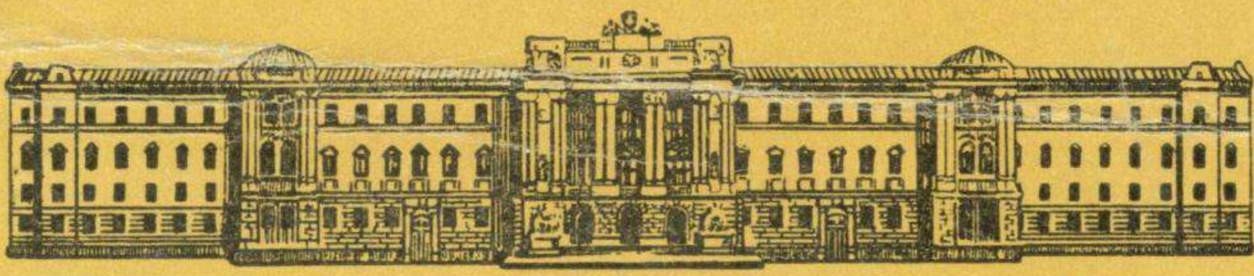

ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 9

1974

«ВИЩА ШКОЛА»

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Випуск 9

ВИДАВНИЧЕ ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
Львів — 1974

УДК 513

У збірнику вміщені статті з теорії функцій, теорії ймовірностей, диференціальних та інтегральних рівнянь, функціонального аналізу, геометрії і теорії пружності.

Роботи розраховані на наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

Л $\frac{20200-079}{М225(04)-74}$

УДК 517.946

Г.П.Бойко

ЗОВНІШНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ І НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

У роботах [2], [3] розглянуто зовнішні узагальнені задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в просторі R^3. Задачі узагальнені в тому сенсі, що їх розв'язки набувають узагальнених граничних значень. Доведено теореми про зображення розв'язків задач, теореми единості.

Ми розглядаемо зовнішні узагальнені (в тому ж сенсі) задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в R^n.

1. Нехай Ω – область в R^n, розміщена зовні замкненої поверхні S класу C^∞; $\nu(y)$ – одиничний вектор зовнішньої до S нормалі $n(y)$ в точці $y \in S$; S_ε – поверхня, паралельна до S і перебуває на віддалі ε від неї, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$; $D(S)$ – простір нескінченно диференційованих (основних) функцій на S; $D'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ (простір узагальнених функцій). Через $A[\varphi]$ позначаемо дію узагальненої функції A на основну функцію φ. Вважаемо, що початок координат перебуває всередині поверхні S. Основну функцію $\varphi(y)$, визначену на S, продовжимо таким чином:

$$\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x_\varepsilon = y + \varepsilon \nu(y), \quad y \in S.$$

2. Спочатку розглянемо випадок $n \geq 3$.

Зовнішня узагальнена задача Діріхле. Нехай $F \in D'(S)$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняе умови:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\, \varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = F[\varphi] \tag{1}$$

для кожної

$$\varphi \in D(S), \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \tag{2}$$

Зовнішня узагальнена задача Неймана. Нехай $B \in D'(S)$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = B[\varphi] \tag{3}$$

для кожної $\varphi \in D(S)$,

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \tag{4}$$

Позначимо через $\omega(x,y)$ фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в R^n,

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |x-y|^{n-2}}, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log|x-y|, & n = 2, \end{cases}$$

де σ_n – площа поверхні одиничної сфери в R^n.

На основі властивостей узагальнених функцій легко довести леми.

Лема 1. Перетворення, задане співвідношенням

$$G[g] = F[\varphi_g], \tag{5}$$

де $g \in D(S)$; φ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\, dS_x = g(y) - C_g, \tag{6}$$

$$C_g = \frac{1}{\Sigma} \int_S g(y)\, dS_y;$$

Σ – площа поверхні S, є ізоморфізм просторів $V'(S) = \{V \in D'(S) : V[\varphi_0] = 0\}$ і $W'(S) = \{W \in D'(S) : W[1] = 0\}$.

Обернене перетворення визначається співвідношенням

$$F[\varphi] = G\left[\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\, dS_x\right] \tag{7}$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Л е м а 2. Перетворення, задане співвідношенням

$$H[g] = B[\psi_g], \tag{8}$$

де $g \in D(S)$, ψ_g - розв'язок інтегрального рівняння

$$-\psi(y) + 2\int_S \psi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(y,x) dS_x = g(y), \tag{9}$$

є ізоморфізм простору $D'(S)$ на себе. Обернене перетворення визначається таким чином:

$$B[\psi] = H[-\psi(y) + 2\int_S \psi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(y,x) dS_x] \tag{10}$$

для кожної $\psi \in D(S)$.

Згідно з лемами 1,2 для відповідних задач Діріхле і Неймана мають місце такі результати.

Т е о р е м а 1. Нехай $F \in V'(S)$, узагальнена функція G визначена з формул (5), (6), тоді функція

$$u(x) = 2G[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)], \quad x \in \Omega, \ y \in S \tag{11}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Т е о р е м а 2. Нехай $F \in D'(S)$,

$$G[g] = F[\varphi_g] - F[\varphi_o^*]\int_S \varphi_g(t)\omega_o(t) dS_t, \tag{12}$$

де $g \in D(S)$, φ_g - розв'язок інтегрального рівняння (6),

$$\omega_o(t) = |t|^{2-n}, \qquad \varphi_o^*(y) = \frac{\varphi_o(y)}{\int_S \varphi_o(t)\omega_o(t) dS_t},$$

тоді функція

$$u(x) = 2G[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)] + F[\varphi_o^*]\, \omega_o(x), \ x \in \Omega, \ y \in S \tag{13}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Т е о р е м а 3. Нехай $B \in D'(S)$, узагальнена функція H визначена з формул (8), (9), тоді функція

$$v(x) = 2H[\omega(x,y)], \quad x \in \Omega, \ y \in S \tag{14}$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Т е о р е м а 4. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле єдиний.

Т е о р е м а 5. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Неймана єдиний.

Доведення теорем 4 і 5 проводиться так само, як доведення теореми 2 із [2].

3. У випадку $n = 2$ в постановці зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана умови (2) і (4) замінюємо умовою обмеженості розв'язку на безмежності.

Справедливі такі твердження.

Т е о р е м а 6. Нехай $F \in D'(S)$,

$$G[g] = F[\varphi_g] - F[\tilde{\varphi}_0] \int_S \varphi_g(t)\, dS_t,$$

де $g \in D(S)$, φ_g - розв'язок інтегрального рівняння

$$-\pi\varphi(\zeta) + \int_S \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z-\zeta|\, dS_z = g(\zeta) - C'_g,$$

$$C'_g = \frac{1}{\Sigma} \int_S g(\zeta)\, dS_\zeta, \qquad \tilde{\varphi}_0(\zeta) = \frac{\varphi_0(\zeta)}{\int_S \varphi_0(t)\, dS_t},$$

тоді функція

$$u(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z-\zeta|\right] + F[\tilde{\varphi}_0], \quad z \in \Omega, \ \zeta \in S$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле.

Т е о р е м а 7. Нехай $B \in B'(S)$,

$$H[g_0] = B[\psi_g],$$

де $g \in D(S)$, ψ_g - розв'язок інтегрального рівняння

$$\pi\psi(\zeta) + \int_S \psi(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z-\zeta|\, dS_z = g(\zeta),$$

тоді функція

$$v(z) = H[\log|z-\zeta|] + \text{const}, \qquad z \in \Omega,\ \zeta \in S$$

є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Т е о р е м а 8. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле єдиний. Розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Неймана єдиний з точністю до довільної адитивної константи.

Одержані результати переносяться на випадок лінійного диференціального рівняння другого порядку з нескінченно диференційованими коефіцієнтами.

Л і т е р а т у р а

1. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
2. Г у п а л о Г. С., Ф е д а к-Ш а б а т І. Г. Зовнішня узагальнена задача Діріхле. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.
3. Г у п а л о Г. С., Я к о б ч у к О. А. Зовнішня узагальнена задача Неймана. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

УДК 517.946

Г.П.Бойко

ПРО ЗВ'ЯЗОК ЗОВНІШНІХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ І НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

У [5] розглядаються узагальнені задачі Діріхле, Неймана, Амеріо для рівняння Лапласа в обмеженій області на площині. Встановлюється зв'язок між розв'язками задач Діріхле та Неймана. Доводиться, що розв'язок узагальненої задачі Діріхле є розв'язком деякої узагальненої задачі Неймана і навпаки.

Ми встановлюємо зв'язок між розв'язками зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в R^n, а також розглядаємо зовнішню узагальнену задачу Амеріо, використовуючи основні позначення і постановки задач, введені в [4]. Розглядаємо випадок $n \geq 3$, хоч результати переносяться і на випадок $n=2$.

Теорема 1. Нехай $F \in D'(S)$,

$$M[p] = 2G\Big[\frac{\partial}{\partial n_y} v_p(y)\Big] + F[\varphi_o^*]\int_S p(t)\frac{\partial \omega_o(t)}{\partial n_t} dS_t \tag{1}$$

для кожної $p \in D(S)$, узагальнена функція G, функція $\varphi_o^*(y)$ визначаються теоремою 2 [4].

$$v_p(y) = \int_S p(t)\frac{\partial}{\partial n_t}\omega(t,y)dS_t, \quad \omega_o(t) = |t|^{2-n} \tag{2}$$

Якщо функція $u(x)$ є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле, то вона задовольняє таку умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\varphi(x_\varepsilon)dS_\varepsilon = M[\varphi] \tag{3}$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Із леми 1 [4] та (1), (2) випливає, що

$$M[p] = F\Big[\tilde\varphi_p(y) + \varphi_o^*(y)\Big(\int_S \tilde\varphi_p(t)\frac{\partial \omega_o(t)}{\partial n_t}dS_t - \int_S \tilde\varphi_p(t)\omega_o(t)dS_t\Big)\Big] \tag{4}$$

для кожної $p \in D(S)$, де $\tilde\varphi_p$ - розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)dS_x = 2\frac{\partial}{\partial n_y}v_p(y). \tag{5}$$

Висновок 1. Якщо гармонійна в області Ω функція $u(x)$ набуває на S узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$, то її нормальна похідна набирає узагальнених граничних значень $M \in D'(S)$ (узагальнена функція M визначається згідно з формулами (4), (5)). При цьому, якщо $F \in V'(S)$, то $M \in W'(S)$.

Теорема 2. Нехай $B \in D'(S)$,

$$K[p] = 2H\Big[\int_S p(x)\omega(x,y)dS_x\Big] \tag{6}$$

для кожної $p \in D(S)$, узагальнена функція H визначається лемою 2 з [4]. Якщо функція $v(x)$ є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана, то вона задовольняє також умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} v(x_\varepsilon)\, \psi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = K[\psi] \tag{7}$$

для кожної $\psi \in D(S)$.

Зауважимо, що згідно з лемою 2 із [4] і (6),

$$K[p] = B[\widetilde{\psi}_p] \tag{8}$$

для кожної $p \in D(S)$, де $\widetilde{\psi}_p$ – розв'язок інтегрального рівняння

$$-\psi(y) + 2\int_S \psi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \omega(y,x)\, dS_x = 2\int_S p(x)\, \omega(x,y)\, dS_x . \tag{9}$$

В и с н о в о к 2. Якщо нормальна похідне гармонійної в області Ω функції $v(x)$ набуває на S узагальнених граничних значень $B \in D'(S)$, то сама функція $v(x)$ набуває узагальнених граничних значень $K \in D'(S)$ (узагальнена функція K визначається за (8), (9)).

В и с н о в о к 3. Функція (13) із [4] є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле [4], а також розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана при $B \equiv M$. Функція (14) із [4] є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Неймана, а також розв'язком зовнішньої узагальненої задачі Діріхле при $F \equiv K$.

На основі тверджень теорем 1,2 легко довести леми.

Л е м а 1. Для довільної узагальненої функції $H \in D'(S)$ існують узагальнена функція $G \in W'(S)$ і константа L такі, що

$$H[\omega(x,y)] - G\left[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\right] = L\omega_0(x) , \quad x \in \Omega,\ y \in S. \tag{10}$$

Л е м а 2. Для довільної $G \in W'(S)$ існує узагальнена функція $H \in D'(S)$ така, що

$$G\left[\frac{\partial}{\partial n_y} \omega(x,y)\right] = H[\omega(x,y)] , \quad x \in \Omega,\ y \in S. \quad)$$

Назвемо функцію $u(x)=H[\omega(x,y)]$ узагальненим потенціалом типу простого шару, а функцію $u(x)=G[\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)]$ - узагальненим потенціалом типу подвійного шару. Із теореми 2 із [4], теореми I і леми 2 випливає, що розв'язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа зображається як у вигляді узагальненого потенціалу типу подвійного шару, так і у вигляді узагальненого потенціалу типу простого шару. Згідно з теоремою 3 із [4], теоремою 2 і лемою 1 це твердження справедливе також для зовнішньої узагальненої задачі Неймана.

Зовнішня узагальнена задача Амеріо. Нехай F, $B\in D'(S)$. Знайти гармонійну в області Ω функцію $u(x)$, що задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = F[\varphi]\,,\quad \varphi\in D(S)\,, \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = B[\varphi]\,,\quad \varphi\in D(S)\,, \tag{13}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)=0. \tag{14}$$

Теорема 3. Для існування розв'язку зовнішньої узагальненої задачі Амеріо необхідно і досить, щоб

$$B[\omega(x,y)]-F[\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)]=0,\quad x\in\Omega,\ y\in S \tag{15}$$

Якщо умова (15) виконується, то функція

$$u(x)=F[\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)]-B[\omega(x,y)],\ x\in\Omega,\ y\in S \tag{16}$$

є розв'язком задачі (12)-(14).

Доведення. Нехай існує розв'язок задачі (12)-(14). Згідно з теоремою 2 із [4], функція $u(x)=2H[\omega(x,y)],\ x\in\Omega,\ y\in S$, де $H[g]=B[\psi_g]$ для кожної $g\in D(S)$, ψ_g – розв'язок інтегрального рівняння

$$-\psi(y)+2\int_S \psi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\omega(x,y)\,dS_x = g(y),$$

задовольняє умови (13), (14), а за теоремою 2 також і умову (12) при

$F[p]=2H[\int_S p(x)\omega(x,y)\,dS_x]$ для кожної $p\in D(S)$.

Тоді при $x\bar{\in}\Omega$ згідно з формулою Гріна

$$B[\omega(x,y)]-F[\frac{\partial}{\partial n_y}\omega(x,y)]=$$

$$=H[-\omega(x,y)+2\int_S \omega(x,t)\frac{\partial}{\partial n_t}\omega(t,y)\,dS_t-2\int_S \omega(t,y)\frac{\partial}{\partial n_t}\omega(x,t)\,dS_t]=0$$

Перевіркою, використовуючи (15), встановлюємо, що функція (16) задовольняє рівняння Лапласа і умови (12)-(14).

Література

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.

2. Гупало Г. С., Федак-Шабат І. Г. Зовнішня узагальнена задача Діріхле. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

3. Гупало Г. С., Якобчук О. А. Зовнішня узагальнена задача Неймана. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

4. Бойко Г. П. Зовнішні узагальнені задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9.

5. Szmydt Z. Le rapport mutuel des problemes generalises de Dirichlet et de Neumann. - "Ann. Polon. Math.", 1966, w 18.

УДК 517.512

Г.П.Губанов, Б.В.Ковальчук

ПРО ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ЛІПШИЦЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ, ЩО НАЙЛІПШІ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

1. Нехай H^{α} - клас 2π-періодичних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця порядку α $(0<\alpha\leq 1)$

$$|f(t)-f(z)|\leq|t-z|^{\alpha}$$

За допомогою трикутної матриці чисел $\Lambda=\left\{\lambda_i^{(n-1)}\right\}$ ($i=0,1,2\ldots$ $\ldots, n$; $\lambda_0^{(n-1)}=1$; $\lambda_n^{(n-1)}=0$) кожній функції з цього класу поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$T_n(f;x;\Lambda)=\frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{2nq}f(x_k)U_n(\lambda;x_k-x), \tag{1}$$

де

$$U_n(\lambda;t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{(n-1)}\cos it\geqslant 0,\qquad 0\leq t\leq 2\pi,$$

побудованих на основі тригонометричних поліномів (n - 1)-го порядку, найліпших у заданій системі точок $x_k=\frac{k\pi}{nq}$, $k=\overline{1,2nq}$, $q\geqslant 1$.

Якщо $\lambda_i^{(n-1)}=1$, $q=1$, то поліноми (1) перетворюються в тригонометричні поліноми, розглянуті в [1,2], а при $q=1$ одержимо поліноми, які ми вивчали у [3] з іншої точки зору. Асимптотичні вирази верхніх меж відхилень функції $f(x)\in H^{\alpha}$ від тригонометричних поліномів, найліпших у заданій системі рівновіддалених точок $x_K=\frac{K\pi}{n}$, $K=\overline{1,2n}$, одержані в [1-3]. Розглянемо аналогічну задачу для поліномів (1) і наведемо асимптотичні формули для величин

$$E_n(\Lambda;x;\alpha)=\sup_{f(x)\in H^{\alpha}}\left|f(x)-T_n(f;x;\Lambda)\right|, \tag{2}$$

$$E_n(\Lambda;\alpha) = \max_{x\in[0,2\pi]} E_n(\Lambda;x;\alpha). \qquad (3)$$

Т е о р е м а 1. Нехай $u=nqx$, $\lambda_0^{(n-1)}=1$, $\Delta\lambda_i^{(n-1)}=\lambda_i^{(n-1)}-\lambda_{i+1}^{(n-1)}$, $0\le i\le n-1$. Тоді при $0<\alpha<1$

$$E_n(\Lambda;x;\alpha)=\frac{2}{(nq)^\alpha}\sum_{|k\pi-u|\le\pi nq}|k\pi-u|^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{n-2}\Delta\lambda_i^{(n-1)}\sin\frac{2i-1}{2nq}|k\pi-u|+$$

$$+O\left\{\sum_{i=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_i^{(n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+\left|\lambda_{n-1}^{(n-1)}\right|\right\},$$

а при $\alpha=1$

$$E_n(\Lambda;1)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\Delta\lambda_i^{(n-1)}}{i+\frac{1}{2}}+O\left\{\sum_{i=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_i^{(n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-2}|\Delta\lambda_i^{(n-1)}|+\frac{\lambda_{n-1}^{(n-1)}}{n}\right\}.$$

Теорему І можна застосувати для оцінки величин (2) і (3) при наближенні функцій класу Ліпшиця середніми Чезаро, для яких, як відомо,

$$\Lambda=\Lambda(\delta)=\lambda_i^{(n-1)}(\delta)=\begin{cases}\dfrac{A_{n-i-1}^{\delta}}{A_{n-1}^{\delta}} & \text{при } 0\le i\le n-1,\\[2mm] 0 & \text{при } \quad i>n-1,\end{cases}$$

де δ – ціле додатне число, а $A_p^{\delta}=\binom{p+\delta}{p}$.

Дійсно, коли $\delta\geq1$, то ядро

$$U_n^{\delta}(\Lambda;t)=\frac{q_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{(n-1)}(\delta)\cos it$$

невід'ємне і для цілих $\delta\geq1$ (при $\alpha=1$) одержимо

$$E_n(\Lambda(\delta);1)=\frac{2}{\pi}\delta\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

звідки при $\delta = 1$ випливає результат з роботи [2].

