УДК 517.946

Є.М.Парасюк, П.С.Сеньо

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Розглянемо задачу про відтворення овала, який на колі радіуса $R = 3,5$ з центром в початку координат індукує потенціал простого шару

$$f(\theta) = 2,4188 \sin\theta + 0,4572 \sin 3\theta + 0,1791 \sin 5\theta.$$

Припускаємо, що густина потенціалу кусково-стала

$$\mu(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 < \varphi < \pi, \\ -1, & -\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

як показано в [1], ця задача зводиться до розв'язання інтегро-диференціального рівняння I-го роду

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \ln\left[R^2 + r^2(\varphi) - 2Rr(\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right]\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi = f(\theta), \quad (1)$$

яке, в свою чергу, користуючись методом редукції, можна звести до системи трансцендентних рівнянь вигляду

$$g_k(r_0, r_1, r_2) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \quad (2)$$

де

$$g_k(r_0, r_1, r_2) = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\left[\frac{r(\varphi)}{R}\right]^{2k+1} \sin(2k+1)\varphi\, d\varphi - f_{2k+1},$$

$$r(\varphi) = r_0 + r_1\cos 2\varphi + r_2 \cos 4\varphi,$$

а числа f_{2k+1} - відповідні коефіцієнти при $\sin(2k+1)\theta$ у виразу для функції $f(\theta)$.

Далі система (2) розв'язується за методом найскорішого спуску за схемою

$$r_k^{(n)} = r_k^{(n-1)} - \alpha\rho_k^{(n-1)}, \quad k = 0, 1, 2; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (3)$$

Тут числа $\rho_k^{(n)}$ складають розв'язок лінійної алгебраїчної системи

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial g_k(r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, r_2^{(n)})}{\partial r_i}\rho_i^{(n)} = g_k(r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, r_2^{(n)}), \quad (4)$$

$$k = 0, 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а число α підбирається так, щоб

$$\sum_{k=0}^{2} g_k^2(r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, r_2^{(n)}) > \sum_{k=0}^{2} g_k^2(r_0^{(n)}-\alpha\rho_0^{(n)}, r_1^{(n)}-\alpha\rho_1^{(n)}, r_2^{(n)}-\alpha\rho_2^{(n)}).$$

Дана задача розв'язувалась на машині "Минск-22". При цьому як нульове наближення, на відміну від [1] і [2], вибирали коло $x^2+y^2=4$. Як виявилось, досить було виконати всього п'ять ітерацій, щоб одержати точний розв'язок вказаної задачі. Одержані наближення мали вигляд:

$$r_1(\varphi) = 1,8475 + 0,4886\cos 2\varphi + 0,3022\cos 4\varphi,$$

$$r_2(\varphi) = 1,4459 + 0,8248\cos 2\varphi + 0,6429\cos 4\varphi,$$

$$r_3(\varphi) = 1,0011 + 1,0364\cos 2\varphi + 0,9681\cos 4\varphi,$$

$$r_4(\varphi) = 1 + 0,9987\cos 2\varphi + 1,0017\cos 4\varphi,$$

$$r_5(\varphi) = 1 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi .$$

Зауважимо, що всі наближення, крім першого, були одержані при $\alpha=1$. Для першого наближення $\alpha = \frac{1}{2}$. Цей приклад ще раз підтверджує, що метод, запропонований в [1], можна здійснювати при досить грубому нульовому наближенні.

Література

1. Параснюк В. Н. и др. . Об одном методе решения обратной задачи теории потенциала. - "Физика Земли", 1972, № 11.

2. Параснюк Є. М., Кардаш А. І. Одна чисельна реалізація розв'язку оберненої задачі теорії логарифмічного потенціалу простого шару. - "Вісник Львівського ун-ту" сер. мех.-мат.", 1973, вип. 8.