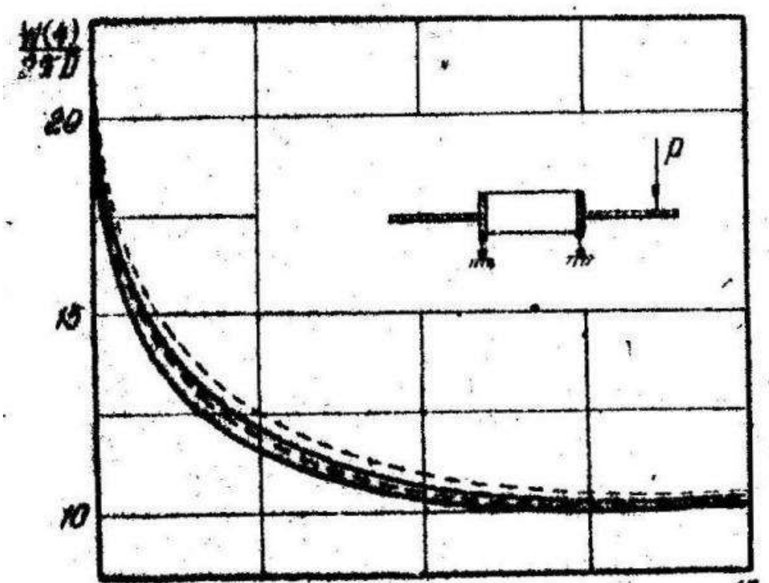

Рис.4

4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., "Наукова думка", 1964,

5. Флейшман Н. П., Ощипко Л. Й. Произвольный изгиб тонкой плиты с круглым опорным кольцом. - "Прикладная математика", 1966, т. II, вып. 4.

6. Хведелидзе Б. В. Об одной линейной граничной задаче Римана для системы аналитических функций. - "Сообщения АН Груз.ССР", 1943, т. IV.

УДК 539.370

В.М.Косарчин

ДО ЗАДАЧІ ПРО КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ

Задача про пружне кручення призматичного стержня зводиться [2] до знаходження функції $\Phi(x,y)$, яка в області поперечного перерізу стержня Ω задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-2 \tag{1}$$

і на її границі S умову

$$\Phi|_S=0 . \tag{2}$$

Нехай область поперечного перерізу стержня обмежена прямими $x=\pm\alpha$, $y=\pm\beta$ і дугами деяких кривих $S_1, S_2, \ldots, S_N$, заданих параметрично

$$x^i=x^i(t),\quad y^i=y^i(t)\quad (i=1,2,\ldots,N).$$

Розв'язок задачі (1), (2) для випадку прямокутної області $-\alpha\le x\le\alpha,\ -\beta\le y\le\beta$ записуємо у вигляді Нав'є

$$\Phi_0=-\sum_{l,m=1,2\ldots}\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma_{lm}}{\pi^2(l^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right),$$

де γ_{lm} - коефіцієнти розкладу правої частини рівняння (1):

$$-2=\sum_{lm}\gamma_{lm}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right)$$