Нехай тепер $0 < \alpha < 1$, $\delta \geq 1$. Тоді

$$E_n(\Lambda; x; \alpha) = \frac{2}{(nq)^{\alpha}} \sum_{|k\pi - u| \leq \pi nq} |k\pi - u|^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta\lambda_i^{(n-1)}(\delta) \sin\frac{2i-1}{2nq}|k\pi - u| + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4)$$

Зокрема, при $\delta = 1$ з (4) одержимо

$$E_n(\Lambda(1); \alpha) = C_1(\alpha) n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

де

$$C_1(\alpha) = \frac{4 \cdot 1!}{q^{1-\alpha}} \max_u \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\pi - u|^{\alpha-2} \sin^2\frac{|k\pi - u|}{2q}. \quad (5)$$

Можна також дістати асимптотичні формули для $\delta = 2, 3, 4 \ldots$ Наприклад,

$$E_n(\Lambda(2); \alpha) = C_2(\alpha) n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

де

$$C_2(\alpha) = \frac{4 \cdot 2!}{q^{2-\alpha}} \max_u \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\pi - u|^{\alpha-3} \left\{ \frac{|k\pi - u|}{2q} - \frac{1}{2}\sin\frac{|k\pi - u|}{2q} \right\}. \quad (6)$$

і

$$E_n(\Lambda(3); \alpha) = C_3(\alpha) n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

де

$$C_3(\alpha) = \frac{4 \cdot 3!}{q^{3-\alpha}} \max_u \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\pi - u|^{\alpha-4} \left\{ \frac{|k\pi - u|}{4q^2} - \sin^2\frac{|k\pi - u|}{2q} \right\}. \quad (7)$$

2. Позначимо через $H_1^{(\alpha,\beta)}$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ клас 2π-періодичних відносно x, y функцій $f(x,y)$, що задовольняють нерівність $|f(t; z) - f(x; y)| \leq |t - x|^{\alpha} + |z - y|^{\beta}$. Нехай дана неперервна з періодом 2π відносно x, y функція $f(x,y)$ і нехай задана система точок $(x_k; y_l)$, де

$$x_k = \frac{k\pi}{mp}, \quad k = \overline{1, 2mp}, \quad p \geq 1; \quad y_l = \frac{l\pi}{nq}, \quad l = \overline{1, 2nq}, \quad q \geq 1. \quad (8)$$

За допомогою матриці чисел $\Lambda=\left\{\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}\right\}(0\le i\le m;\ 0\le j\le n;\ \lambda_{0,0}^{(m-1,n-1)}=1,$ $\lambda_{m,0}^{(m-1,n-1)}=\lambda_{0,n}^{(m-1,n-1)}=0)$ кожній функції класу $H_1^{(\alpha,\beta)}$, $0<\alpha,\beta\le 1$ поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$T_{mn}(f;x;y;\Lambda)=\frac{1}{mpnq}\sum_{k=1}^{2mp}\sum_{l=1}^{2nq}f(x_k;y_l)\,U_{mn}(\Lambda;x-x_k;y-y_l), \tag{9}$$

де

$$U_{mn}(\Lambda;t;z)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mu_{i,j}\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}\cos it\cos jz\ge 0,\quad 0\le t,z\le 2\pi,$$

$$\mu_{0,0}=\frac{1}{4},\ \mu_{i,0}=\mu_{0,j}=\frac{1}{2},\ \mu_{i,j}=1,\ \ i>0,\ j>0,$$

...ованих на основі тригонометричних поліномів порядку $(m-1)$ по x і $(n-1)$ по y, найкращих у заданій системі точок (8). При $p=q=1$ з (9) одержимо тригонометричні поліноми, розглянуті нами раніше в роботі [3], а при $\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}=1$, $p=q=1$ (9) перетворюється в тригонометричні поліноми, найкращі у системі точок [4,5]

$$x_k=\frac{k\pi}{m},\ y_l=\frac{l\pi}{n},\ 1\le k\le 2m,\ 1\le l\le 2n.$$

Позначимо

$$E_{mn}(\Lambda;x,y;\alpha,\beta)=\sup_{f\in H_1^{(\alpha,\beta)}}\left|f(x;y)-T_{mn}(f;x;y;\Lambda)\right|, \tag{10}$$

$$E_{mn}(\Lambda;\alpha,\beta)=\max_{x,y\in[0,2\pi]}E_{mn}(\Lambda;x;y;\alpha,\beta). \tag{11}$$

Т е о р е м а 2. Нехай $u=mpx$, $v=nqy$, $\lambda_{0,0}^{(m-1,n-1)}=1$, $\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}=$ $=\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}-\lambda_{i+1,0}^{(m-1,n-1)}$, $0\le i\le m-1$; $\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}=\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}-\lambda_{0,j+1}^{(m-1,n-1)}$, $0\le j\le n-1$.

Тоді при $0<\alpha,\beta<1$

$$E_{mn}(\Lambda;x;y;\alpha,\beta)=\frac{2}{(mp)^{\alpha}}\sum_{|k\pi-u|\le\pi mp}|k\pi-u|^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{m-2}\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}\sin\frac{2i-1}{2mp}|k\pi-u|+$$

$$+\frac{2}{(nq)^{\beta}}\sum_{|\ell\pi-v|\le\pi nq}|\ell\pi-v|^{\beta-1}\sum_{j=0}^{n-2}\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}\sin\frac{2j-1}{2nq}|\ell\pi-v|+$$

$$+O\left\{\sum_{i=0}^{m-2}\frac{|\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+|\lambda_{m-1,0}^{(m-1,n-1)}|\right\}+O\left\{\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}|}{(j+\frac{1}{2})^2}+|\lambda_{0,n-1}^{(m-1,n-1)}|\right\},$$

а при $\alpha=\beta=1$

$$E_{mn}(\Lambda;1;1)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}}{i+\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}}{j+\frac{1}{2}}+O\left\{\sum_{i=0}^{m-2}\frac{|\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}|}{(i+\frac{1}{2})^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-2}|\Delta\lambda_{i,0}^{(m-1,n-1)}|+\frac{\lambda_{m-1,0}^{(m-1,n-1)}}{m}\right\}+O\left\{\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}|}{(j+\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}|\Delta\lambda_{0,j}^{(m-1,n-1)}|+\frac{\lambda_{0,n-1}^{(m-1,n-1)}}{n}\right\}.$$

Застосуємо теорему 2 для оцінки величин (10) і (11) при наближенні функцій класу $H_1^{(\alpha,\beta)}$, $0<\alpha,\beta\le 1$ середніми Чезаро, для яких

$$\Lambda=\Lambda(\delta,\nu)=\lambda_{i,j}^{(m-1,n-1)}(\delta,\nu)=\begin{cases}\dfrac{A_{m-i-1}^{\delta}A_{n-j-1}^{\nu}}{A_{m-1}^{\delta}A_{n-1}^{\nu}} & \text{при } 0\le i\le m-1,\ 0\le j\le n-1,\\[2mm] 0 & \text{при } i>m-1,\ j>n-1,\end{cases}$$

де δ, ν – цілі додатні числа, а $A_p^{z}=\binom{p+z}{p}$.

Якщо $\delta\ge1$, $\nu\ge1$, то ядро $U_{mn}^{\delta\nu}(\Lambda;t;z)$ невід'ємне і для цілих $\delta\ge1$, $\nu\ge1$ (при $\alpha=\beta=1$) одержимо

$$E_{mn}(\Lambda(\delta;\nu);1;1)=\frac{2}{\pi}\delta\frac{\ln m}{m}+\frac{2}{\pi}\nu\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{m}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

звідки при $\delta=\nu=1$ одержимо результат з роботи [2].

Нехай тепер $0<\alpha,\beta<1$, $\delta=\nu=1$. Тоді

$$E_{mn}(\Lambda(1,1);\alpha,\beta)=C_1(\alpha)m^{-\alpha}+C_1(\beta)n^{-\beta}+O(m^{-\alpha})+O(n^{-\beta}),$$

де $C_1(\tau)$ визначається за формулою (5).

Відповідні асимптотичні формули для величин (10) і (11) можна одержати для $\delta = 2,3,4...$; $\nu = 2,3,4...$, наприклад,

$$E_{mn}(\Lambda(2;2);\alpha,\beta) = C_2(\alpha)m^{-\alpha} + C_2(\beta)n^{-\beta} + O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}),$$

$$E_{mn}(\Lambda(3;3);\alpha,\beta) = C_3(\alpha)m^{-\alpha} + C_3(\beta)n^{-\beta} + O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}),$$

де $C_2(\tau)$ і $C_3(\tau)$ визначаються відповідно за формулами (6) і (7).

Література

1. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Асимптотична оцінка залишку при наближенні періодичних функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. – В кн.: Друга наукова конференція молодих математиків України. Київ, "Наукова думка", 1966.

2. Губанов Г. П. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, некоторыми тригонометрическими полиномами. – "Прикладная механика, оборудование и электропривод", 1970, № 3.

3. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1969, вип. 4.

4. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій двох змінних поліномами, найкращими в заданій системі точок. – ДАН УРСР, 1966, № 1.

5. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Приближение функций двух переменных тригонометрическими полиномами в заданной системе точек. – В кн.: Первая республиканская математическая конференция молодых исследователей. Вып. 2. Киев, "Наукова думка", 1965.

УДК 517.512

У.А.Мишковець

ПРО ОДИН КРИТЕРІЙ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР'Є

Тригонометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$, де A_n - комплексні числа; λ_n - довільна послідовність дійсних чисел за умови

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 < \infty \tag{1}$$

являє собою ряд Фур'є деякої майже періодичної функції Безіковича (B^2 - майже періодична функція).

Т е о р е м а. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ є ряд Фур'є B^2 майже періодичної функції. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \tag{2}$$

збігається тоді і лише тоді, коли існує монотонна послідовність $p_n \to \infty$ така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 p_n^2 < \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2} < \infty. \tag{4}$$

Достатність. Покажемо, що при виконанні умов (3) і (4), ряд (2) збігається.

Збіжність чи розбіжність ряду (2) не залежить від того, в якому порядку записані його члени. Нехай члени ряду (2) пронумеровані в порядку спадання $|A_n| \searrow 0$. У цьому випадку послідовність $1/|A_n| \to \infty$ монотонна.

Не порушуючи загальності допускаємо, що $|A_n| < 1$.

Функції x^{α}, $x \in (0,1)$, де α параметр, $\alpha \in (0,1)$ при $\alpha > \alpha_0$, мають таку властивість: $x^{\alpha} < x^{\alpha_0}$. Тому

$$\frac{1}{x^{\alpha}} > \frac{1}{x^{\alpha_0}},$$

$$\frac{1}{x^{\alpha}} > \frac{1}{\sqrt{x}}; \qquad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

При $x_n = |A_n| < 1$ маємо

$$\frac{1}{|A_n|^{\alpha}} > \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \qquad \frac{1}{2} < \alpha < 1 \tag{5}$$

Враховуючи нерівність (5), одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\right)^2 < \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{|A_n|^{\alpha}}\right)^2 \tag{6}$$

Нехай монотонна послідовність $p_n \to \infty$ така

$$\frac{1}{|A_n|^{\alpha}} \leq p_n \tag{7}$$

Тоді з нерівностей (6) і (7) маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 p_n^2. \tag{8}$$

Якщо умова (3) виконується, то ряд (2) збігається.

Покажемо, що монотонна послідовність (7) задовольняє умову (4). Справді

$$\frac{1}{p_n} \leq |A_n|^{\alpha}.$$

Оскільки $|A_n| < 1$ і $1/2 < \alpha < 1$, то справедлива нерівність

$$\frac{1}{p_n^2} \leq |A_n|^{2\alpha} < |A_n|.$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|.$$

Н е о б х і д н і с т ь. Запишемо нерівність, аналогічну нерівності (5),

$$\frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \geqslant \frac{1}{|A_n|^{\beta}},$$

коли $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ і $|A_n| < 1$. З цієї нерівності одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{|A_n|^{\beta}}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| . \tag{9}$$

Якщо ряд (2) збігається, то, як випливає з нерівності (9), існує монотонна послідовність $0 < \rho_n \leq 1/|A_n|^{\beta} \to \infty$, що ряд (3) збігається.

Залишається показати збіжність ряду (4). Це випливає з нерівностей

$$|A_n|^{\beta} \leq \frac{1}{\rho_n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{2\beta} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n^2},$$

при $\beta = 1/2$.

Доведена теорема доповнює один результат С.Б.Стєчкіна [1] про абсолютну збіжність ряду Фур'є функції з простору Гільберта L^2.

Л і т е р а т у р а

1. С т е ч к и н С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. - ДАН СССР, 1955, т. 102.

УДК 517.512

У.А.Мишковець

ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є РІВНОМІРНИХ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ РІМАНА

Відомий метод Рімана [3] підсумовування рядів Фур'є неперервних періодичних функцій зводиться до множення членів ряду Фур'є на множники

$$\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

і до граничного переходу при $h \to 0$.

У цій роботі дається узагальнення цього методу на випадок підсумовування рядів Фур'є рівномірних майже періодичних функцій.

Т е о р е м а. Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ є ряд Фур'є майже періодичної рівномірної функції $f(x)$, то

$$\lim_{h\to 0} \sup_x \left|f(x)-f(h,x)\right| = 0, \tag{1}$$

де

$$f(h,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 A_n e^{i\lambda_n x}. \tag{2}$$

Д о в е д е н н я. Числовий ряд $K\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, де $K \geqslant |A_n|$ є мажорантою тригонометричного ряду (2) при фіксованому $h>0$. Тому ряд (2) збігається рівномірно і, як відомо, функція $f(h,x)$ є рівномірною майже періодичною функцією.

На основі теорем роботи [1] аналогічно, як це показано в роботі [2], одержуємо нерівність

$$\sup_x \left|f(x)-f(h,x)\right| < C_{f(h)}\sqrt{\max_n \left|A_n\left[1-\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]\right|}, \tag{3}$$

$$C_{f(h)} < C_1; \qquad h>0,$$

де C_1 – абсолютна стала,

$$C_{f(h)} = 2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{A_n^{(h)}}{\sqrt{\max\limits_n |A_n^{(h)}|}}\right|^2\right\}^{1/2}\sqrt{\frac{L(\Gamma_h/4)}{\delta(\Gamma_h/4)}}\ ,$$

$$A_n^{(h)} = \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 A_n\ .$$

З конструкції величин $C_{f(h)}$ і теореми єдиності для рівномірних майже періодичних функцій випливає, що

$$\lim_{h\to 0} C_{f(h)} = C_{f(0)} = C_f\ . \tag{5}$$

З нерівностей (4) і (5) одержуємо

$$C_{f(h)} < C \tag{6}$$

для $h \geqslant 0$, де C - абсолютна стала.

З нерівностей (3) і (6) одержуємо

$$\sup_x |f(x) - f(h,x)| < C\sqrt{\max_n \left|A_n\left[1-\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]\right|}\ .$$

Звідси випливає гранична рівність (1). Теорема доведена.

Доведена теорема переноситься не неперервні майже періодичні функції В.В.Степанова і Б.М.Левітана для $|x| \leq A$.

Література

1. М и ш к о в е ц ь У. А. Про рівномірну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій Бора. – ДАН УРСР, 1968, № 12.
2. М и ш к о в е ц ь У. А. Сумування узагальнених рядів Фур'є методом Пуассона-Абеля. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 197[illegible], вип. [illegible].
3. Ф и х [illegible] Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., [illegible], 19[illegible], т. [illegible].

УДК 517.94

О.І.Бобик, О.В.Копушанський, В.М.Поліщук

ЕФЕКТИВНІ ОЗНАКИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ПЕРШОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ В НЕОПУКЛИХ ОБЛАСТЯХ

У цій роботі розглядається питання єдиності розв'язку першої граничної задачі в неопуклій області для лінійного диференціального рівняння еліптичного типу

$$Lu=\sum_{ij=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+2\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u=f(x) \qquad (1)$$

у випадку довільного за знаком коефіцієнта $c(x)$. Границя S області D кусково гладка, а радіус кривини $R(s)$ її невипуклої частини задовольняє умову $\min\limits_{S} R(s)=R_0>0$.

Дослідження проводились методом захисних нерівностей. Відомо [3], що коли знайдуться функції B_j ($j=1,2$), які в області D задовольняють нерівність

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}>C^*+B_1^2+B_2^2, \qquad (2)$$

де

$$C^*=\max_{x\in D}\max_{\varphi_1^2+\varphi_2^2=1}\varphi^* A^{-1}\varphi\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{2}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}+c\right),$$

A^{-1} – обернена матриці $A=\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{2}$, $\varphi^*=(\varphi_1\varphi_2)$, $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$,

то перша гранична задача для рівняння (1) має єдиний розв'язок.

Побудуємо, як і в [3], бісектрису $Б_D$ області D і поле $\vec{\beta}$, що складається з відрізків, які сполучають точки $Б_D$ з найближчими точками на S. Зробимо заміну $B_j=\omega(t,s)\cos(t,\hat{\ }x_j)$ ($j=1,2$), де t – зміщення по напрямку поля β від границі S до бісектриси $Б_D$, а s – довжина дуги границі, відлічувана від певної початкової точки. Тоді нерівність (2) матиме вигляд

$$\frac{d\omega}{dt}+\omega\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\cos(t,\hat{x}_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cos(t,\hat{x}_2)\right]>C^*+\omega^2 . \tag{3}$$

Побудуємо область D', що містить D, так, щоб віддаль між S і границею області D' по нормалі до S дорівнювала R_0. Аналогічно [1] будуємо поле $\vec{\beta}'$. Тоді нерівність (3) набуває вигляду

$$\frac{d\omega}{dt}>C^*+\omega^2 \tag{4}$$

в опуклій частині області D і вигляду

$$\frac{d\omega}{dt}+\frac{\omega}{R_0+t}>C^*+\omega^2 \tag{5}$$

в підобластях, де поле $\vec{\beta}'$ - непаралельне. Якщо нерівність (5) задовольняється на функціях $\omega<0$, то там тим більше виконується нерівність (4). Функція ω внаслідок розривності B_j на бісектрисі повинна задовольняти умову $\omega|_{Б_D}=0$.

Т е о р е м а І. Нехай внутрішній діаметр d області D задовольняє умовам

$$\left[\frac{2(\mu_1-\mu_0)}{d}\right]^2>C^* \quad і \quad R_0>\frac{\mu_0 d}{2(\mu_1-\mu_0)} , \tag{6}$$

де μ_0 і μ_1 - перші додатні нулі функцій Бесселя відповідно нульового і першого порядків. Тоді перша гранична задача для рівняння (І) має не більше одного розв'язку з класу C^2 в D і неперервно диференційованого в $D\cup S$.

Д о в е д е н н я. Приймемо

$$\omega=\alpha(t)\frac{J_0'(at+b)}{J_0(at+b)} ,$$

де функція $\alpha(t)$ і сталі a і b будуть визначені далі, $t\in[0,g(s)]$, $g(s)$ - довжина відрізка, що належить полю $\vec{\beta}$ і проходить через точку $(t,s)\in D$. На бісектрисі $t=g(s)$ на S - $t=0$.

Підставимо ω в (5) і, використавши рівняння Бесселя нульового порядку, одержимо

$$\left(\alpha' + \frac{\alpha}{R_0+t} - \frac{\alpha a}{at+b}\right)\frac{J_0'}{J_0} - \alpha a - (\alpha a + \alpha^2)\frac{J_0'^2}{J_0^2} > c^*.$$

Прийнявши $\alpha = -a$ і вибравши a і b так, щоб при $0 \leq t \leq g(\bar{s})$ аргумент $(at+b) \in [\mu_0, \mu_1]$, матимемо, що функція

$$\omega = -\frac{\mu_1-\mu_0}{g(s)} \cdot \frac{J_0'\left[\frac{\mu_1-\mu_0}{g(s)}t+\mu_0\right]}{J_0\left[\frac{\mu_1-\mu_0}{g(s)}t+\mu_0\right]} < 0$$

задовольняє нерівність (5), якщо

$$\left[\frac{\mu_1-\mu_0}{g(s)}\right]^2 + \frac{\frac{\mu_1-\mu_0}{g(s)}R_0-\mu_0}{(R_0+t)\left(\frac{\mu_1+\mu_0}{g(s)}t+\mu_0\right)} \cdot \frac{\mu_1-\mu_0}{g(s)} \cdot \frac{J_0'}{J_0} > c^*.$$

Останнє співвідношення виконується внаслідок умов (6).

