4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., "Наукова думка", 1964.

5. Флейшман Н. П., Ощипко Л. И. Произвольный изгиб тонкой плиты с круглым опорным кольцом. - "Прикладная математика", 1966, т. II, вып. 4.

6. Хведелидзе Б. В. Об одной линейной граничной задаче Римана для системы аналитических функций. - "Сообщения АН Груз.ССР", 1943, т. IУ.

---

УДК 539.370

В.М.Косарчин

# ДО ЗАДАЧІ ПРО КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ

Задача про пружне кручення призматичного стержня зводиться [2] до знаходження функції $\Phi(x,y)$, яка в області поперечного перерізу стержня $\Omega$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-2 \tag{1}$$

і на її границі $S$ умову

$$\Phi|_S=0. \tag{2}$$

Нехай область поперечного перерізу стержня обмежена прямими $x=\pm\alpha$, $y=\pm\beta$ і дугами деяких кривих $S_1, S_2, \ldots, S_N$, заданих параметрично

$$x^i=x^i(t),\quad y^i=y^i(t)\quad (i=1,2,\ldots,N).$$

Розв'язок задачі (1), (2) для випадку прямокутної області $-\alpha\le x\le\alpha$, $-\beta\le y\le\beta$ записуємо у вигляді Нав'е

$$\Phi_0=-\sum_{l,m=1,2\ldots}\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma_{lm}}{\pi^2(l^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right),$$

де $\gamma_{lm}$ - коефіцієнти розкладу правої частини рівняння (1):

$$-2=\sum_{lm}\gamma_{lm}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right)$$

Розв'язок задачі (1), (2) у випадку області, обмеженої ще й дугами кривих, зображаємо аналогічно введеному в [1] потенціалом

$$\Phi(x,y)=\Phi_0(x,y)-\int_S g_0(x,y;\xi,\eta)\,\mu(\xi,\eta)\,dS, \tag{3}$$

де $$g_0(x,y,\xi,\eta)=-\sum_{\ell m}\frac{4\alpha\beta}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{\xi}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\eta}{\beta}+1\right)$$

функція Гріна і $\mu(\xi,\eta)$ – довільна густина.

Функція (3) є розв'язком рівняння (1), оскільки

$\Delta\Phi_0(x,y)=-2$ і $\Delta_{xy}\,g_0(x,y;\xi,\eta)=0$.

Позначивши через $\mu^k(\tau)$, значення густини потенціалу на кривій з індексом $k$ запишемо (3) так

$$\Phi(x,y)=\Phi_0(x,y)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell m}\int_0^{2\pi}\frac{4\alpha\beta}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right)\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{\xi^k(\tau)}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\eta^k(\tau)}{\beta}+1\right)\cdot \tag{4}$$

$$\cdot\mu^k(\tau)\,d\tau.$$

Здійснюючи граничний перехід до контура $S_k(x\to\xi^k,\ y\to\eta^k)$ і враховуючи умову $\Phi(x,y)|_S=0$, отримуємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомої густини потенціалу

$$-\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi}g_0(x^n(t),y^n(t);\xi^k(\tau),\eta^k(\tau))\,\mu^k(\tau)\,d\tau=\Phi_0(x^n(t),y^n(t)), \tag{5}$$
$$(n=1,2,\dots,N).$$

Наближений розв'язок цієї системи рівнянь можна одержати таким способом.

Нехай

$$\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{x^n(t)}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y^n(t)}{\beta}+1\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{p=0,1,\dots}\left(P^{1n}_{\ell mp}\cos pt+P^{2n}_{\ell mp}\sin pt\right),$$

$$\Phi_0\left(x^n(t), y^n(t)\right) = \sum_{p=0,1,\dots} \left(f_p^{1n} \cos pt + f_p^{2n} \sin pt\right),$$

$$\mu^k(t) = \sum_p \left(\mu_p^{1k} \cos pt + \mu_p^{2k} \sin pt\right).$$

Підставляючи ці розклади в (5), дістаємо

$$\sum_p \left(f_p^{1n} \cos pt + f_p^{2n} \sin pt\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} \sum_{lm} \frac{4\alpha\beta}{\pi^2(l^2\beta^2 + m^2\alpha^2)} \sum_p P_{emp}^{1n} \cos pt + P_{emp}^{2n} \sin pt.$$

Умова тотожного виконання цієї рівності приводить до безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\mu_r^{1k}, \mu_r^{2k}$

$$-\sum_{k=1}^{N} \sum_{lmr} \frac{4\alpha\beta P_{emp}^{1n} P_{emr}^{1k}}{\pi^2(l^2\beta^2 + m^2\alpha^2)} \mu_r^{1k} - \sum_{k=1}^{N} \sum_{lmr} \frac{4\alpha\beta P_{emp}^{1n} P_{emr}^{2k}}{\pi^2(l^2\beta^2 + m^2\alpha^2)} \mu_r^{2k} = f_p^{1n},$$

$$-\sum_{k=1}^{N} \sum_{lmr} \frac{4\alpha\beta P_{emp}^{2n} P_{emr}^{1k}}{\pi^2(l^2\beta^2 + m^2\alpha^2)} \mu_r^{1k} - \sum_{k=1}^{N} \sum_{lmr} \frac{4\alpha\beta P_{emp}^{2n} P_{emr}^{2k}}{\pi^2(l^2\beta^2 + m^2\alpha^2)} \mu_r^{2k} = f_p^{2n}$$

Підставляючи знайдені $\mu_p^{1k}$, $\mu_p^{2k}$ в (4), одержуємо остаточно

$$\Phi(x,y) = \sum_{lm} \left\{ -\frac{4\alpha^2\beta^2 \gamma_{lm}}{\pi^2(l^2\beta^2 + m^2\alpha^2)} + \frac{4\alpha\beta}{\pi^2(l^2\beta^2 + m^2\alpha^2)} \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{\infty} \left(P_{emp}^{1k} \mu_p^{1k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + P_{emp}^{2k} \mu_p^{2k}\right)\right\} \sin \frac{l\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha} + 1\right) \sin \frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta} + 1\right).$$

## Література


1. Гавеля С. П., Косарчин В. М. Пружна рівновага пологої сферичної оболонки, обмеженої еліпсом і прямокутником. - "Збірник робіт аспірантів. Природничі науки". Вид-во Львівського ун-ту, 1963.

2. Ляв А. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.