УДК 517.56/.8

М.А.Рудь

МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ $\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$

Існує багато формул [2,3,5,7,8], які зображають ψ -функцію або у вигляді інтеграла, або у вигляді ряду. Але внаслідок повільної збіжності інтегралів і рядів ні одна з цих формул не придатна для обчислення значень цієї функції.

Одним з таких рядів є

$$\psi(x)=-C-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right), \tag{1}$$

де C - постійна Ейлера. Цей ряд хоч і непогано збіжний, але для обчислення значення $\psi(x)$ за його допомогою потрібно було б взяти багато доданків, а це значно зменшило б точність обчислення. Однак він дає можливість вивести для $\psi(x)$ при $x>0$ вираз, який дозволяє врахуванням лише небагатьох доданків обчислити значення $\psi(x)$ з будь-якою точністю.

Для цього ряд справа у виразі (1) розділимо на дві частини

$$\psi(x)=-C-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)+\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right). \tag{2}$$

Для другої частини суми на основі співвідношення Ейлера-Маклорена між сумою та інтегралом [1,4] одержуємо такий вираз

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)=\ln\frac{x+N}{N}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{x+N}\right)+ \\ +\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{N^{2k}}-\frac{1}{(x+N)^{2k}}\right)-r_{2p}(N,x), \tag{3}$$

де B_{2k} - числа Бернулі [2,6]; $r_{2p}(N,x)$ - лишок ряду

$$r_{2p}(N,x)=(2p+2)!\int_0^1 P_{2p+2}(\xi)\left[\zeta(2p+3,N+\xi)-\zeta(2p+3,x+N+\xi)\right]d\xi,$$

де $P_i(t)$ - поліном Бернулі; $\zeta(m,a)$ - узагальнена дзета-функція Рімана.

Підставляючи значення лівої частини виразу (3) в (2), одержуємо

$$\psi(x) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x}{n(x+n)} + \ln\frac{x+N}{N} + \frac{1}{2}\frac{x}{N(x+N)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{N^{2k}} - \frac{1}{(x+N)^{2k}}\right) - r_{2p}(N,x). \qquad (4)$$

Щоб спростити (4), знайдемо зручний вираз для постійної Ейлера. Одна з формул, яка виражає значення C [2] є

$$C = \lim_{s \to 1+0}\left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right]. \qquad (5)$$

Для дзета-функції Рімана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

на основі співвідношення Ейлера-Маклорена одержуємо вираз

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{2N^s} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{N^{s-1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{s(s+1)\ldots(s+2k-2)}{N^{s+2k-1}} - r'_{2p}(N,s), \qquad (6)$$

де лишок ряду

$$r'_{2p}(N,s) = s(s+1)\ldots(s+2p+1)\int_0^1 P_{2p+2}(\xi)\zeta(s+2p+2, N+\xi)\,d\xi$$

Підстановка (6) в (5) і перехід до границі дає

$$C = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2N} - \ln N + \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2k}\frac{1}{N^{2k}} - r'_{2p}(N,1). \qquad (7)$$

Підставляючи значення C в (7) у (4) і проводячи спрощення, маємо

$$\psi(x) = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{x+n} + \ln(x+N) - \frac{1}{2}\frac{1}{x+N} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2k}\cdot\frac{1}{(x+N)^{2k}} +$$

$$+ R_{2p}(N,x); \qquad x > 0, \qquad (8)$$

де $R_{2p}(N,x) = (2p+2)!\int_0^1 P_{2p+2}(\xi)\zeta(2p+3, x+N+\xi)\,d\xi$

Для обчислення $\psi(x)$ при $x < 0$ скористаємось такими функціональними співвідношеннями [2,3,8]:

$$\left.\begin{aligned}\psi(1-x)&=\psi(x)+\pi\,ctg\,\pi x;\\ \psi(t+1)&=\psi(t)+\frac{1}{t}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Звідси при $x<0$ маємо

$$\psi(-t)=\psi(t)+\frac{1}{t}+\pi\,ctg\,\pi t, \quad t=|x|. \tag{10}$$

Отже, для обчислення значень ψ -функції маємо такий алгоритм:

$$\psi(x)=\begin{cases}\Phi(t)-\frac{1}{t}; & t=x;\ x>0;\\ \Phi(t)+\pi\,ctg\,\pi t; & t=|x|;\ x\leq 0\end{cases}, \tag{11}$$

де

$$\Phi(t)=\ln(t+N)-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{t+n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+N}-$$

$$-\sum_{k=1}^{P}\frac{B_{2k}}{2k}\,\frac{1}{(t+N)^{2k}}+R_{2p}(N,t);\quad t\geq 0. \tag{12}$$

Формули (II) і (I2) дають можливість обчислювати з будь-якою точністю значення $\psi(x)$ при будь-якому дійсному x. Для цього лише потрібно вибрати оптимальні значення N і p.

З цією метою ми досліджували обчислення $\Phi(t)$ на ЕОМ "Минск-22". При $t=0$ вираз (I2) дає від'ємне значення постійної Ейлера. Очевидно, що при $t=0$ друга сума в (I2) гірше збіжна ніж при $t\neq 0$, тому досліджували обчислення виразу для $\Phi(0)$.

При кожному фіксованому значенні $N=4(1)18$ обчислювали з 32 десятковими знаками після коми значення $\Phi(0)$ для кожного з $p=1(1)N+10$. Аналіз результатів показав, що для обчислення значення $\Phi(0)$ з τ десятковими знаками після коми доцільно прийняти $N=\left[\frac{\tau+2}{2}\right]$ і $p=[1{,}06\tau+0{,}30]-\left[\frac{\tau+2}{2}\right]$, де $[y]$ ціла частина числа y. Це означає, що при вибраних значеннях N і p $\Phi(0)$, а отже і $\psi(x)$, обчислюється з потрібною точністю врахуванням лише мінімально необхідної кількості доданків.

Нижче наводимо значення перших 18 коефіцієнтів $B_{2k}/2k$, які дають можливість обчислювати значення ψ -функції з точністю в $\tau=4(1)33$ десяткових знаків після коми.

K	$B_{2k}/2k$	K	$B_{2k}/2k$
1	1:12	10	-174611:6600
2	-1:120	11	77683:276
3	1:252	12	-236364091:65520
4	-1:240	13	657931:12
5	1:132	14	-3392780147:3480
6	-691:32760	15	172 3168255201:85932
7	1:12	16	-770 9321041217:16320
8	-3617:8160	17	15 1628697551:12
9	43867:14364	18	-2631527155 3053477373:69090840

Литература

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., "Наука", 1966.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
3. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М., ИЛ, 1963.
4. Крылов В. И. Приближенные вычисления интегралов. М., "Наука", 1967.
5. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М., "Высшая школа", 1965.
6. Петерс И., Штейн И. Математические таблицы. М., 1965.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М.-Л., Гостехиздат, 1957.
8. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., "Наука", 1968.