Т е о р е м а 2. Якщо для області D виконується нерівність

$$\left[\frac{\mu_0}{R_0} \; \frac{\ln\frac{\mu_1}{\mu_0}}{\ln\frac{R_0+\frac{q}{2}}{R_0}}\right]^2 > c^*,$$

то перша крайова задача для рівняння (1) має не більше одного розв'язку, двічі неперервно диференційованого в D і неперервно диференційованого в $D \cup S$.

Д о в е д е н н я. Шукаємо функцію ω у вигляді

$$\omega = \alpha(t)\frac{J_0'[\gamma(t)]}{J_0[\gamma(t)]},$$

де $\alpha(t)$ і $\gamma(t)$ - невідомі поки що функції.

Доведення проводимо аналогічно, як і в теоремі 1.

Ці результати можна узагальнити на n -вимірний випадок. Нерівність (5) тоді запишеться у вигляді

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{n-1}{R_0+t}\,\omega > c^* + \omega^2 . \qquad (5')$$

Т е о р е м а 3. Нехай внутрішній діаметр області D задовольняє умовам

$$\left[\frac{\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1}}{\frac{d}{2}}\right]^2 > c^* \quad і \quad R_0 > \frac{n-1}{2n}\,\frac{\mu_{\frac{n}{2}-1}\, d}{\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1}} , \qquad (7)$$

де $\mu_{\frac{n}{2}-1}$ і $\mu_{\frac{n}{2}}\ /\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1} > 0/$ – перші додатні нулі функцій Бесселя відповідно $\frac{n}{2}-1$ і $\frac{n}{2}$ порядків, що на $[\mu_{\frac{n}{2}-1}, \mu_{\frac{n}{2}}]$ функції $J_{\frac{n}{2}}$, $J_{\frac{n}{2}-1}$ є різних знаків. Тоді перша гранична задача для (1) має не більше одного розв'язку, двічі неперервно диференційованого в D і неперервно диференційованого в $D \cup S$.

Д о в е д е н н я. Виберемо

$$\omega = \alpha(t)\,\frac{\frac{d}{dt}\left[(at+b)^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(at+b)\right]}{(at+b)^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(at+b)} \qquad (8)$$

і підставимо в (5'). Тоді, використавши відповідні співвідношення для функцій Бесселя [2], одержимо, що при

$$\alpha = -1, \quad a = \frac{\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_{\frac{n}{2}-1}}{g(b)} \quad і \quad b = \mu_{\frac{n}{2}-1}$$

функція (8) задовольняє (5') за рахунок умов (7).

Для функції ω вигляду

$$\omega = \alpha(t)\,\frac{\frac{d}{dt}\left[r_{(t)}^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(r_{(t)})\right]}{r_{(t)}^{1-\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(r(t))}$$

аналогічно доводиться така теорема.

Т е о р е м а 4. Якщо для області D виконується

$$\left\{\frac{\frac{n-1}{n}\left[\mu_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{n-1}}-\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}\right]^2}{\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{1}{n-1}}\frac{d}{2}}\right\}^2 > c^*$$

і

$$R_0 > \frac{\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}\frac{d}{2}}{\mu_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{n-1}}-\mu_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{n-1}}},$$

де $\mu_{\frac{n}{2}-1}$ і $\mu_{\frac{n}{2}}$ вибрані як і в теоремі 3, то перша крайова задача для рівняння (І) має не більше одного розв'язку, двічі неперервно диференційовного в D і неперервно диференційованого в $D \cup S$.

Одержані результати справедливі для рівнянь вищих порядків, якщо для них має місце теорема про захисну нерівність.

Л і т е р а т у р а

1. Б о б и к Е. И. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. Автореф. канд. дисс. Львов, 1967.
2. В а т с о н Дж. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
3. С к о р о б а г а т ь к о В. Я. Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Изд-во Львовского ун-та. 1961.

УДК 517.946

І.М.Колодій

ОЦІНКА МАКСИМУМУ МОДУЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У цій роботі розглядаємо еліптичні рівняння з виродженням вигляду

$$\operatorname{div} A(x,u,u_x) = B(x,u,u_x), \qquad (1)$$

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ A=(A_1,\dots,A_n),\ u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Результат даної роботи анонсований у [1].

Нехай Ω – обмежена область в n-мірному евклідовому просторі E^n, $x=(x_1,\dots,x_n)$; $\bar\mu=\bar\mu(x)=(\mu_1(x),\dots,\mu_n(x))$, де $\mu_i(x)$, $i=1,\dots,n$ – невід'ємні вимірні функції в Ω. Позначимо через $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ і $W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$, $\beta>1$ лінеали функцій із $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$ і $W^1_1(\Omega)$, для яких скінченні відповідні величини

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)}=\sum_{i=1}^n\left(\int_\Omega \mu_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \|u\|_{W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)}=\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)}+\|u\|_{L_1(\Omega)}$$

Вимагатимемо, щоб для будь-якої функції $u(x)\in W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ виконувалась нерівність

$$\int_\Omega |u_x|\,dx \le c\sum_{i=1}^n\left(\int_\Omega \mu_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Зауважимо, що ця нерівність виконується, коли $\mu_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(\Omega)$, $t_i(\beta-1)\ge 1$. Можна показати [5], що $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ і $W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ – повні нормовані простори.

Л е м а. Нехай функції $\lambda_i(x)\ge 0$, $\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(K_r)$, $K_r=\{x:|x_i|<r$, $i=1,\dots,n\}$, $t_i\ge 1$, а числа β, t_i задовольняють умови $t_i(\beta-1)\ge 1$, $n+\sum_{i=1}^n t_i^{-1}>\beta>1$. Тоді, якщо $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda,K_r)$, то справедлива оцінка

$$\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^{k\beta}dx\right)^{\frac{1}{k}}\le c\prod_{i=1}^n\left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^n r^{-n+\beta}\int_{K_r}\lambda_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx,$$

де $\quad k\le n\left(n-\beta+\sum_{i=1}^n t_i^{-1}\right)^{-1}, \quad c=c(n,t_i,\beta).$

Твердження леми випливає із теореми про вкладання простору $\overset{\circ}{W}{}^1_{\bar\gamma}(K_r)$, $\bar\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ в $L_p(K_r)$ з застосуванням нерівності Гельдера.

Розглянемо рівняння (1) в області Ω. Припустимо, що функції $A(x,u,\bar p)=(A_1(x,u,\bar p),\dots,A_n(x,u,\bar p))$, $B(x,u,\bar p)$, $\bar p=(p_1,\dots,p_n)$, визначені для всіх значень u , $\bar{p}$ і $x \in \Omega$, а також, що $A(x, u, u_x)$, $B(x, u, u_x)$ вимірні при довільній функції $u(x) \in W_1^1(\Omega)$. Нехай для будь-яких u , $\bar{p}$ і $x \in \Omega$ виконуються нерівності

$$A(x,u,\bar{p})\bar{p} \geq a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|p_i|^{\beta} - d(x)|u|^{\beta} - g(x),$$

$$|B(x,u,\bar{p})| \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(x)|p_i|^{\beta-1} + \omega(x)|u|^{\beta-1} + f(x),$$

$$|A(x,u,\bar{p})| \leq a_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)|p_i|^{\beta-1} + b(x)|u|^{\beta-1} + \ell(x), \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-\frac{1}{\beta-1}}(x)|A_i(x,u,\bar{p})|^{\frac{\beta}{\beta-1}} \leq a_3 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)|p_i|^{\beta} + b_0(x)|u|^{\beta} + \ell_0(x),$$

де a_1 , a_2 , a_3 - додатні константи; $\lambda_i(x) \leq \mu_i(x)$, $d(x)$, $g(x)$, $c_i(x)$, $\omega(x)$, $f(x)$, $b(x)$, $\ell(x)$, $b_0(x)$, $\ell_0(x)$ - невід'ємні функції;

$$\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega),\ t_i \geq 1;\ \ d(x),\ g(x),\ \omega(x),\ f(x),\ c_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x),$$

$$\lambda_i^{1-\beta}(x)\mu_i^{\beta}(x),\ b^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x),\ \ell^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x),\ b_0(x),\ \ell_0(x), \qquad (3)$$

належать $L_s(\Omega)$, $s \geq 1$, причому числа β , t_i , s задовольняють нерівності

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < \frac{\beta}{n}, \quad n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} > \beta > 1, \quad t_i(\beta-1) \geq 1.$$

Зауважимо, що дві останні нерівності в (2) виконуються, коли

$$|A_i(x,u,\bar{p})| \leq a_2 \mu_i(x)|p_i|^{\beta-1} + b(x)|u|^{\beta-1} + \ell(x).$$

О з н а ч е н н я. Функція $u(x) \in W_{\beta}^1(\bar{\mu}, \Omega)$ називається узагальненим розв'язком рівняння (1) в області Ω за умов (2), (3), якщо для довільної функції $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_{\beta}^1(\bar{\mu}, \Omega)$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} \left(A\varphi_x + B\varphi \right) dx = 0. \qquad (4)$$

Т е о р е м а. Нехай $u(x)$ - узагальнений розв'язок рівняння (I) в кубі K_{2r} (число r - достатньо мале). Тоді

$$\operatorname*{vraimax}_{K_r} |u|^{\beta} \le C \left[M(2r) P(2r) + r^{\frac{\theta}{s}} \right]^{\frac{m}{m-1}} \left[\left(r^{-n} \int\limits_{K_{2r}} |u|^{s\beta} dx \right)^{\frac{1}{s}} + \varkappa^{\beta}(2r) \right], \qquad (5)$$

де $\theta = n\left(\frac{\beta}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \right) > 0, \quad m = \frac{k}{s'} > 1, \quad k \le n\left(n - \beta + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \right)^{-1},$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

$$M(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \left(\rho^{-n} \int\limits_{K_\rho} \left(\mu_i^{\beta}(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) \right)^{s} dx \right)^{\frac{1}{s}}, \quad P(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \left(\rho^{-n} \int\limits_{K_\rho} \lambda_i^{-t_i}(x) dx \right)^{\frac{1}{t_i}},$$

$$\varkappa(\rho) = \left(\rho^{\frac{\theta}{q}} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\ell^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)}{\mu_i^{\frac{1}{\beta-1}}(x)} \right\|_{L_s(K_\rho)} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\rho^{\frac{\theta}{q}} \| f(x) \|_{L_s(K_\rho)} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} + \left(\rho^{\frac{\theta}{q}} \| g(x) \|_{L_s(K_\rho)} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$C = C(a_1, a_2, n, \beta, t_i, s).$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\bar{u} = |u| + \varkappa$, $\varkappa = \varkappa(2r)$. Для фіксованих чисел $q \ge 1$ і $\ell > \varkappa$ визначимо функції

$$v = F(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^{q}, & \varkappa \le \bar{u} \le \ell, \\ q\ell^{q-1}\bar{u} - (q-1)\ell^{q}, & \ell \le \bar{u}, \end{cases}$$

$$G(u) = \left[F(\bar{u}) \left(F'(\bar{u}) \right)^{\beta-1} + q^{\beta-1} \varkappa^{\beta q - \beta + 1} \right] \operatorname{sign} u, \quad -\infty < u < +\infty$$

Приймемо, що $\varphi(x) = \eta^{\beta} G(u)$ де $\eta = \prod\limits_{i=1}^{n} \eta_{\rho,\sigma}(|x_i|)$, $\eta_{\rho,\sigma}(|x_i|)$ дорівнює одиниці при $|x_i| \le \rho$, нулю при $|x_i| \ge \rho + \sigma$, лінійна при $\rho < |x_i| < \rho + \sigma$. Майже всюди в K_{2r} $\varphi_x = \beta\eta^{\beta-1}\eta_x G(u) + \eta^{\beta} G'(u) u_x$.

Для функцій $F(\bar{u})$ і $G(u)$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} &|G(u)| \le F(\bar{u}) \left(F'(\bar{u}) \right)^{\beta-1}, \quad \bar{u} F'(\bar{u}) \le q F(\bar{u}), \\ &\left(F'(\bar{u}) \right)^{\beta} \le G'(u) \le \frac{\beta q - \beta + 1}{q} \left(F'(\bar{u}) \right)^{\beta} \end{aligned} \qquad (6)$$

Підставимо функцію $\varphi(x)$ в (4) і врахуємо нерівності (6). Тоді

$$
\begin{aligned}
a_1\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|(\eta v)_{x_i}|^{\beta}dx &\le (a_1+a_0\beta)\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)|\eta_x v|dx+\\
&+q^{\beta-1}\int\limits_{K_{2r}}\bar\omega(x)|\eta v|^{\beta}dx+\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}c_i(x)|\eta v_{x_i}|^{\beta-1}|\eta v|dx+\\
&+\beta q^{\beta}\int\limits_{K_{2r}}\bar d(x)|\eta v|^{\beta}dx+\int\limits_{K_{2r}}\bar b(x)|\eta_x v||\eta v|^{\beta-1}dx,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

де

$$
\bar d(x)=d(x)+\varkappa^{-\beta}g(x),\quad \bar\omega(x)=\omega(x)+\varkappa^{1-\beta}f(x),\quad \bar b(x)=b(x)+\varkappa^{1-\beta}e(x).
$$

У правій частині (7) застосуємо нерівність Юнга, потім ліву частину одержаної нерівності, оцінимо за лемою; в результаті одержимо оцінку

$$
\begin{aligned}
\Big(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}|v|^{k\beta}dx\Big)^{\frac{1}{k}} &\le Cq^{\beta}\Big\{\Big(\frac{r}{\sigma}\Big)^{\beta}P(2r)M(2r)+r^{\theta}\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}\cdot\\
&\cdot\Big[\Big(\int\limits_{K_{2r}}d^{s}(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}}+\Big(\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{c_i^{\beta}(x)}{\lambda_i^{\beta-1}(x)}\Big)^{s}dx\Big)^{\frac{1}{s}}+\Big(\int\limits_{K_{2r}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{b^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)}{\mu_i^{\frac{1}{\beta-1}}(x)}\Big)^{s}dx\Big)^{\frac{1}{s}}+\Big(\int\limits_{K_{2r}}\omega^{s}(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}}\Big]+\\
&+r^{\theta}\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}r^{\frac{\theta}{n}}\Big\}\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}|v|^{s'\beta}dx\Big)^{\frac{1}{s'}}.
\end{aligned}
$$

Перейдемо до границі у цій нерівності при $\ell\to\infty$ і врахуємо, що r – достатньо мале. Тоді

$$
\Big(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}(\bar v^{\beta})^{k\beta}dx\Big)^{\frac{1}{k}}\le Cq^{\beta}\Big(\frac{r}{\sigma}\Big)^{\beta}\Big[P(2r)M(2r)+r^{\frac{\theta}{n}}\Big]\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}(\bar v^{\beta})^{s'\beta}dx\Big)^{\frac{1}{s'}}
$$

Позначимо $z=\bar v^{\beta}$, $m=\frac{k}{s'}>1$, $qs'=p$. У цих позначеннях остання нерівність має вигляд

$$
\Big(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}z^{mp}dx\Big)^{\frac{1}{mp}}\le C^{\frac{s'}{p}}\Big(\frac{p}{s'}\Big)^{\frac{\beta s'}{p}}\Big(\frac{r}{\sigma}\Big)^{\frac{\beta s'}{p}}\Big[P(2r)M(2r)+r^{\frac{\theta}{n}}\Big]^{\frac{s'}{p}}\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}z^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}}
$$

Приймемо

$$p = s'm^{\nu}, \ \nu = 0,1,2,\dots, \rho+\sigma = \rho_{\nu} = (1+2^{-\nu})r, \ \rho = \rho_{\nu+1},$$

$$\Theta_{\nu} = \left(r^{-n}\int_{K_{\rho_\nu}} z^{s'm^{\nu}}dx\right)^{\frac{1}{s'm^{\nu}}}.$$

Тоді

$$\Theta_{\nu+1} \le C^{\frac{\nu+1}{m^{\nu}}}\left[P(2r)M(2r)+r^{\frac{\theta}{2}}\right]^{\frac{1}{m^{\nu}}}\Theta_{\nu} \le$$

$$\le C^{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu+1}{m^{\nu}}}\left[P(2r)M(2r)+r^{\frac{\theta}{2}}\right]^{\frac{m}{m-1}}\left(r^{-n}\int_{K_{2r}} z^{s'}dx\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Спрямувавши ν до ∞ і вертаючись до функції $u(x)$, одержимо оцінку (5).

Література

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.

2. Кружков С. Н. Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений. - ДАН СССР, 1963, т. 150, № 4.

3. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. - "Математический сборник", 1964, т. 65, № 4.

4. Кружков С. Н. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1963, т. 150, № 3.

5. Кружков С. Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. - "Математический сборник", 1968, т. 77, № 3.

6. Moser J. A new proof of the Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. - „Comm. Pure Appl. Math.", 1960, v. 13, N3.

7. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equations. - „Acta Math.", 1964, v. 111, N3-4.

УДК 517.946

І.М.Колодій

ЛОКАЛЬНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ГЕЛЬДЕРОМ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У цій роботі розглядаються еліптичні рівняння з виродженням виду

$$\begin{gathered} \operatorname{div} A(x,u,u_x)=B(x,u,u_x), \\ x=(x_1,\dots,x_n),\ \ u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}), \\ A(x,u,u_x)=(A_1(x,u,u_x),\dots,A_n(x,u,u_x)), \end{gathered} \tag{1}$$

в обмеженій області Ω n-мірного евклідового простору E^n. Вивчаються якісні властивості узагальнених розв'язків (узагальнені розв'язки в розумінні інтегральної тотожності).

Відомо [1], [2], що узагальнений розв'язок рівняння (1), *a priori* лише з простору С.Л.Соболева, при відповідних припущеннях на функції, що характеризують рівняння, локально обмежений. При додаткових умовах узагальнений розв'язок буде неперервний за Гельдером. Для узагальнених розв'язків можна доводити нерівність Харнкака, теореми типу Ліувілля, теореми про усувну особливість, аналогічні відповідним теоремам для гармонічних функцій. У цій статті установлена локальна оцінка модуля неперервності узагальненого розв'язку, тобто доведено, що узагальнений розв'язок неперервний за Гельдером у точці. Результат нашої роботи анонсований в [1].

Нехай K_r - куб $(x:|x_i|<r,\ i=1,\dots,n)$; $\bar\mu=\bar\mu(x)=(\mu_1(x),\dots,\mu_n(x))$, $\mu_i(x)$ - невід'ємні вимірні функції в Ω; $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ $W^1_\beta(\bar\mu,\Omega)$ - повні нормовані простори (означення див. у [1]).

Л е м а 1. Нехай функції $\lambda_i(x)\geq 0$, $\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(K_r)$, $t_i\geq 1$, а числа t_i, β задовольняють умови $t_i(\beta-1)\geq 1$, $n+\sum_{i=1}^{n}t_i^{-1}>\beta>1$. Тоді:

1) якщо $u(x) \in W^1_\beta(\bar\lambda, K_r)$ і $\sum_{i=1}^{n} t_i^{-1} - n t_j^{-1} < \beta$, $j=1,\dots,n$, то має місце нерівність

$$\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^{k\beta}dx\right)^{\frac{1}{k}} \le C\left[\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\right)^{\frac{1}{t_i}}\sum_{i=1}^{n} r^{-n+\beta}\int_{K_r}\lambda_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx + \left(r^{-n}\int_N|u|dx\right)^\beta\right],$$

де $1 \le k \le n\left(n-\beta+\sum_{i=1}^{n} t_i^{-1}\right)^{-1}$, $mes\, N \ge C_0\, mes\, K_r$, $C_0 > 0$, $C = C(n, t_i, \beta, C_0)$

2) якщо $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda, K_r)$, $\Lambda(x) \in L_s(K_r)$, $\Lambda(x) \ge 0$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} \le \frac{\beta}{n}$, $s \ge 1$, то має місце оцінка

$$\int_{K_r}\Lambda(x)|u|^\beta dx \le C r^\theta \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{n}}\left(\int_{K_r}\Lambda^s(x)dx\right)^{\frac{1}{s}}\sum_{i=1}^{n}\int_{K_r}\lambda_i(x)|u_{x_i}|^\beta dx,$$

де

$$\theta = n\left(\frac{\beta}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right) \ge 0, \qquad C = C(n, t_i, \beta).$$

Твердження леми 1 випливають із теорем про вкладання просторів $W^1_{\bar r}(K_r)$ і $\overset{\circ}{W}{}^1_{\bar r}(K_r)$, $\bar r = (r_1, \dots, r_n)$, в $L_p(K_r)$ з застосуванням нерівності Гельдера.

Зважаючи на те, що теорема про локальну обмеженість узагальнених розв'язків рівняння (1) доведена, можна вважати, що в кубі K_{r_0} (r_0 - достатньо мале) $\operatorname{vrai\,max}_{K_{r_0}} |u| = M_0$, $A = A(x, u_x)$, $B = B(x, u_x)$, причому $A(x, \bar p)$, $B(x, \bar p)$, $\bar p = (p_1, \dots, p_n)$ задовольняють нерівностям

$$
\begin{aligned}
&A(x,p)\bar p \ge a_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|p_i|^\beta - g(x), \\
&|B(x,\bar p)| \le \sum_{i=1}^{n} c_i(x)|p_i|^{\beta-1} + f(x), \qquad\qquad (2) \\
&|A(x,\bar p)| \le a_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)|p_i|^{\beta-1} + l(x), \\
&\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)\,|A_i(x,\bar p)|^{\frac{\beta}{\beta-1}} \le a_3\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)|p_i|^\beta + l_0(x),
\end{aligned}
$$

де $\beta \ge 2$ (або $g(x) = 0$) з тими ж умовами на коефіцієнти, що і в роботі [2].

Л е м а 2 (основна). Нехай $U(x)$ – узагальнений розв'язок рівняння (2), в кубі K_r, $r \le r_0$, а $\varkappa$ така додатна константа, що

$$H(\rho)=P(\rho)M(\rho)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\rho^{-n}\int_{K_\rho}\lambda_i^{-t_i}(x)dx\Big)^{\frac{1}{t_i}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\rho^{-n}\int_{K_\rho}\mu_i^{s}(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}}\le \varkappa,$$

при будь-якому $\rho\in(0,r_0]$. Тоді або $osc(U,K_{\frac{r}{4}})\le Cr^{\gamma}$, $\gamma=\theta(4\beta)^{-1}$, $C=C(n,s,\beta,t_i,a_1,a_2,M_0)$, або $osc(U,K_{\frac{r}{4}})\le\zeta\, osc(U,K_{\frac{r}{2}})$, де константа $\zeta=\zeta(n,\beta,a_1,a_2,s,t_i,\varkappa,M_0)\in(0,1)$.

Д о в е д е н н я. Можна вважати, що $\operatorname{vraimax}\limits_{K_r}(\pm U)=M$. Можливі лише два випадки: $M<r^{\gamma}$, або $M\ge r^{\gamma}>0$. У першому випадку $osc(U,K_{\frac{r}{4}})\le osc(U,K_r)=2M<2r^{\gamma}$. У другому випадку буде показано, що при $r^{\gamma}\le C$, де C – достатньо мале, існує константа $\zeta=\zeta(n,\beta,a_1,a_2,t_i,s,\varkappa)\in(0,1)$, що $osc(U,K_{\frac{r}{4}})\le\zeta\, osc(U,K_r)$. Якщо ж $r^{\gamma}>C$, то $osc(U,K_{\frac{r}{4}})\le 2M_0<2M_0C^{-1}r^{\gamma}$. Отже, досить розглянути випадок $M\ge r^{\gamma}>0$ при $r^{\gamma}\le C$. Позначимо через v ту із функцій $1\pm UM^{-1}$, яка не менша від одиниці на множині $N\subset K_r$, міра якої не менша від $\frac{1}{2}mes K_r$. Легко бачити, що в кубі K_r функція $v(x)$ є узагальненим розв'язком рівняння

$$div\,\tilde A(x,v_x)=\tilde B(x,v_x), \tag{3}$$

де функції $\tilde A(x,v_x)=M^{1-\beta}(\pm A(x,\pm Mv_x))$, $\tilde B(x,v_x)=M^{1-\beta}(\pm B(x,\pm Mv_x))$ задовольняють умовам (2), в яких функції $g(x)$, $f(x)$, $\ell(x)$, $\ell_0(x)$ замінено на функції $\tilde g(x)=M^{-\beta}g(x)$, $\tilde f(x)=M^{1-\beta}f(x)$, $\tilde\ell(x)=M^{1-\beta}\ell(x)$, $\tilde\ell_0(x)=M^{-\beta}\ell_0(x)$.

Інтегральна тотожність для рівняння (3) має вигляд

$$\int_{K_r}\big(\tilde A(x,v_x)\varphi_x+\tilde B(x,v_x)\varphi\big)dx=0, \tag{4}$$

для довільної функції $\varphi(x)\in \overset{0}{W}{}^{1}_{\beta}(\bar\mu,K_r)$. Справедлива також лема з [4].

Лема 3. На півпрямій $v>0$ існує два рази неперервно диференційована функція $z(v)\geq 0$, що має такі властивості: а) $z''(v)\geq (z'(v))^2$, $z'(v)\leq 0$; б) $z(v)\sim \ln v$ при $v\to +0$; в) $z(v)=0$ при $v\geq 1$.

Для функції $w=z(v+\varepsilon)$ справедливі нерівності

$$\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|w_{x_i}|^{\beta} dx \leq C z^{n-\beta} M(z), \tag{5}$$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_{\frac{z}{4}}} w^{\beta} \leq C\left[1+H\left(\tfrac{z}{2}\right)\right]^{\frac{1}{m-1}}\left[\left(z^{-n}\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}} w^{k\beta}dx\right)^{\frac{1}{k}} + z^{\gamma}\right]. \tag{6}$$

Методика доведення оцінок (5), (6) близька до відповідної методики з роботи [3].

Оскільки $w=0$ на множині N, то з п. 1 леми 1 випливає, що

$$\left(z^{-n}\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}} w^{k\beta}dx\right)^{\frac{1}{k}} \leq C\,D\left(\tfrac{z}{2}\right) z^{-n+\beta}\int\limits_{K_{\frac{z}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|w_{x_i}|^{\beta} dx. \tag{7}$$

Об'єднуючи оцінки (5)-(7), одержимо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_{\frac{z}{4}}} w^{\beta} \leq C\left[1+H\left(\tfrac{z}{2}\right)\right]^{\frac{1}{m-1}}\left[1+H(z)\right] \leq C\left(1+H(z)\right)^{\frac{m}{m-1}} \leq C(1+\varkappa)^{\frac{m}{m-1}} = C_1.$$

Отже, $z^{\beta}(v+\varepsilon)\leq C_1$ в $K_{\frac{z}{4}}$. Виберемо $\varepsilon=\varepsilon(n,\beta,t_i,s,a_1,a_2,\varkappa,M_0)\in(0,1)$ настільки малим, щоб $z^{\beta}(2\varepsilon)>C_1$. Зауважимо, що вибір $\varepsilon>0$ зроблено незалежно від z. Доведемо, що $v\geq\varepsilon$. Дійсно, якщо припустити протилежне, тобто $v<\varepsilon$, то внаслідок монотонності функції $z(v+\varepsilon)$: $z^{\beta}(2\varepsilon)<z^{\beta}(v+\varepsilon)\leq C_1$; одержане протиріччя показує, що $v\geq\varepsilon$ в кубі $K_{\frac{z}{4}}$. Звідси випливає [3] оцінка п. 2 леми 2. З леми 2 маємо наступну теорему [3], [4].

Теорема 1. Нехай $U(x)$ – узагальнений розв'язок рівняння (1), (2) в кубі K_z, $z\leq z_0$, а $\varkappa$ така додатна константа, що $H(\rho)\leq\varkappa$ для будь-якого $\rho\in(0,z_0]$. Тоді при $\alpha=\min\left(\gamma,\log_{\frac{1}{4}}\zeta\right)\in(0,1)$ і довільному $\rho\in(0,z_0]$ справедлива оцінка

$$osc(u, K_\rho) \le C(1+r_0^{\tau})\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\alpha},$$

де $C = C(n, \beta, a_1, a_2, S, t_i, \varkappa, M_0)$, тобто $u(x)$ задовольняє умові Гельдера в початку координат.

Література

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.

2. Колодій І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь. У цьому ж віснику.

3. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. - "Математический сборник", 1964, т. 65, № 4.

4. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. I, М., 1969.

УДК 517.946

Л.М.Макаренко, М.І.Іванчов

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Відомо, що фундаментальні розв'язки рівнянь $\Delta u = 0$ та $\Delta u - k^2 u = 0$ $(k = const > 0)$ відрізняються своєю поведінкою на нескінченності: перший прямує до нуля на нескінченності за степеневим законом, другий - за експоненціальним.

У цій роботі ми вивчаємо властивості фундаментального розв'язку рівняння

$$\Delta u - \frac{u}{|x|^{\alpha}} = 0, \qquad \alpha = const > 0, \tag{1}$$

в області, що не містить початок системи координат. Для визначеності рівняння (1) розглядатимемо в області $\Omega : \left\{ |x| > 1,\ |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right\}$.

Означення фундаментального розв'язку рівняння (1) та його існування встановлено в [2]. Сформулюємо деякі властивості його фундаментального розв'язку.

Т е о р е м а 1. Фундаментальний розв'язок $G(x,y)$ рівняння (I) не є функцією тільки від $|x-y|$, $\left(|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}\right)$.

Д о в е д е н н я від супротивного.

Т е о р е м а 2. Функція $G(x,y)$ є симетричною, тобто

$$G(x,y)=G(y,x).$$

Д о в е д е н н я проводиться так само, як це зроблено в [2].

Для встановлення поведінки фундаментального розв'язку на нескінченності спочатку доведемо таку теорему.

Т е о р е м а 3. Рівняння (I) має розв'язок $\omega(x|$ з такою асимптотикою при великих r, $r=|x|$:

$$\omega(x|=\begin{cases} c r^{-\frac{n-1}{2}+\frac{\alpha}{4}} e^{-k r^{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(1+O\left(r^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\right), & k=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{коли} \quad \alpha<2, \\ c r^{-\frac{n-2}{2}-\frac{\sqrt{n^2-4n+8}}{2}}, & \text{коли} \quad \alpha=2, \\ c r^{-n+2}\left(1+O\left(r^{-\alpha+2}\right)\right), & c=const, \quad \text{коли} \quad \alpha>2. \end{cases}$$

Д о в е д е н н я. Розв'язок $\omega(x)$ рівняння (I) будемо шукати у вигляді $\omega=\omega(r)$, де $r=|x|$. Тоді для $\omega(r)$ одержимо рівняння

$$\omega''+\frac{n-1}{r}\omega'-\frac{\omega}{r^\alpha}=0. \tag{2}$$

Від змінних (r,ω) перейдемо до змінних (t,y) за формулами

$$t=\varphi(r), \quad \omega(t)=a(t)y(t),$$

де

$$\varphi(r)=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}r^{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad a(t)=ct^{-\frac{\beta}{2}}, \quad \beta=\frac{n-1-\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Для нової невідомої функції $y(t)$ одержимо рівняння

$$y''-(1-\gamma t^{-2})y=0, \quad \text{де} \quad \gamma=\frac{(2n-2-\alpha)(6-2n-\alpha)}{4(2-\alpha)^2}. \tag{3}$$

Поведінка на нескінченності розв'язку рівняння (3) легко встановлюється за допомогою методу послідовних наближень, а звідси вже випливає твердження теореми у випадку $\alpha < 2$. Коли $\alpha = 2$, розв'язок $\omega(z)$ рівняння (2) виписується явно. У випадку $\alpha > 2$ спрощуємо рівняння (2) за допомогою заміни $\omega(z) = a(z)y(z)$, а потім з використанням методу послідовних наближень легко одержується потрібна оцінка.

Теорема 3 дає змогу оцінити поведінку на нескінченності фундаментального розв'язку рівняння (I).

Т е о р е м а 4. Для довільного $y_0 \in \Omega$ має місце оцінка

$$G(x,y_0) \le C_0 |x|^{-\frac{n-1}{2}+\frac{\alpha}{4}} e^{-\kappa|x|^{1-\frac{\alpha}{2}}}, \qquad \text{коли } \alpha < 2,$$

$$G(x,y_0) \le C_0 |x|^{-\frac{n-2}{2}-\frac{\sqrt{n^2-4n+8}}{2}}, \qquad \text{коли } \alpha = 2,$$

$$G(x,y_0) \le C_0 |x|^{-n+2}, \qquad \text{коли } \alpha > 2.$$

Для доведення досить скористатись теоремою 3 та результатами роботи [3].

Знайдені властивості фундаментального розв'язку рівняння (I) можна використати, зокрема, для уточнення теореми існування обмежених розв'язків задачі Діріхле для лінійних еліптичних рівнянь в необмежених областях [1]. Наприклад, умови існування обмеженого розв'язку задачі

$$\Delta u - \frac{u}{|x|^\alpha} = f(x), \qquad x \in \Omega,$$
$$u(x)\big|_S = \varphi(x)\big|_S,$$

де S – границя області Ω, у випадку $n=3$ мають вигляд

$$|f(x)| \le \frac{C}{|x|^p}, \quad \text{де} \quad p = \begin{cases} 2+\frac{\alpha}{4}-\frac{2-\alpha}{2}\left(\left[\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right]+1\right), & \text{коли } \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right), & \text{коли } \alpha = 2, \\ 2+\varepsilon, \quad \varepsilon = const > 0, & \text{коли } \alpha > 2, \end{cases}$$

При цьому припускаються виконаними умови гладкості функції f, φ і границі S.

Подібне дослідження властивостей фундаментального розв'язку та встановлення умов існування обмеженого розв'язку задачі Діріхле можна провести і для більш загальних еліптичних рівнянь другого порядку за такою ж схемою.

Література

1. Іванчов М. І. Про задачу Діріхле в необмежених областях. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1971, вип. 6.

2. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.

3. Meyers N. Serrin J. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations. J. of Math. and Mech., 1960, 9, N4.

УДК 513.88

О.Г.Сторож

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ОПЕРАТОРІВ, СПОРІДНЕНИХ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ

Нехай $l[y]$ - диференціальний вираз

$$l[y] = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y, \tag{1}$$

де коефіцієнти $p_2(x), \ldots p_n(x)$ - сумовані на інтервалі $[0;1]$, а

$$U_\nu = U_{\nu 0} + U_{\nu 1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots 2n,$$

де

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(0), \tag{2}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(1), \tag{3}$$

причому $n-1 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0; \quad n-1 \geqslant k_{n+1} \geqslant \ldots \geqslant k_{2n} \geqslant 0$

$k_{\nu+2} < k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots n-2, n+1, \ldots 2n; \quad |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0, \; \nu = 1, \ldots 2n,$

а крайові форми $U_1, \dots U_n$ — лінійно незалежні. Нехай тепер $\varphi_1 \dots \varphi_{2n}$, $\chi_1, \dots \chi_p$, $\psi_1, \dots \psi_p$ — деякі функції з $L_2(0,1)$.

Визначимо оператор T умовами $D(T) = \{y \in L_2(0,1) : y, y', \dots y^{(n-1)}$ — абсолютно неперервні

$$\ell[y] \in L_2(0,1),\ U_\nu(y) = \int_0^1 y\overline{\varphi}_\nu\, dx,\ \nu = 1, \dots n\Big\}, \tag{4}$$

$$Ty = t[y] \stackrel{df}{=} \ell[y] + \sum_{\nu=n+1}^{2n} U_\nu(y)\varphi_\nu + \sum_{q=1}^{p}\Big(\int_0^1 y\overline{\psi}_q\, dx\Big)\chi_q,\ y \in D(T) \tag{5}$$

T -оператор, споріднений до диференціальних, породжених виразом $\ell[y]$ [1]. У цій статті виводяться асимптотичні формули для власних значень і власних функцій оператора T у випадку $n = 2\mu$.

Розглянемо комплексну площину C. Нехай $\lambda \in C$. Приймемо $\lambda = -\rho^n$.

Розділимо всю комплексну ρ -площину на $2n$ сектори S_k $k = 0, 1, \dots 2n-1$, що визначаються нерівностями

$$\frac{k\pi}{n} \le \arg\rho \le \frac{(k+1)\pi}{n}.$$

Через T_k позначимо сектор (з вершиною в точці $\rho = -c$), який утворюється з S_k зсувом $\rho \to \rho + c$ $(c \in C)$. Надалі вважатимемо, що ρ міститься в деякій фіксованій області $T_k \subset C$. Нехай $\omega_1, \dots \omega_n$ - всі різні корені степеня n з числа -1, занумеровані так, що

$$Re((\rho+c)\omega_1) \le Re((\rho+c)\omega_2) \le \dots \le Re((\rho+c)\omega_n),\ \forall \rho \in T_k.$$

Це можливо (див. [2]).

Спочатку виведемо асимптотичні формули для розв'язків рівняння

$$t[y] + \rho^n y = 0. \tag{6}$$

Воно розв'язується так. Введемо позначення

$$\begin{cases} U_\nu(y) = a_{\nu-n}, & \nu = n+1, \dots 2n, \\ \int_0^1 y\overline{\psi}_q\, dx = a_{n+q}, & q = 1, \dots p. \end{cases} \tag{7}$$

Рівняння (6) після підстановки в нього співвідношень (7) перетворюється в неоднорідне диференціальне рівняння, розв'язок якого залежить від постійних $a_1, \dots, a_{n+p}$, від яких позбуваємось, враховуючи (7). Тепер, використовуючи асимптотичні формули для розв'язків рівняння

$l[y]+\rho^n y=0$ і лему Рімана-Лебега, одержуємо теорему I.

Т е о р е м а 1. Рівняння $t[y]+\rho^n y=0$ при досить великих ρ має n лінійно незалежних розв'язків $y_1,\dots,y_n$, які разом з їхніми похідними до порядку $n-1$ виражаються формулами

$$\begin{cases} y_i^{(k)}=(\rho\omega_i)^k\left[e^{\rho\omega_i t}+o(1)\right], & i=1,\dots\mu, \\ y_i^{(k)}=(\rho\omega_i)^k\left[e^{\rho\omega_i t}+e^{\rho\omega_i}o(1)\right], & i=\mu+1,\dots n, \end{cases} \tag{8}$$

де $n=2\mu$, а ρ належить деякій фіксованій області $T_k\subset C$. Причому всі вирази $o(1)$, що фігурують у (8) аналітичні по ρ і при $\rho\to\infty$ прямують до нуля рівномірно по t.

Введемо позначення

$$\gamma_{\nu i}\overset{\mathrm{df}}{=}U_\nu(y_i)-\int_0^1 y_i\bar{\varphi}_\nu\,dx. \tag{9}$$

Власні числа оператора T, очевидно, корені рівняння

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ & \cdots & \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Але з формул (8) і леми Рімана-Лебега випливають такі оцінки:

$$\gamma_{\nu i}=\begin{cases} (\rho\omega_i)^{k_\nu}(\alpha_\nu+o(1)), & i=1,\dots\mu-1, \\ (\rho\omega_i)^{k_\nu}\left[(\alpha_\nu+o(1))+e^{\rho\omega_i}(\beta_\nu+o(1))\right], & i=\mu,\ \mu+1, \\ (\rho\omega_i)^{k_\nu}e^{\rho\omega_i}(\beta_\nu+o(1)), & i=\mu+2,\dots n. \end{cases} \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (10), одержимо рівняння для знаходження власних чисел оператора T, яке за формою абсолютно збігається з рівнянням для знаходження власних значень деякого диференціального оператора, яке розв'язано в [2]. Використовуючи викладену там методику, яка базується на теоремі Руше, дістаємо такий результат.

Т е о р е м а 2. Означимо числа θ_{-1}, θ_0, θ_1 так:

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{k_1} \ldots \alpha_1 \omega_{\mu-1}^{k_1}, & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1}, & (\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1)\omega_{\mu+1}^{k_1}, & \beta_1 \omega_{\mu+2}^{k_1}, \ldots & \beta_1 \omega_n^{k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} \ldots \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n}, & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n}, & (\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n)\omega_{\mu+1}^{k_n}, & \beta_n \omega_{\mu+2}^{k_n}, \ldots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

де $\omega_1, \ldots \omega_n$ - всі різні корені степеня n з -1, занумеровані так, що $Re(\rho\omega_1) \le \ldots \le Re(\rho\omega_n)$, $\forall \rho \in S_0$. Нехай $\theta_{-1} \ne 0$, $\theta_1 \ne 0$. Тоді власні значення оператора T при досить великих $|\lambda|$ утворюють дві нескінченні послідовності λ'_k, λ''_k, $k = N, N+1, \ldots$, де N - ціле число

$$\lambda'_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + o(1) \right],$$
$$\lambda''_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + o(1) \right], \tag{12}$$

де $n = 2\mu$, а ξ', ξ'' - корені рівняння $\theta_1 \xi^2 + \theta_0 \xi + \theta_{-1} = 0$, $\ln_0 \xi$ означає яке-небудь фіксоване значення натурального логарифма, верхній знак у формулах (12) відповідає парному, а нижній - непарному μ. У випадку $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \ne 0$ всі власні значення, починаючи з деякого, прості, у випадку $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} = 0$, починаючи з деякого, прості або двократні.

Для простоти розглянемо тільки прості власні значення оператора T. Для них ранг матриці $(\gamma_{\nu i})$ дорівнює $n-1$. Нехай, наприклад, не всі мінори елементів першого рядка визначника цієї матриці дорівнюють нулю. Тоді власна функція y виражається так:

$$y = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots\ldots & y_n \\ \gamma_{21} & \ldots\ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \ldots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Підставляючи в (13) замість y_i, $\gamma_{\nu i}$ їхні значення (8) та (11), а замість $\rho - \rho'_k$ (де $\rho_k'^{n} = -\lambda'_k$), одержимо

$$\tilde{y}_k = \begin{vmatrix} e^{\rho'_k \omega_1 t}[1] \ldots e^{\rho'_k \omega_{\mu-1} t}[1], e^{\rho'_k \omega_\mu t}[1], & e^{-\rho'_k \omega_\mu t}[1], e^{\rho'_k \omega_{\mu+2}(t-1)}[1] \ldots e^{\rho'_k \omega_n (t-1)}[1] \\ \omega_1^{k_2}[\alpha_2] \ldots \omega_{\mu-1}^{k_2}[\alpha_2], \omega_\mu^{k_2}([\alpha_2] + \xi'[\beta_2]), & \omega_{\mu+1}^{k_2}([\alpha_2] + \frac{1}{\xi'}[\beta_2]), \omega_{\mu+2}^{k_2}[\beta_2], \ldots \omega_n^{k_n}[\beta_n] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \omega_1^{k_n}[\alpha_n] \ldots \omega_{\mu-1}^{k_n}[\alpha_n], \omega_\mu^{k_n}([\alpha_n] + \xi'[\beta_n]), & \omega_{\mu+1}^{k_n}([\alpha_n] + \frac{1}{\xi'}[\beta_n]), \omega_{\mu+2}^{k_n}[\beta_n], \ldots \omega_n^{k_n}[\beta_n] \end{vmatrix} + O(1), \quad (14)$$

де $[a] \stackrel{df}{=} a + O(1)$ і $\tilde{y}_k$ – власна функція, що відповідає власному значенню $\lambda = \lambda'_k$, а $\rho'_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi' \mp 2k\pi i)$, $k = 1, 2, \ldots$ (за умови, що у випадку $n = 4q$ береться верхній знак, а при $n = 4q + 2$ – нижній). Формула для власної функції y''_k, що відповідає значенню $\lambda = \lambda''_k$, одержується, якщо в (14) замінити ξ' на ξ'' (зокрема ρ'_k заміниться на $\rho''_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi'' \mp 2k\pi i$). Аналогічні результати мають місце і для непарного n.

Література

1. Л я н ц е В. Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. – "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", 1972, вып. 16.

2. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., "Наука", 1969.

УДК 517.913

Г.С.Костенко

ЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, ІНТЕГРОВАНІ В ЗАМКНУТІЙ ФОРМІ

Нехай

$$Uf = \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} \quad (1)$$

інфінітезимальний оператор шуканої групи перетворень, відносно якої рівняння

$$y^{(IV)} + A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \qquad (2)$$

інваріантне. Тоді для $\xi(x,y)$ і $\eta(x,y)$ аналогічно як і в [1] одержуємо систему рівнянь в частинних похідних

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0, \qquad 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

$$3\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} - 2\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + A\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{A'}{2}\xi = 0, \qquad (3)$$

$$4\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 3B\frac{\partial \xi}{\partial x} + B'\xi = 0,$$

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + B\frac{\partial \eta}{\partial x} - Cy\frac{\partial \eta}{\partial y} + 4Cy\frac{\partial \xi}{\partial x} + C\eta + C'y\xi = 0,$$

звідки

$$\xi(x,y) = \xi(x), \quad \eta(x,y) = \left(\tfrac{3}{2}\xi'(x) + \alpha_0\right)y + \eta_0(x),$$

причому $\xi(x)$ повинна задовольняти систему рівнянь

$$\begin{aligned} &5\xi''' + 2A\xi' + A'\xi = 0, \\ &5\xi^{(IV)} + 2A\xi'' + 3B\xi' + B'\xi = 0, \\ &3\xi^{(V)} + 3A\xi''' + 3B\xi'' + 8C\xi' + 2C'\xi = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

і необхідно, щоб $\eta_0(x)$ була розв'язком рівняння (2), у зв'язку з чим природно її прийняти рівною нулеві.

Система (4) з довільно заданими $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$, взагалі кажучи, несумісна. Щоб знайти умови на коефіцієнти $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$ за виконання яких система (4) буде сумісною, досить останню розв'язати як систему рівнянь першого порядку відносно A, B, C з довільно заданою достатньо неперервно диференційованою функцією $\xi(x)$. У результаті одержимо

$$A(x) = \xi^{-2}(x)\left(\mu - 5\xi''(x)\xi(x) + \tfrac{5}{2}\xi'^2(x)\right),$$

$$B(x) = \xi^{-3}(x)\left(\lambda - 2\mu\xi'(x) + 10\xi''(x)\xi'(x)\xi(x) - 5\xi'^3(x) - 5\xi'''(x)\xi^2(x)\right), \qquad (5)$$

$$C(x)=\xi^{-4}(x)\Big[\nu+\frac{3}{2}\mu\Big(\frac{3}{2}\xi'^2(x)-\xi''(x)\xi(x)\Big)-\frac{3}{2}\lambda\xi'(x)-$$

$$-\frac{3}{2}\Big(\xi^{(IV)}(x)\xi^3(x)-3\xi'''(x)\xi'(x)\xi^2(x)-\frac{7}{2}\xi''^2(x)\xi^2(x)+\frac{17}{2}\xi''(x)\xi'^2(x)\xi(x)-\frac{27}{8}\xi'^4(x)\Big)\Big],$$

де μ , λ , ν – довільні дійсні сталі.

Отже, якщо $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$ задовольняють умови (5), то $\xi(x)$ є розв'язком системи (4), а рівняння (2) інваріантне відносно двопараметричної групи перетворень з інфінітезімальними операторами

$$U_1f=\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{3}{2}\xi'(x)y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad U_2f=y\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{6}$$

для яких дужка Пуассона $(U_1U_2)f=0$. Ця група перетворень має канонічну форму [3]

$$U_1f=\frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad U_2f=\frac{\partial f}{\partial \chi}, \tag{6_1}$$

причому

$$\chi=\ln\xi^{-\frac{3}{2}}(x)y, \qquad \xi=\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

З змінних (7) рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), набирає вигляду

$$\frac{d^4\chi}{d\xi^4}+4\frac{d^3\chi}{d\xi^3}\frac{d\chi}{d\xi}+3\Big(\frac{d^2\chi}{d\xi^2}\Big)^2+6\frac{d^2\chi}{d\xi^2}\Big(\frac{d\chi}{d\xi}\Big)^2+\mu\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+\Big(\frac{d\chi}{d\xi}\Big)^4+\mu\Big(\frac{d\chi}{d\xi}\Big)^2+\lambda\frac{d\chi}{d\xi}+\nu=0. \tag{8}$$

Приймаючи спочатку $\frac{d\chi}{d\xi}=z$, а потім $\frac{dz}{d\xi}=p$, з (8) одержимо рівняння

$$p^2\frac{d^2p}{dz^2}+p\frac{dp}{dz}+4pz\frac{dp}{dz}+3p^2+6z^2p+\mu p+z^4+\mu z^2+\lambda z+\nu=0, \tag{9}$$

розв'язки якого існують у формі

$$p=\alpha z^2+\beta z+\gamma, \tag{10}$$

якщо

$$\begin{gathered}6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1=0, \qquad \beta(2\alpha^2+3\alpha+1)=0,\\ 7\alpha\beta^2+8\alpha^2\gamma+14\alpha\gamma+7\beta^2+6\gamma+\mu(\alpha+1)=0,\\ \beta^3+8\alpha\beta\gamma+10\beta\gamma+\mu\beta+\lambda=0, \qquad 2\alpha\gamma^2+3\gamma^2+\beta^2\gamma+\mu\gamma+\nu=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Остання система алгебраїчних рівнянь має такі розв'язки:

1) $\alpha=-1$, $\gamma=-\frac{1}{2}(\beta^2+\mu+\frac{\lambda}{\beta})$, де $\beta\neq 0$ - довільний корінь рівняння

$$\beta^6+2\mu\beta^4+(\mu^2-4\nu)\beta^2-\lambda^2=0; \tag{12}$$

2) $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\gamma=-\frac{1}{2}(7\beta^2+\mu)$, де $\beta\neq 0$ - довільний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} &20\beta^3+2\mu\beta-\lambda=0,\\ &21\beta^4+3\mu\beta^2+\nu=0; \end{aligned} \tag{13}$$

3) $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\gamma=-\frac{3}{10}\mu$, $\beta=0$, якщо $\lambda=0$ і $\nu=\frac{9}{100}\mu^2$.

Розглянемо спочатку перший випадок. Нехай $\beta_{1,2}=\pm\beta_1$ - два дійсні корені рівняння (12), $\gamma_{1,2}=-\frac{1}{2}(\beta_1^2+\mu\pm\frac{\lambda}{\beta_1})$ і $\alpha=-1$. Тоді (10) стане рівнянням з роздільними змінними

$$\frac{dz}{(z\mp\frac{\beta_1}{2})^2+\frac{1}{2}(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu\pm\frac{\lambda}{\beta_1})}=-d\zeta, \tag{10}$$

інтегруванням якого з врахуванням (7) і того, що $\chi=\int z\,d\zeta$, одержимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\cos a_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\sin a_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\cos a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\sin a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \tag{14$_1$}$$

якщо

$$a_1^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)>0,\qquad a_2^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)>0;$$

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{\beta_1}{2}+a_1\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big],\quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{\beta_1}{2}-a_1\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big],$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\cos a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\quad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\sin a_2\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \tag{14$_2$}$$

якщо

$$-a_1^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)<0,\qquad a_2^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)>0;$$

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{\beta_1}{2}+a_1\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big], \quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{\beta_1}{2}-a_1\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big], \tag{14_3}$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big], \quad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[-\Big(\frac{\beta_1}{2}+a_2\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big],$$

якщо $-a_1^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)<0, \qquad -a_2^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\Big)<0.$

У тому випадку, коли хоча б одне з чисел a_1, a_2 дорівнює нулеві, у формулах (14_k) ($k=1,2,3$) $y_i(x)$ ($i=1,2,3,4$) потрібно брати у вигляді

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big), \quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \tag{15_1}$$

якщо $a_1=0$;

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big), \quad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-\frac{\beta_1}{2}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \tag{15_2}$$

якщо $a_2=0$,

Нехай $\beta = p_1+iq_1$ – комплексний корінь рівняння (12). Тоді, використовуючи (10), аналогічно до попереднього одержимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big]\cos\Big(-\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big]\cos\Big(\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \tag{16}$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big]\sin\Big(-\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big[\Big(\frac{p_1}{2}-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big]\sin\Big(\frac{q_1}{2}+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

де

$$r=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_1^2-q_1^2}{2}+\mu+\frac{p_1\lambda}{p_1^2+q_1^2}\right)^2+q_1^2\left(p_1-\frac{\lambda}{p_1^2+q_1^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2q_1[p_1(p_1^2+q_1^2)-\lambda]}{(p_1^2+q_1^2)(p_1^2-q_1^2)+2\mu(p_1^2+q_1^2)+2\lambda p_1}.$$

У другому випадку система (13) буде мати хоча б один спільний корінь, якщо її результат

$$\begin{vmatrix} 20 & 0 & 2\mu & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 2\mu & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 2\mu & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 2\mu & -\lambda \\ 21 & 0 & 3\mu & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 3\mu & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 3\mu & 0 & \nu \end{vmatrix}=0. \qquad (17)$$

Нехай $\beta_1 \neq 0$ – дійсний розв'язок системи (13), $\gamma=-\frac{1}{2}(7\beta_1^2+\mu)$, $\alpha=-\frac{1}{2}$. Тоді, використовуючи (10), спочатку знаходимо (за виконання умов (5) і (17)) три лінійно незалежні розв'язки рівняння (2), що дає можливість (пониження порядку) знайти для цього рівняння і фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\cos\sqrt{6\beta_1^2+\mu}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right)\sin\sqrt{6\beta_1^2+\mu}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right),\qquad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left(-3\beta_1\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\right), \qquad (18_1)$$

якщо $6\beta_1^2+\mu>0$;

$$y_1(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\operatorname{ch}\sqrt{-(6\beta_1^2+\mu)}\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,\quad y_2(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\operatorname{sh}\sqrt{-(6\beta_1^2+\mu)}\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\qquad y_4(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-3\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\tag{18$_2$}$$

якщо $6\beta_1^2+\mu<0$;

$$y_1(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\Big(\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)^2,\quad y_2(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\qquad y_4(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(-3\beta_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big),\tag{18$_3$}$$

якщо $6\beta_1^2+\mu=0$.

Нехай $\beta=p_1+iq_1$ – комплексний розв'язок системи (13), $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\gamma=-\frac{1}{2}[7(p_1+iq_1)^2+\mu]$. Тоді, використовуючи (10), знаходимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5) і (17), таку фундаментальну систему розв'язків:

$$y_1(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\Big\{\exp\Big[\Big(p_1-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\cos\Big(q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau+$$
$$+\exp\Big[\Big(p_1+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\cos\Big(-q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big\},$$

$$y_2(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(p_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\cos q_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,\tag{19}$$

$$y_3(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\Big\{\exp\Big[\Big(p_1-\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\sin\Big(q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau-$$
$$-\exp\Big[\Big(p_1+\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big]\sin\Big(-q_1+\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big\},$$

$$y_4(x)=F^{\frac{3}{2}}(x)\exp\Big(p_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau\Big)\sin q_1\int_{x_0}^{x}F^{-1}(\tau)d\tau,$$

де

$$r=\big[36(p_1^2+q_1^2)^2+12\mu(p_1^2-q_1^2)+\mu^2\big]^{\frac{1}{2}},\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{12p_1q_1}{6(p_1^2-q_1^2)+\mu}.$$

Нарешті розглянемо третій випадок: $\alpha=-\frac{1}{5}$, $\beta=0$, $\gamma=-\frac{3}{10}\mu$, якщо разом з цим $\lambda=0$, $\nu=\frac{9}{100}\mu^2$. Тоді, враховуючи (10), одержимо для рівняння (2), коефіцієнти якого задовольняють умови (5), фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\cos\sqrt{\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\qquad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\sin\sqrt{\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\cos^3\sqrt{\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\qquad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\sin^3\sqrt{\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \tag{20_1}$$

якщо $\mu>0$;

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{ch}\sqrt{-\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\qquad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{sh}\sqrt{-\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{ch}^3\sqrt{-\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,\qquad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\,\mathrm{sh}^3\sqrt{-\tfrac{\mu}{10}}\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau, \tag{20_2}$$

якщо $\mu<0$;

$$y_1(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x),\qquad y_2(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau,$$

$$y_3(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\Big(\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)^2,\qquad y_4(x)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\Big(\int_{x_0}^{x}\xi^{-1}(\tau)d\tau\Big)^3, \tag{20_3}$$

якщо $\mu=0$.

Таким чином, умови (5) за довільного вибору достатньо неперервно диференційованої функції $\xi(x)$ і сталих μ, ν, λ дають можливість побудувати деякий клас лінійних однорідних звичайних рівнянь четвертого порядку виду (2), фундаментальна система розв'язків яких може бути знайдена у замкнутій формі. Легко переконатись, що цей клас рівнянь містить в собі рівняння зі сталими коефіцієнтами ($\xi(x)=1$) і рівняння Ейлера ($\xi(x)=x$.)

Зауважимо, що загальне лінійне однорідне рівняння четвертого порядку відомою заміною зводиться до рівняння виду (2).

Література

1. Костенко Е. С. О групповых свойствах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. – "Дифференциальные уравнения", 1972, т. 8, № 4.

2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.

3. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

УДК 517.94

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У цій роботі встановлено, що з одержаної в [1] сукупності лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантної відносно групи перетворень, з еліптичною траєкторією

$$\left\{\frac{m^2\psi_3}{2}-\frac{m[(m^2y^2-x^2)\psi_1-2mxy\psi_2]}{m^2y^2+x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$

$$+2\,\frac{2mxy\psi_1+(m^2y^2-x^2)\psi_2}{m^2y^2+x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+ \tag{1}$$

$$+\left\{\frac{\psi_3}{2}+\frac{(m^2y^2-x^2)\psi_1-2mxy\psi_2}{m(m^2y^2+x^2)}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{my\psi_4+x\psi_5}{\sqrt{m^2y^2+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+\frac{my\psi_5-x\psi_4}{m\sqrt{m^2y^2+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial y}+\psi_6 u-\psi_7=0,$$

де $\psi_1,\ldots,\psi_7$ – довільні функції від $m^2y^2+x^2$, можна виділити рівняння зі змінними коефіцієнтами, граничні задачі для яких у відповідних областях (еліпс, еліптичне кільце, зовнішність еліпса) розв'язуються в явному вигляді.

Наприклад, при $\psi_1 = \Psi_1$, $\psi_2 = \psi_4 = \psi_7 = 0$,

$$\psi_3 = \frac{2(1-m\psi_1)}{m^2}, \qquad \psi_5 = \chi - \frac{1-2m\psi_1}{\sqrt{m^2y^2+x^2}},$$

$$\psi_6 = \frac{\ell^2}{m^2y^2+x^2}(1-2m\psi_1) + \frac{1}{\psi^4}\left\{B + D\left[\int \frac{d(m^2y^2+x^2)}{\psi^2(m^2y^2+x^2)}\right]^{-2}\right\} - \tag{2}$$

$$-\frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi',$$

де ψ , χ – довільно задані функції від аргумента $m^2y^2+x^2$ B і D – довільні сталі, рівняння (1) перетворюється в

$$\left\{1 - m\psi_1 - \frac{m(m^2y^2-x^2)\psi_1}{m^2y^2+x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4mxy\psi_1}{m^2y^2+x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} +$$

$$+\left\{\frac{1-m\psi_1}{m^2} + \frac{(m^2y^2-x^2)\psi_1}{m(m^2y^2+x^2)}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x\left[\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\chi - (1-2m\psi_1)\right]}{m^2y^2+x^2}\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+\frac{y\left[\sqrt{m^2y^2+x^2}\,\chi - (1-2m\psi_1)\right]}{m^2y^2+x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \left\{\frac{\ell^2}{m^2y^2+x^2}(1-2m\psi_1) + \frac{B}{\psi^4} + \right. \tag{1$_1$}$$

$$\left. + \frac{D}{\psi^4}\left[\int \frac{d(m^2y^2+x^2)}{\psi^2(m^2y^2+x^2)}\right]^{-2} - \frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi'\right\}u = 0,$$

яке в системі координат $x = r\cos\varphi$, $y = \frac{2}{m}\sin\varphi$ матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}(1-2m\psi_1)\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \chi\frac{\partial u}{\partial r} + \left\{\frac{\ell^2}{r^2}(1-2\psi_1 m) + \frac{B}{\psi^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{D}{\psi^4}\left[\int \frac{dr}{\psi^2(r)}\right]^{-2} - \frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi'\right\}u = 0. \tag{3}$$

Якщо знаходити часткові розв'язки рівняння (3) у формі

$$U_l = R(r) e^{il\varphi}, \tag{4}$$

то для визначення $R(r)$ одержимо

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \chi(r)\frac{dR}{dr} + \left\{\frac{B}{\psi^4(r)} + \frac{D}{\psi^4(r)}\left[\int\frac{dr}{\psi^2(r)}\right]^{-2} - \frac{\psi''(r)}{\psi(r)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\chi^2(r) + \frac{1}{2}\chi'\right\} R = 0.$$

Останнє рівняння містить в собі дві довільно задані функції $\psi(r)$ та $\chi(r)$ і, як показано в [2], завжди зводиться до рівняння Бесселя.

Таким чином, для рівняння (1') розв'язки граничних задач у відповідних областях (еліпс, еліптичне кільце, зовнішність еліпса) будуть зображатись подвійними рядами по тригонометричних функціях та функціях Бесселя.

Аналогічно в рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{\frac{m^2\psi_2}{2} - \frac{m[(m^2y^2 - x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2]}{m^2y^2 + x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ 2\,\frac{2mxy\psi_1 + (m^2y^2 - x^2)\psi_2}{m^2y^2 + x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left\{\frac{\psi_3}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(m^2y^2 - x^2)\psi_1 - 2mxy\psi_2}{m(m^2y^2 + x^2)}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{my\psi_4 + x\psi_5}{\sqrt{m^2y^2 + x^2}}\frac{\partial u}{\partial x} + \psi_6 u = 0 \tag{5}$$

при $$\psi_6 = \frac{l^2}{x^2 + m^2y^2}(1 - 2m\psi_1) - \lambda + \frac{1}{\psi^4}\left\{B + D\left[\int\frac{d(x^2 + m^2y^2)}{\psi^2(x^2 + m^2y^2)}\right]^{-2}\right\} -$$

$$- \frac{\psi''}{\psi} + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi'$$

і тих же самих $\psi_1, \dots, \psi_5$, що й в (2), одержуємо рівняння в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, змішані задачі для яких у циліндричних областях з еліптичними напрямними можна зобразити потрійними рядами по тригонометричних функціях та функціях Бесселя.

Подібними міркуваннями можна в рівнянь вигляду (1) та (5) виділити рівняння в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, розв'язки граничних задач для яких будуть зображатись рядами з використанням вибраних спеціальних функцій.

Л і т е р а т у р а

1. К о с т е н к о В. Г., В е с е л о в с ь к а О. О. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1972, вип. 7.

2. М а н ж а л о в с к и й В. П. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях. Изд-во Харьковского ун-та, 1959.

УДК 518:512.35

Г.Г.Цегелик

ЗАСТОСУВАННЯ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ДЛЯ ВИДІЛЕННЯ ОБЛАСТЕЙ, В ЯКИХ КВАЗІПОЛІНОМИ НЕ ПЕРЕТВОРЮЮТЬСЯ В НУЛЬ

Розглянемо квазіполіном

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu\nu} z^{\mu} e^{-\lambda_\nu z}, \tag{1}$$

де $A_{\mu\nu}$ – довільні комплексні числа, а $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$.

Позначимо через E множину пар індексів (μ, ν), для яких $A_{\mu\nu}\neq 0$. Побудуємо в площині $\xi\eta$ точки $C_{\mu\nu}$ з координатами $\xi=\mu$, $\eta=\lambda_\nu$, $(\mu,\nu)\in E$, і позначимо через $\overline{Q}_f$ опуклу оболонку множини точок $C_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E$. Для кожної точки $C_{\mu\nu}\in\overline{Q}_f$ побудуємо в просторі $\xi\eta\zeta$ точку $P_{\mu\nu}(\mu, \lambda_\nu, -\ln a_{\mu\nu})$, де $a_{\mu\nu}=|A_{\mu\nu}|$. Опуклу оболонку множини точок $P_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in E$, позначимо через $\overline{\mathfrak{B}}_f$.

Нехай

$$\varkappa(\xi,\eta)=\inf_{(\xi,\eta,\zeta)\in\overline{\mathfrak{B}}_f}\zeta.$$

Тоді поверхню, яка описується в просторі $\xi\eta\zeta$ рівнянням

$$\zeta = \varkappa(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in \overline{Q}_f,$$

назвемо діаграмою Ньютона $\mathcal{V}_f$ квазіполінома (1).

З означення випливає, що діаграма Ньютона $\mathcal{V}_f$ є відкритою опуклою вниз багатогранною поверхнею.

Нехай

$$T_{\mu\nu} = exp[-\varkappa(\mu,\lambda_\nu)], \quad (\mu,\lambda_\nu)\in \overline{Q}_f.$$

Квазіполіном

$$\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{(\mu,\lambda_\nu)\in\overline{Q}_f} T_{\mu\nu} z^{\mu} e^{-\lambda_\nu z}$$

назвемо мажорантою Ньютона квазіполінома (1).

Легко бачити, що $T_{\mu\nu} > 0$, $(\mu,\lambda_\nu)\in \overline{Q}_f$ і $a_{\mu\nu} \le T_{\mu\nu}$.

Відношення

$$R_{k\ell} = \frac{T_{k-1,\ell}}{T_{k\ell}} \quad і \quad \widetilde{R}_{k\ell} = \left(\frac{T_{k,\ell-1}}{T_{k\ell}}\right)^{\frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1}}}$$

назвемо (k,ℓ)-ми числовими нахилами $\mathfrak{M}_f(z)$ відповідно в напрямі осей $O\xi$ і $O\eta$; відношення

$$D_{k\ell} = \frac{R_{k+1,\ell}}{R_{k\ell}} \quad і \quad \widetilde{D}_{k\ell} = \frac{\widetilde{R}_{k,\ell+1}}{\widetilde{R}_{k\ell}}$$

назвемо (k,ℓ)-ми відхиленнями $\mathfrak{M}_f(z)$ відповідно в напрямі тих же осей.

З опуклості вниз діаграми $\mathcal{V}_f$ випливає, що $D_{k\ell} \ge 1$ і $\widetilde{D}_{k\ell} \ge 1$ для всіх $(k,\lambda_\ell)\in\overline{Q}_f$. Зокрема, $D_{k\ell} > 1$ і $\widetilde{D}_{k\ell} > 1$, якщо точка $P_{k\ell}$ лежить у вершині $\mathcal{V}_f$.

Будемо надалі для простоти вважати, що многокутник $\overline{Q}_f$ збігається з прямокутником $\overline{P}$ з вершинами $A(0,0)$, $B(m,0)$, $C(m,\lambda_n)$ і $D(0,\lambda_n)$. Якщо це не так, то замість опуклої вниз багатогранної поверхні $\mathcal{V}_f$ – діаграми Ньютона, заданої на многокутнику $\overline{Q}_f$, можна розглядати опуклу вниз багатогранну поверхню $\mathcal{V}_f^*$, задану на прямокутнику $\overline{P}$. Причому на многокутнику $\overline{Q}_f$ поверхні $\mathcal{V}_f$ і $\mathcal{V}_f^*$ збігаються. Відповідно й мажоранту Ньютона (2) потрібно розглядати на прямокутнику $\overline{P}$.

Із зробленого припущення випливає, що коефіцієнти $\mathfrak{M}_f(z)$ визначені для всіх пар індексів (μ,ν) $(\mu=0,1,\ldots,m;\ \nu=0,1,\ldots,n)$.

Для визначення коефіцієнтів $\mathfrak{M}_f(z)$ через коефіцієнти квазіполінома (1) можна одержати формули аналогічно як і в [3].

Для коефіцієнтів $\mathfrak{M}_f(z)$ [1,2], числових нахилів і відхилень справедливі такі співвідношення:

$$\frac{T_{k+\mu,\ell}}{T_{k\ell}}=R_{k+1,\ell}^{-\mu}\prod_{i=1}^{\mu-1}D_{k+i,\ell}^{-\mu+i};\qquad \frac{T_{k-\mu,\ell}}{T_{k\ell}}=R_{k\ell}^{\mu}\prod_{i=1}^{\mu-1}D_{k-i,\ell}^{-\mu+i};$$

$$\frac{T_{k,\ell+\nu}}{T_{k\ell}}=\widetilde{R}_{k,\ell+1}^{-(\lambda_{\ell+\nu}-\lambda_\ell)}\prod_{j=1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{k,\ell+j}^{-(\lambda_{\ell+\nu}-\lambda_{\ell+j})}; \tag{3}$$

$$\frac{T_{k,\ell-\nu}}{T_{k\ell}}=\widetilde{R}_{k\ell}^{\lambda_\ell-\lambda_{\ell-\nu}}\prod_{j=1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{k,\ell-j}^{-(\lambda_{\ell-j}-\lambda_{\ell-\nu})}$$

де (k,ℓ) — деяка фіксована пара індексів, $(k,\lambda_\ell)\in\overline{P}$.

Нехай точка $P_{k\ell}$ лежить у вершині $\mathcal{V}_f^*$ $(0<k<m;\ 0<\ell<n)$ і два числа $u_{k\ell}>1$ та $v_{k\ell}>1$ такі, що

$$D_{k\ell}>u_{k\ell}^2>1,\quad \widetilde{D}_{k\ell}>v_{k\ell}^{2}>1. \tag{4}$$

Тоді завжди можна підібрати такі числа $p_{k\pm\mu,\ell}\geqslant 0$ $(\mu>0)$ і $q_{k\pm\mu,\ell\pm\nu}\geqslant 0$ $(\mu\geqslant 0,\nu>0)$, що для відхилень мажоранти Ньютона $D_{k+\mu,\ell}$ $(\mu=1,2,\ldots,m-k-1;\ D_{m\ell}=\infty)$; $D_{k-\mu,\ell}$ $(\mu=1,2,\ldots,k-1;\ D_{0\ell}=\infty)$, $\widetilde{D}_{k\pm\mu,\ell+\nu}$ $(\mu\geqslant 0,\ \nu=1,2,\ldots,n-\ell-1;\ \widetilde{D}_{k\pm\mu,n}=\infty)$ і $\widetilde{D}_{k\pm\mu,\ell-\nu}$ $(\mu\geqslant 0,$ $\nu=1,2,\ldots,\ell-1;\ \widetilde{D}_{k\pm\mu,0}=\infty)$ будуть виконуватись нерівності

$$\begin{aligned}&D_{k\pm\mu,\ell}\geqslant u_{k\ell}^{p_{k\pm\mu,\ell}}\geqslant 1,\\ &\widetilde{D}_{k\pm\mu,\ell\pm\nu}\geqslant v_{k\ell}^{q_{k\pm\mu,\ell\pm\nu}}\geqslant 1.\end{aligned} \tag{5}$$

Останні нерівності виконуються завжди, наприклад при $p_{k\pm\mu,\ell}=0$ і $q_{k\pm\mu,\ell\pm\nu}=0$.

Побудуємо таку функцію

$$H_{kl}(u,v)=\sum_{\substack{(\mu,\lambda_\nu)\in D\\(\mu,\nu)\neq(k,l)}} b_{\mu\nu}\, u^{\alpha_{\mu l}}\, v^{\beta_{\mu\nu}}-1,$$

де

$$b_{\mu\nu}=\begin{cases}\left(\widetilde{R}_{\mu l}/\widetilde{R}_{kl}\right)^{\lambda_l-\lambda_\nu} & \text{при} \quad \nu<l,\\ \left(\widetilde{R}_{k,l+1}/\widetilde{R}_{\mu,l+1}\right)^{\lambda_\nu-\lambda_l} & \text{при} \quad \nu>l,\\ 1 & \text{при} \quad \nu=l;\end{cases}$$

$$\alpha_{\mu l}=-|\mu-k|-\sum_{i=1}^{|\mu-k|-1}(|\mu-k|-i)\,p_{k+i\,\mathrm{sign}(\mu-k),l};$$

$$\beta_{\mu\nu}=-|\lambda_l-\lambda_\nu|-\sum_{j=1}^{|\nu-l|-1}(|\lambda_\nu-\lambda_{l+j\,\mathrm{sign}(\nu-l)}|)\,q_{\mu,l+j\,\mathrm{sign}(\nu-l)}.$$

Т е о р е м а. Якщо при $0<k<m$, $0<l<n$ для відхилень мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z)$ виконуються умови (4), (5), де (u_{kl}, v_{kl}) – розв'язок рівняння $H_{kl}(u,v)=0$ і перетин кільця $R_{kl}u_{kl}\le|z|\le\frac{R_{k+1,l}}{u_{kl}}$ зі смугою $-\ln\frac{\widetilde{R}_{k,l+1}}{v_{kl}}\le Re(z)\le-\ln\widetilde{R}_{kl}v_{kl}$ непустий, то квазіполіном (1) не перетворюється в нуль в області

$$\left\{R_{kl}u_{kl}\le|z|\le\frac{R_{k+1,l}}{u_{kl}},\ -\ln\frac{\widetilde{R}_{k,l+1}}{v_{kl}}\le Re(z)\le-\ln\widetilde{R}_{kl}v_{kl}\right\}. \qquad (6)$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що в деякій точці $z_0=x_0+iy_0$ області (6) $f(z_0)=0$. Тоді, позначивши $|z_0|=r_0$, одержимо

$$0\le-1+\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in E\\(\mu,\nu)\neq(k,l)}}\frac{a_{\mu\nu}}{a_{kl}}\,r_0^{\mu-k}e^{-x_0(\lambda_\nu-\lambda_l)}\le$$

$$\leq \sum_{(\mu,\lambda_\nu)\in\mathcal{P}} \frac{T_{\mu\nu}}{T_{kl}} z_0^{\mu-k} e^{-x_0(\lambda_\nu-\lambda_l)} - 2$$

Використавши формули (3) та умови (4), (5), і те, що

$$R_{kl} u_{kl} \leq z_0 \leq \frac{R_{k+1,l}}{u_{kl}}, \quad \widetilde{R}_{kl} v_{kl} \leq e^{-x_0} \leq \frac{\widetilde{R}_{k,l+l}}{v_{kl}},$$

одержимо протиріччя

$$0 = H_{kl}(u_{kl}, v_{kl}) > 0.$$

Аналогічно як і в [4] можна сформулювати теореми при $k=n$, $l=0$ і $k=n$, $l=m$ для визначення правої та лівої границі нулів квазіполіномів.

П р и к л а д. Розглянемо множину квазіполіномів $f(z)$, для яких

$$\mathfrak{M}_f(z) = 1 + 8z + z^2 + 8e^{-z} + 64ze^{-z} + 8z^2e^{-z} + \\ + e^{-2z} + 8ze^{-2z} + z^2e^{-2z} \qquad (7)$$

є мажорантою Ньютона.

Числові нахили та відхилення $\mathfrak{M}_f(z)$ відповідно в напрямі осей $O\xi$ і $O\eta$ такі:

$$R_{0\nu}=0,\ R_{1\nu}=\frac{1}{8},\ R_{2\nu}=8,\ R_{3\nu}=\infty,\ D_{0\nu}=D_{2\nu}=\infty,\ D_{1\nu}=64;$$

$$\widetilde{R}_{\mu 0}=0,\ \widetilde{R}_{\mu 1}=\frac{1}{8},\ \widetilde{R}_{\mu 2}=8,\ \widetilde{R}_{\mu 3}=\infty,\ \widetilde{D}_{\mu 0}=\widetilde{D}_{\mu 2}=\infty,\ \widetilde{D}_{\mu 1}=64,$$

де $\mu, \nu = 0, 1, 2$.

Приймемо $k = l = 1$. Функція $H_{11}(u,v)$ для даного прикладу набере вигляду

$$H_{11}(u,v) = -1 + b_{00}u^{-1}v^{-1} + b_{10}v^{-1} + b_{20}u^{-1}v^{-1} + b_{01}u^{-1} + \\ + b_{21}u^{-1} + b_{02}u^{-1}v^{-1} + b_{12}v^{-1} + b_{22}u^{-1}v^{-1}.$$

Обчисливши коефіцієнти $b_{\mu\nu}$, одержуємо рівняння

$$H_{11}(u,v)=-1+\frac{2}{u}+\frac{2}{v}+\frac{4}{uv}=0,$$

розв'язком якого, наприклад, буде пара чисел $u=6,\ v=4$.

Оскільки умови теореми виконуються, то одержуємо, що множина квазіполіномів $f(z)$, для яких функція (7) є мажорантою Ньютона, не перетворюється в нуль в області

$$\left\{\frac{3}{4}\le|z|\le\frac{4}{3},\ -\ln 2\le Re(z)\le\ln 2\right\}.$$

Література

1. Костовский А. Н. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львовского ун-та, 1967.

2. Костовський О. М., Цегелик Г. Г. Побудова мажорант та діаграм Ньютона рядів Діріхле. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1971, вип. 6.

3. Кардаш А. І., Костовський О. М., Чулик І. І. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. -"Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1967, вип. 3.

4. Цегелик Г. Г. Численный метод локализации нулей квазиполиномов. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1970, т. 10, № 4.

УДК 515.69

А.О.Кошетянський

СФЕРИЧНА КОЛІНЕАЦІЯ

Всім оптичним явищам, які опостерігаються в природі, притаманні відхилення від теоретичних основ геометричної оптики. Геометрична модель може лише з певним наближенням відтворити оптичний процес (схему). Але така модель або не враховує певні спотворення, викликані природними умовами процесу, або враховує їх з деяким наближенням. Тому в геометричні моделі цих процесів доцільно ввести доповнення, пропоновані в [1]. Зокрема в центральну колінеацію (одна з основних схем моделей оптичних процесів) вводиться поняття осередя колінеації. Осередя колінеації – це замінник центра у вигляді довільної геометричної форми. Осередя колінеації може бути: а) пряма або відрізок прямої; б) крива лінія або її дуга; в) поверхня або її частина.

Ми розглядатимемо випадок колінеації з осередям у вигляді сфери, тобто так звану сферичну колінеацію – аналог центральної точкової колінеації.

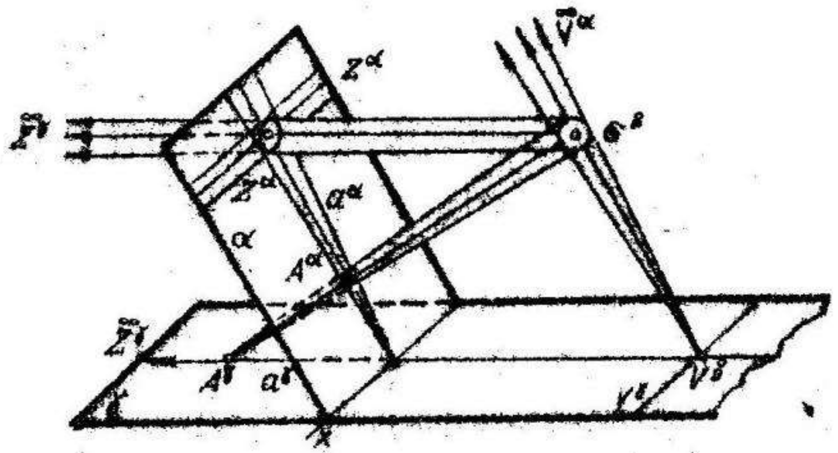

Рис.1. Просторова модель сферичного проектування.

Як видно з рис. 1, побудова відповідних елементів принципово не відрізняється від таких самих побудов у центральній проекції. Таку колінеацію можна прийняти за "інтегральну", що складається з сукупності всіх центральних колінеацій з центрами в границях сфери – осередя при незмінному положенні осі колінеації. У ній зберігаються три основні властивості:

1. Однозначність, тобто кожній точці однозначно відповідає пряма відповідної еліптичної форми і величини і навпаки, кожній прямі відповідної еліптичної форми і величини відповідає однозначно точка. Прямій відповідає однозначно відповідна збіжна смуга і навпаки, кожній збіжній смузі відповідає однозначно пряма.

2. Колінеарність, тобто кожна пара відповідних елементів, точка і її відповідна пряма, лежать у границях конуса, дотичного до спільної сфери, і кожна пара відповідних елементів, пряма і її відповідна збіжна смуга, перетинаються в точці на спільній прямій.

3. Інцидентність, тобто, якщо точка лежить на прямій, то відповідна їй пляма розміщена на смузі, що відповідає цій прямій, і якщо пряма проходить через точку, то смужка, що відповідає цій прямій, проходить дотично до плями, що відповідає точці.

Як висновок, що випливає із збереження вказаних властивостей, можна сформулювати теорему Дезарга для сферичної колінеації. Якщо у двох відповідних плоских фігурах, одна з яких обмежена збіжними на одній прямій смужками, пари відповідних елементів (пряма і збіжна смужка) перетинаються в точках на спільній прямій, тоді пари відповідних елементів - точка і відповідна їй пляма еліптичної форми - вміщуються в конусі, дотичному до спільної поверхні (сфери). Правомірна також і обернена теорема Дезарга.

Якщо в двох відповідних плоских фігурах, одна з яких обмежена збіжними на одній прямій смужками, пари відповідних елементів (точка і їй відповідна пляма еліптичної форми) вміщуються в конусі, дотичному до однієї поверхні (сфери), то пари відповідних сторін (пряма і їй відповідна смужка) перетинаються в точках на спільній прямій.

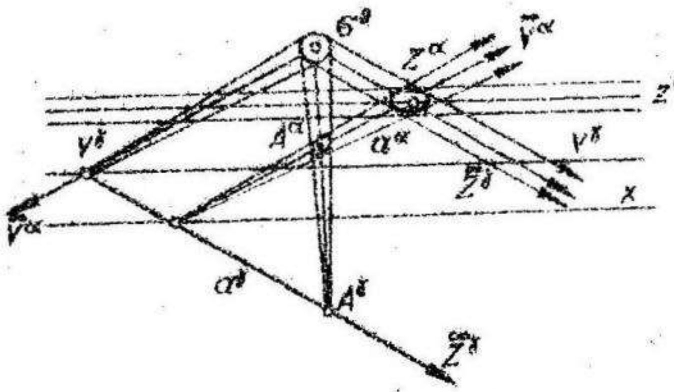

Рис.2. Гомологічна модель сферичного проектування.

Гомологічне відображення цієї колінеації показано на рис. 2. Залежно від механізму перетворення осередя (сфера) відображатиметься в пляму, обмежену кривою другого порядку, і, зокрема, колом, якщо центр сфери спроектований ортогонально (рис. 2).

Сферична колінеація може бути задана, як і центральна колінеація, вісьмома елементами. Але елементом вважається і кожна з плям (обмежена еліпсом визначеної величини). Наприклад, на рис. 2 показано колінеацію, задану осередям (G^γ), віссю (x) і парою A^α, A^γ. Наступні побудови, зокрема побудова граничних "прямих", відбуваються однозначно. Одна з граничних "прямих" матиме вигляд смужки висотою, що дорівнює малій осі еліпса перетину з площиною зображення проектуючого циліндра діаметром, рівним діаметру осереддя. Друга гранична пряма має вигляд прямої і може бути побудована як і в центральній колінеації з центром в центрі осереддя (сфери).

Отже, така колінеація може служити наближеною моделлю оптичного явища в більшості випадків побудови зображень в оці людини, а також реєструючих оптичних приладів, але без врахування додаткових спотворень-ілюзій.

Література

1. Копистинський А. О. Про геометрію оптичних ілюзій.- "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

УДК 513.015.6

С.В.Деменко

ПРО ОДИН КЛАС НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ

Нехай S - прямолінійна конгруенція, рівняння якої у векторній формі має вигляд

$$\bar{R}=\bar{z}(u^1,u^2)+\lambda\bar{m}(u^1,u^2),$$

де $\bar{m}$ - одиничний вектор і $\bar{z}(u^1,u^2)$ - радіус-вектор опорної поверхні, яку називатимемо поверхнею $\mathcal{P}$.

Розглянемо тепер прямолінійну конгруенцію S_ε, що визначається рівнянням

$$\bar{R}=\bar{z}(u^1,u^2)+\varepsilon\bar{a}(u^1,u^2)+\lambda\bar{m}(u^1,u^2),$$

де $\bar{a}(u^1,u^2)$ - деяка вектор-функція точки поверхні $\mathcal{P}$; ε - нескінченно малий параметр.

Нехай конгруенція S перетворюється в конгруенцію S_ε так, що для будь-яких u^1, u^2, λ точка (u^1, u^2, λ) конгруенції S переходить у точку (u^1, u^2, λ) конгруенції S_ε.

Для зручності лінійчасті поверхні конгруенції S, які при перетворенні конгруенції S в конгруенцію S_ε піддаються нескінченно малому згинанню, називатимемо поверхнями Φ, а їх лінії перетину з опорною поверхнею $\mathcal{P}$ – лініями φ.

Для того, щоб лінійчаста поверхня конгруенції S була поверхнею Φ необхідно і достатньо, щоб

$$\bar{m}\,d\bar{a} = 0, \quad d\bar{z}\,d\bar{a} = 0, \quad d\bar{m}\,d\bar{a} = 0, \tag{1}$$

де d – символ диференціювання вздовж лінії перетину лінійчастої поверхні з поверхнею $\mathcal{P}$.

Мають місце теореми.

Т е о р е м а 1. Кожна сім'я заданої на поверхні $\mathcal{P}$ сітки не може складатися з ліній φ, якщо: 1) поверхня $\mathcal{P}$ – фокальна поверхня конгруенції S; 2) у кожній точці поверхні $\mathcal{P}$ вектор $\bar{a}$ перебуває у дотичній до поверхні $\mathcal{P}$ площині; 3) жодна сім'я сітки з векторними лініями поля вектора α_i, трансверсального вектора поля вектора $\bar{a}$, не утворює ортогональної сітки.

Д о в е д е н н я. Зважаючи на 1), 2), умови (1) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{gathered} g_{ij}\nabla_z a^i m^j du^z = 0, \qquad g_{iz}\nabla_s a^i du^z du^s = 0, \\ (g_{ij}\nabla_z a^i \nabla_s m^j + \pi_{iz} a^i \pi_{js} m^j)\, du^z du^s = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

де g_{ij}, π_{ij} – відповідно перший та другий основні тензори поверхні $\mathcal{P}$; ∇_z – символ коваріантного диференціювання, яке здійснюється за допомогою тензора g_{ij}.

Нехай задана на поверхні $\mathcal{P}$ сітка складається з ліній φ. Вважатимемо, що ця сітка є координатною сіткою на поверхні $\mathcal{P}$. Тоді з перших двох рівнянь системи (2) матимемо

$$g_{ij}\nabla_1 a^i m^j = 0, \quad g_{ij}\nabla_2 a^i m^j = 0,$$
$$g_{i1}\nabla_1 a^i = 0, \quad g_{i2}\nabla_2 a^i = 0. \qquad (3)$$

Скористаємось тепер основним диференціальним рівнянням векторного поля на поверхні [1]:

$$\nabla_\gamma a^i = \alpha_\gamma \tilde{a}^i + A_\gamma a^i, \qquad (4)$$

де $\tilde{a}^i$ - доповняльний вектор вектора $\bar{a}$; A_γ - логарифмічний градієнт модуля вектора $\bar{a}$. З врахуванням (4) рівності (3) запишуться

$$\alpha_1 \tilde{a}^i m_i + A_1 a^i m_i = 0, \quad \alpha_2 \tilde{a}^i m_i + A_2 a^i m_i = 0,$$
$$\alpha_1 \tilde{a}_1 + A_1 a_1 = 0, \quad \alpha_2 \tilde{a}_2 + A_2 a_2 = 0. \qquad (5)$$

З перших двох рівностей системи (5), оскільки вектори $\bar{a}$, $\bar{\tilde{a}}$, $\bar{m}$ компланарні, маємо

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & A_1 \\ \alpha_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Згідно з вимогою (3) та умовою (6) дві останні рівності системи (5) можна зобразити у такому вигляді:

$$\tilde{a}_1 + \frac{A_1}{\alpha_1} a_1 = 0,$$
$$\tilde{a}_2 + \frac{A_1}{\alpha_1} a_2 = 0.$$

Звідки

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_1 & a_1 \\ \tilde{a}_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

що неможливо, бо вектори $\bar{\tilde{a}}$, $\bar{a}$ взаємно перпендикулярні.

Теорему доведено.

Т е о р е м а 2. Нехай: 1) конгруенція S утворена нормалями поверхні $\mathcal{P}$; 2) вектор зміщення $\bar{a}$ утворює на поверхні $\mathcal{P}$ поле вектора сталої довжини, векторні лінії якого разом з асимптотичними лініями поверхні $\mathcal{P}$ становлять ортогональну сітку; 3) лінії φ утворюють сітку.

Тоді: а) поверхня $\mathcal{P}$ - розгортна; б) одна сім'я ліній φ складається з трансверсалей поля вектора $\tilde{a}$; в) друга сім'я ліній φ складається з векторних ліній поля вектора $\tilde{a}$.

Д о в е д е н н я. Внаслідок вимог 1), 2) умови (1) запишуться таким чином:

$$\pi_{ij}\, a^i du^j = 0, \quad g_{is} \nabla_j a^s du^i du^j = 0, \qquad (7)$$
$$\pi_{is} \nabla_j a^s du^i du^j = 0.$$

З першої рівності системи (7), якщо врахувати вимогу 3), матимемо

$$\pi_{ij}\, a^i = 0. \qquad (8)$$

Звідки випливає, оскільки хоча б одна з координат a^1, a^2 відмінна від нуля, що

$$\pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 = 0,$$

а тому має місце а).

З врахуванням (4) і (8) друга та третя рівності системи (7) перепишуться у вигляді:

$$(\alpha_j \tilde{a}_i + A_j a_i)\, du^i du^j = 0, \qquad (9)$$
$$\pi_{is} \alpha_j \tilde{a}^s du^i du^j = 0.$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ сталої довжини, то

$$A_j = 0. \qquad (10)$$

Крім цього, з вимоги 2) виходить, що вектор $\tilde{\tilde{a}}$ дотикається асимптотичних ліній поверхні $\mathcal{P}$, яка є розгортною. Тому друга рівність системи (9) є тотожність.

Отже, лінії φ визначатиме тільки перша рівність системи (9). Ця рівність в силу (10) розпадається на дві рівності

$$\alpha_j du^j = 0, \quad \tilde{a}_i du^i = 0,$$

з яких і випливає справедливість тверджень б), в).

Т е о р е м а 3. Нехай поверхня $\mathcal{P}$ є фокальною поверхнею конгруенції S, а вектор зміщення $\bar{a}$ в кожній точці поверхні $\mathcal{P}$ нормальний до цієї поверхні. Тоді поверхня $\mathcal{P}$ – розгортна, а лінії φ на поверхні $\mathcal{P}$ є її прямолінійні твірні.

Доведення. Згідно з умовами теореми рівняння (I) запишуться

$$\begin{gathered}\pi_{ij} m^i du^j = 0, \qquad \pi_{ij} du^i du^j = 0, \\ \pi_{is}(\partial_j |\bar{a}| m^s - |\bar{a}| \nabla_j m^s) du^i du^j = 0.\end{gathered} \tag{II}$$

З другої рівності системи (II) випливає, що лінії φ є асимптотичними лініями на поверхні $\mathcal{P}$, а кожна лінія на поверхні $\mathcal{P}$ не може бути лінією φ, оскільки поверхня $\mathcal{P}$ не може бути площиною.

Нехай лінії φ утворюють сітку. Тоді з першої рівності системи (II) матимемо

$$\pi_{ij} m^i = 0,$$

звідки випливає, що

$$\pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 = 0.$$

У такому разі поверхня $\mathcal{P}$ – розгортна, що неможливо. Дійсно, на розгортній поверхні $\mathcal{P}$ асимптотичні лінії не утворюють сітки. А це суперечить нашому припущенню, що лінії φ утворюють сітку.

Нехай тепер лінії φ утворюють на поверхні $\mathcal{P}$ тільки одну однопараметричну сім'ю ліній. Розглянемо спочатку той випадок, коли перша рівність системи (II) не є тотожністю.

Оскільки лінії φ – асимптотичні лінії, з першої рівності системи (II) випливає, що вектор $\bar{m}$ дотикається лінії φ.

Внаслідок цієї ж рівності та основного рівняння векторного поля $\bar{m}$ третя рівність системи (II) перепишеться таким чином:

$$\mu_i \tilde{m}^s \pi_{sj} du^i du^j = 0.$$

Звідки, оскільки вектори $\bar{m}$, $\tilde{\bar{m}}$ не колінеарні, маємо

$$\mu_i du^i = 0,$$

а це означає, що трансверсалі векторного поля $\bar{m}$ є лініями φ.

Таким чином, вектор $\bar{m}$ дотикається лінії φ і переноситься паралельно вздовж цієї лінії. У такому разі лінії φ є геодезичними. Але вони також асимптотичні лінії. Тому лінії φ є прямими, що неможливо, бо вектор $\vec{m}$ дотикається лінії φ.

Якщо ж перша рівність системи (II) є тотожність, то, як було доведено вище, поверхня $\mathcal{P}$ – розгортна. Тому третя рівність системи (II) також тотожність.

Отже, тільки другою рівністю системи (II) визначатимуться лінії φ. Оскільки ця рівність визначає також асимптотичні лінії розгортної поверхні $\mathcal{P}$, то нашу теорему доведено.

Література

1. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.

УДК 539.385

О.П.Піддубняк

КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ШАРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО КРУГОВОЮ ЩІЛИНОЮ[x]

1. Розглядається осесиметрична контактна задача теорії пружності для шару, що займає область $-h_2 \le z \le h_1$, містить у площині $z=0$ внутрішню (радіусом $r \le a_0$) або зовнішню (радіусом $r \geq a_0$) плоску щілину і піддається крученню двома співвісними з щілиною плоскими штампами по ділянках $0 \le r \le a_1$, $z=h_1$ та $0 \le r \le a_2$, $z=-h_2$ за умови жорсткого зчеплення штампів з пружним тілом. Поверхні шару поза штампами і щілина вільні від навантажень. Підобласті $0 \le z \le h_1$ і $-h_2 \le z \le 0$ заповнені ізотропними матеріалами з модулями зсуву μ_1 і μ_2.

Задача зводиться до знаходження зміщень $u_\theta(r,z)=u(r,z)$, що задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \qquad u=\begin{cases} u_1 & z>0 \\ u_2 & z<0 \end{cases} \tag{1.1}$$

у відповідних областях при таких граничних умовах

$$u_i(r,z_i)=\varepsilon_i r, \quad 0 \le r < a_i, \quad \tau_{\theta z}^{(i)}(r,z_i)=0, \quad r>a_i \tag{1.2}$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(r,0)=0 \begin{cases} 0 \le r < a_0 & \text{- задача I} \\ r > a_0 & \text{- задача II} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\left(\lim_{r\to\infty} u_i(r,z)=0, \quad z_i=(-1)^{i+1}h_i, \quad i=1,2\right)$$

---

[x] Робота виконана під керівництвом проф. Д.В.Гриліцького.

і умовах спряження

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{\theta z}^{(1)}(r,0)=\tau_{\theta z}^{(2)}(r,0) \\ u_1(r,0)=u_2(r,0) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} (r>a_0 & \text{задача I}) \text{ або} \\ (0\le r\le a_0 & \text{задача II}) \end{array}, \tag{1.4}$$

де ε_1 і ε_2 - кути закручування штампів (задача I - випадок внутрішньої щілини, задача II - випадок зовнішньої щілини).

2. Використовуючи метод роботи [4], задачі I і II зводяться до регулярної системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, розв'язок якої шукається методом послідовних наближень.

Контактні напруження під штампами визначаються за формулою

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(r,z_i)=\frac{4\mu_i\rho_i}{\pi\sqrt{1-\rho_i^2}}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{i+j}\varepsilon_j\left[\Phi_{ij}^{(1)}-(1-2\rho_i^2)\Phi_{ij}^{(2)}-\frac{1}{3}(1+4\rho_i^2-8\rho_i^4)\Phi_{ij}^{(3)}\right],$$

$$\left(\rho_i=\frac{r}{a_i},\ 0\le r<a_i,\ i=1,2\right), \tag{2.1}$$

а коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень $\tau_{\theta z}$ у вершині щілини має вигляд [6]

$$K_{III}=\lim_{r\to a_0}\left[\sqrt{2\pi s}\,\tau_{\theta z}(r,0)\right]=4\mu_1\beta_2\sqrt{\frac{a_0}{\pi}}\sum_{n=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\varepsilon_i\Phi_{0i}^{(n)}. \tag{2.2}$$

При цьому кути повороту штампів ε_1, ε_2 зв'язані з моментами кручення M_1, M_2 співвідношенням

$$M_i=16a_i^3\mu_i\sum_{n=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{i+j}\frac{\Phi_{ij}^{(n)}\varepsilon_j}{2n+1}\qquad (i=1,2). \tag{2.3}$$

У формулах (2.1) - (2.3) позначено:

для задачі I

$$s=r-a_0, \tag{2.4}$$

$$\Phi_{ij}^{(1)}=\delta_{ij}+\frac{1}{3}F_{ij}^{(2)}\delta_j^3-\frac{1}{30}F_{ij}^{(4)}\delta_j^5+\frac{1}{840}F_{ij}^{(6)}\delta_j^7-\frac{4}{135}\beta_j F_{0i}^{(3)}F_{0j}^{(3)}\delta_0^5\delta_j^3+$$

$$+\sum_{n=1}^{2}\left\{\frac{1}{9}F_{in}^{(2)}F_{nj}^{(2)}\delta_n^3\delta_j^3-\frac{1}{90}\left[F_{in}^{(2)}F_{nj}^{(4)}(\delta_n^5\delta_j^3+\delta_n^3\delta_j^5)+F_{in}^{(4)}F_{nj}^{(2)}\delta_n^5\delta_j^3\right]\right\},$$

$$\Phi_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{18}\delta_i^2\delta_j^3\left(F_{ij}^{(4)} - 0{,}1F_{ij}^{(6)}\delta_j^2 + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{2}F_{in}^{(4)}F_{nj}^{(2)}\delta_n^3\right), \quad \Phi_{ij}^{(3)} = \frac{1}{360}F_{ij}^{(6)}\delta_i^4\delta_j^3,$$

$$\Phi_{0j}^{(1)} = \frac{2}{9}\delta_0\delta_j^3\left(F_{0j}^{(3)} - 0{,}1F_{0j}^{(5)}\delta_j^2 + \frac{1}{420}F_{0j}^{(7)}\delta_j^4 + \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{2}F_{0n}^{(3)}F_{nj}^{(2)}\delta_n^3\right),$$

$$\Phi_{0j}^{(2)} = -\frac{1}{45}\delta_0^3\delta_j^3\left(F_{0j}^{(5)} - 0{,}1F_{0j}^{(7)}\delta_j^2\right), \quad \Phi_{0j}^{(3)} = \frac{1}{1260}F_{0j}^{(7)}\delta_0^5\delta_j^3,$$

$$F_{00}^{(p)} = 2\left[\beta_1 J_p(d) + \beta_2 J_p(-d) - J_p(1)\right], \quad F_{0i}^{(p)} = 2\left[J_p(d_j) - J_p(-d_j)\right] \quad (i \neq j),$$

$$F_{ii}^{(p)} = (-1)^i 2\left\{\beta J_p\left[(-1)^i d\right] - J_p(1)\right\}, \quad F_{ij}^{(p)} = 4\beta_j J_p(0) \quad (i \neq j), \tag{2.4}$$

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-\beta)^m C_n^m \psi\left[n+1, p+1, \frac{1}{2}(1+x) + (n-m)d_1 + md_2\right]\frac{1}{\pi},$$

$$\psi(N,q,p) = \frac{q!}{2^{q+1}}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,N}(n+p)^{-q}, \quad C_{0,N} = 1, \quad C_{m,N} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left[k(N+1) - m\right]C_{m-k,N}$$

$$(m \geq 1), \quad \beta_i = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2, \quad d_i = \frac{h_i}{H}, \quad \delta_n = \frac{a_n}{H} \; (n = 0,1,2), \quad H = h_1 + h_2,$$

$$d = d_1 - d_2, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad i,j = 1,2;$$

для задачі II $\quad s = a_0 - 2$,

$$\Phi_{ij}^{(1)} = \delta_{ij}\left\{1 - \frac{\zeta(3)}{3\pi}\lambda_j^3 + \frac{\zeta(5)}{10\pi}\lambda_j^5 + \left[\frac{\zeta(3)}{3\pi}\right]^2\lambda_j^6 - \frac{3\zeta(7)}{112\pi}\lambda_j^7\right\} + \beta_j\left[\frac{\zeta(3,\frac{1}{2})}{3\pi}\right]^2\lambda_{0i}^3\lambda_j^3,$$

$$\Phi_{ij}^{(2)} = \delta_{ij}\left[\frac{\zeta(5)}{6\pi}\lambda_j^5 - \frac{\zeta(7)}{8\pi}\lambda_j^7\right], \quad \Phi_{ij}^{(3)} = \delta_{ij}\frac{\zeta(7)}{16\pi}\lambda_j^7,$$

$$\Phi_{0j}^{(1)} = \frac{\zeta(3,\frac{1}{2})}{3\pi}\lambda_j^3 - \frac{\zeta(5,\frac{1}{2})}{10\pi}\lambda_j^5 - \frac{\zeta(3)\zeta(3,\frac{1}{2})}{9\pi^2}\left[\lambda_j^6 + \sum_{n=1}^{2}(1-\beta_n)\lambda_j^3\lambda_{0n}^3\right] + \frac{3\zeta(7,\frac{1}{2})}{112\pi}\lambda_j^7,$$

$$\Phi_{0j}^{(2)} = -\frac{\zeta(5,\frac{1}{2})}{6\pi}\lambda_j^5 + \frac{\zeta(7,\frac{1}{2})}{8\pi}\lambda_j^7, \quad \Phi_{0j}^{(3)} = \frac{\zeta(7,\frac{1}{2})}{16\pi}\lambda_j^7, \tag{2.5}$$

$$\lambda_j = \frac{a_j}{h_j}, \quad \lambda_{0j} = \frac{a_0}{h_j}, \quad i,j = 1,2, \quad \zeta(k,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-k}, \quad \zeta(k,1) = \zeta(k).$$

У формулах (2.4) і (2.5) знехтувано величинами малості $o(\delta^9)$ і $o(\lambda^8)$ де $\delta = \max\limits_{j=0,1,2}\{\delta_j\}$, $\lambda = \max\limits_{n=1,2}\{\lambda_n, \lambda_{on}\}$. Параметри δ_j і λ_n, λ_{on} задовольняють умовам

$$\frac{4}{9}\left[F_{00}^{(4)}\right]^2 \delta_0^{10} + \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{4}{9}\left[\delta_i^6 + (1-\beta_i)^2\right]\left[F_{0i}^{(3)}\right]^2 \delta_0^{8} + \sum_{j=1}^{2}\left[F_{ij}^{(2)}\right]^2 \delta_j^6\right\} < 1 \quad \text{(задача I)} \qquad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{\left[1 + \frac{49}{64}(1-\beta_i)^2\right]\lambda_i^6 + \left[\frac{49}{64} + (1-\beta_i)^2\right]\lambda_{0i}^6\right\} < \left[\frac{\pi}{8\zeta(3)}\right]^2 \quad \text{(задача II)} \qquad (2.7)$$

В умовах крихкого руйнування фіксована щілина стає рухомо-рівноважною тріщиною, радіус a_0^* якої знаходиться з рівняння [3]

$$\sqrt{8a_0^*}\,\mu_1 \beta_2 \sum_{n=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\varepsilon_i \Phi_{0i}^{(n)} + L = 0, \qquad (2.8)$$

де L – стала, залежна від пружних характеристик шару.

За певних значень $a_0, a_1, a_2, h_1, h_2, \mu_1, \mu_2$ одержуються деякі нові та відомі результати [1,2,4,5]. Задачі значно спрощуються у випадку однорідного пружного шару ($\beta = 0$).

3. Для ілюстрації розв'язку задач наводиться приклад, коли $h_1 = h_2$, $a_0 = a_1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $M_2 = 0$. Табл. 1 характеризує залежність кутів повороту штампів $\theta_i = \varepsilon_i / \varepsilon_\infty$ від параметрів λ_i $(i = 1, 2)$. Тут $\varepsilon_\infty = M_1 / (\frac{16}{3}\mu a_1^3)$ – кут, що відповідає задачі кручення однорідного півпростору [7], $\lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_{02} = 2\delta_0 = 2\delta_1$, $\lambda_2 = 2\delta_2$. В табл. 2 подано значення коефіцієнтів інтенсивності дотичних напружень у площині щілини $K_0 = (\sqrt{\pi}/4\mu\sqrt{a_0})(K_{III}/\varepsilon_\infty)$ та під штампами $K_i = (\sqrt{\pi}/4\mu\sqrt{a_i}) \cdot \sum_{n=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{i+j}\theta_j \Phi_{ij}^{(n)}$ $(i = 1, 2)$ залежно від параметрів λ_1 і λ_2.

Таблиця 1

Значення кутів повороту штампів залежно від параметрів λ_i

λ_1	λ_2	Задача I		Задача II	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
0,1	0,1	1,0000	0,0000	1,0001	0,0000
0,1	0	1,0000	–	1,0001	–
0,2	0,2	1,0000	0,0003	1,0001	0,0012
0,2	0	1,0000	–	1,0001	–
0,4	0,4	1,0001	0,0032	1,0037	0,0121
0,4	0	1,0001	–	1,0036	–
0,8	0,8	1,0006	0,0238	0,9314	0,1097
0,8	0	1,0034	–	0,9193	–

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів інтенсивності напружень залежно від параметрів λ_i

λ_1	λ_2	Задача I			Задача II		
		K_0	K_1	K_2	K_0	K_1	K_2
0,1	0,1	0,0000	1,0000	0,0000	0,0005	1,0000	0,0000
0,1	0	0,0000	1,0000	–	0,0005	1,0000	–
0,2	0,2	0,0005	1,0000	0,0001	0,0035	1,0000	0,0011
0,2	0	0,0005	1,0000	–	0,0035	1,0000	–
0,4	0,4	0,0047	0,9995	0,0004	0,0334	1,0004	0,0071
0,4	0	0,0055	0,9995	–	0,0338	1,0004	–
0,8	0,8	0,3726	0,9976	0,0002	0,9711	1,0080	0,0011
0,8	0	0,3876	1,0000	–	1,2911	1,0087	–

Література

1. Грилицький Д. В. Кручення двошарового пружного середовища. – "Прикладна механіка", 1961, т. 7, вип. 1.

2. Проценко В. С. Кручение упругого полупространства, ослабленного плоской круглой щелью. – "Известия АН СССР, МТТ", 1969, № 6.

3. Салганик Р. Л. Об осесимметричных трещинах продольного сдвига. – ПМТФ, 1962, № 3.

4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., "Наука", 1967.

5. Уфлянд Я. С. Кручение упругого слоя двумя штампами. - ДАН СССР, 1969, т. 186, № 5.

6. Irwin L. R. Fracture. Handbuch der Physik. Bd. 6. Springer-Verlag, Berlin, 1958.

7. Reissner E., Sagoci H. F. Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space, I. J. Appl. Phys. 1944, v. 15, N 9.

УДК 539.311

Г.Т.Сулим

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ НА ТОНКОСТІННОМУ ВКЛЮЧЕННІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ[x]

1. Розглянемо пружну рівновагу двох спаяних ізотропних півплощин з різних матеріалів з тонкостінним пружним включенням довжиною 2α і товщиною $2h$, що розміщене на прямій лінії спаю матеріалів під дією двох зосереджених сил $Q_1 = -iq_1$ та $Q_2 = iq_2$, прикладених відповідно у точках $-id$, id (рис. 1).

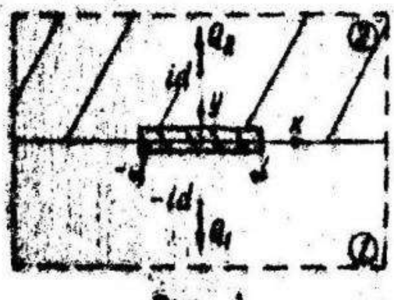

Рис. 1

Зазначимо, що постановка задачі, формули для обчислення характеристик напруженого стану і числовий аналіз за допомогою зображення розв'язку інтегро-диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду для випадку однорідного поля напружень на безмежності наведені в [4]. Аналогічна задача у менш загальній постановці розглядається в [5].

Стосовно цієї задачі в [4] маємо ключове рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = n\alpha\int_{-1}^{x}\varphi(t)\,dt + \Phi(x) \qquad (|x|\le 1), \qquad (1.1)$$

а також співвідношення для визначення напружень на лінії $y=0$

[x] Робота виконана під керівництвом проф. Д.В.Грилицького.

$$\sigma_{x1}(\alpha x) = 2n_{12}T(x) + M_1(x); \qquad \sigma_{x2}(\alpha x) = 2n_{21}T(x) + M_2(x);$$

$$\sigma_{y1}(\alpha x) = \sigma_{y2}(\alpha x) = m_{12}T(x) + M_3(x) \qquad (|x| < \infty), \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy1}(\alpha x) = \begin{cases} c_{12}\varphi(x) + M_4(x) & (|x| \le 1), \\ M_4(x) & (|x| > 1), \end{cases} \qquad \tau_{xy2}(\alpha x) = \begin{cases} \tau_{xy1}(\alpha x) - \varphi(x) & (|x| \le 1), \\ \tau_{xy1}(\alpha x) & (|x| > 1), \end{cases}$$

де

$$M_1(x) = m_1 J_1(x) + m_2 J_3(x); \qquad M_2(x) = m_3 J_1(x) + m_4 J_3(x); \tag{1.3}$$

$$M_3(x) = m_5 J_1(x) + m_6 J_3(x); \qquad M_4(x) = m_7 J_2(x) + m_8 J_4(x);$$

$$\Phi(x) = N\beta + m_9 J_1(x) + m_{10} J_3(x); \qquad T(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - x};$$

$$J_1(x) = \frac{\beta}{x^2+\beta^2}; \quad J_2(x) = \frac{x}{x^2+\beta^2}; \quad J_3(x) = \frac{\beta^3}{(x^2+\beta^2)^2}; \quad J_4(x) = \frac{x\beta^2}{(x^2+\beta^2)^2};$$

$$\beta = \frac{k_0}{B'}, \quad n = \frac{\beta}{2h}; \quad B' = \frac{c_1 \varkappa_2 + c_2 \varkappa_1}{4 c_1 c_2} + \frac{k_1 m_{12}}{2}; \quad k_0 = \frac{1}{E\delta k}; \quad k_1 = \frac{\nu_{\delta k}}{E\delta k}; \quad \beta = \frac{d}{\alpha};$$

$$m_1 = n_{12}g_3 + p_{12}g_{21} + q_{21}g_{11} + v_{212}g_{24} + v_{112}g_{14} + \frac{1}{2}(u_{212}g_{22} - u_{112}g_{12} + q_{12});$$

$$m_2 = n_{12}g_4 + p_{12}g_{22} + q_{21}g_{12} + v_{212}g_{22} + v_{112}g_{12} - u_{212}g_{22} + u_{112}g_{12};$$

$$m_3 = n_{21}g_3 + p_{21}g_{11} + q_{12}g_{21} + v_{221}g_{24} + v_{121}g_{14} + \frac{1}{2}(-u_{221}g_{22} + u_{121}g_{12} + q_{12})$$

$$m_4 = n_{21}g_4 + p_{21}g_{12} + q_{12}g_{22} + v_{221}g_{22} + v_{121}g_{12} + u_{221}g_{22} - u_{121}g_{12};$$

$$m_5 = \frac{1}{2}(m_{12}g_3 + \ell_{22}g_{24} + \ell_{21}g_{14} + c_{21}g_{11} + c_{12}g_{21}) + \frac{1}{4}(\ell_{12}g_{22} - \ell_{11}g_{12});$$

$$m_6 = \frac{1}{2}(m_{12}g_4 + \ell_{22}g_{22} + \ell_{21}g_{12} + c_{21}g_{12} + c_{12}g_{22} - \ell_{12}g_{22} + \ell_{11}g_{12});$$

$$m_7 = \frac{1}{2}(m_{12}g_1 - c_{12}g_{21} - c_{21}g_{11}) + \frac{1}{4}(\ell_{12}g_{23} + \ell_{11}g_{13});$$

$$m_8 = \frac{1}{2}(m_{12}g_2 - c_{12}g_{22} - c_{21}g_{12} + \ell_{12}g_{22} + \ell_{11}g_{12} - \ell_{22}g_{22} + \ell_{21}g_{12});$$

$$m_9 = -g_3 - d_6 g_{11} - d_5 g_{21} + \frac{1}{2}(d_2 g_{24} + d_1 g_{14} - d_3 g_{22} - d_4 g_{12});$$

$$m_{10} = -g_4 - d_6 g_{12} - d_5 g_{22} + \frac{1}{2}(d_2 g_{22} + d_1 g_{12}) + d_3 g_{22} + d_4 g_{12};$$

$$u_{ijk} = \frac{e_{jk}}{2\sqrt{\mu_i}}; \quad v_{ijk} = \frac{z_{jk}}{8\sqrt{\mu_i}}; \quad \ell_{ij} = \frac{\ell_i}{2\sqrt{\mu_j}}; \quad z_{ij} = 2\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}\left(\frac{3}{c_i} - \frac{1}{c_j}\right),$$

$$e_{ij} = \frac{\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{2}\left(\frac{3}{c_i} + \frac{1}{c_j}\right); \qquad q_{ij} = -\left(\frac{\sqrt{\mu_j}}{c_j} + \frac{c_{ij}}{2}\right);$$

$$p_{ij} = \frac{\sqrt{\mu_i}}{c_i} - \frac{c_{ij}}{2}; \qquad c_{ij} = \sqrt{\mu_i}\,\frac{c_j + c_i \varkappa_j}{2c_1 c_2};$$

$$m_{ij} = \sqrt{\mu_i}\,\frac{c_j - c_i \varkappa_j}{c_1 c_2}, \qquad n_{ij} = \sqrt{\mu_i}\,\frac{3c_j + c_i \varkappa_j}{2c_1 c_2};$$

$$z = \frac{c_2 \varkappa_1 - c_1 \varkappa_2}{4c_1 c_2}; \qquad \ell_1 = \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right);$$

$$\ell_2 = \sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right); \quad g_{i1} = \frac{2q_i e_i(\varkappa_i - 1)}{\alpha}; \quad g_{i2} = \frac{8q_i e_i}{\alpha}; \quad g_{i3} = g_{i2}\varkappa_i;$$

$$g_{i4} = 2g_{i1}; \quad e_i = \frac{1}{2\pi(1+\varkappa_i)}, \quad \varkappa_i = \frac{3-\nu_i}{1+\nu_i}; \quad g_1 = \frac{g_{12} - g_{11} + g_2}{2};$$

$$g_2 = \frac{g_{22} - g_{12}}{2}, \quad g_3 = -\frac{g_{11} + g_{21} + g_4}{2}; \quad g_4 = -\frac{g_{12} + g_{22}}{2}; \quad d_1 = \frac{m_{21} - 2k_1\ell_2}{4\sqrt{\mu_1}B'},$$

$$d_2 = \frac{m_{21} - 2k_1\ell_2}{4\sqrt{\mu_2}B'}; \quad d_3 = \frac{c_{21} + k_1\ell_1}{4\sqrt{\mu_2}B'}; \quad d_4 = \frac{c_{12} - k_1\ell_1}{4\sqrt{\mu_1}B'}; \quad d_5 = \frac{c_{12}k_1 - z}{2B'};$$

$$d_6 = \frac{c_{21}k_1 + z}{2B'}; \quad c_1 = \sqrt{\mu_1} + \varkappa_1\sqrt{\mu_2}; \quad c_2 = \sqrt{\mu_2} + \varkappa_2\sqrt{\mu_1} \quad (i, j, k = 1, 2).$$

Розв'язок рівняння (1.1) повинен задовольняти умову

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt = 0. \qquad (1.4)$$

Для знаходження величини N, що характеризує σ_x на торці включення, використаємо співвідношення

$$N = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\mu_{6k}}{\mu_1}}\,M_1(x) + \sqrt{\frac{\mu_{6k}}{\mu_2}}\,M_2(x)\right]\Bigg|_{x=1}. \qquad (1.5)$$

Формула (2.15) в [4] дає для значення N величину, яка дорівнює середньому значенню $\sigma_x(1-0)$ для випадку абсолютно жорсткого включення, тому використання (1.5) виявляється набагато доцільнішим.

2. Внаслідок силової симетрії задачі функція $\varphi(x)$ повинна бути непарною. Тоді умова (1.4) задовольняється автоматично і розв'язок рівняння (1.1) шукаємо у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{j=0}^{\infty} A_j T_{2j+1}(x), \qquad (2.1)$$

де $T_j(x)$ - поліноми Чебишева першого роду.

Підставляючи (2.1) в (1.1) і використовуючи залежності

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_j(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-x)} = \begin{cases} 0 & (j=0); \\ \pi U_{j-1}(x) & (j\geq 1); \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} U_i(t)U_j(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \begin{cases} 0 & (i\neq j); \\ \frac{\pi}{2} & (i=j), \end{cases}$$

одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження шуканих коефіцієнтів A_j

$$\Phi_k = \frac{\pi}{2}A_k + \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{kj}A_j, \qquad (k=0,1,\ldots) \qquad (2.2)$$

де

$$\Phi_k = \int_{-1}^{1}\Phi(t)\,U_{2k}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt; \qquad \alpha_{kj} = \int_{-1}^{1} H_{2j+1}(t)\,U_{2k}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt;$$

$$H_{2j+1}(x) = -n\int_{-1}^{x}\frac{T_{2j+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt;$$

$U_j(x)$ - поліноми Чебишева другого роду.

Легко переконатися, що

$$\alpha_{kj} = -\frac{4n(2k+1)}{[(2k+1)^2-4j^2][(2k+1)^2-(2j+2)^2]};$$

$$\Phi_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(N\ell + m_9 H_0 + m_{10} G_0) & (k=0); \\ \frac{\pi}{2}(m_9 H_k + m_{10} G_k) & (k \geq 1), \end{cases} \qquad (2.3)$$

де

$$H_k = 2e^k\sqrt{-e}; \quad G_k = \frac{16\beta^3 e^2(1-e)^2}{(1-e^2)^3}[k(1+e)+1]e^k; \quad e = -(\sqrt{1+\beta^2}-\beta)^2.$$

З (2.1) бачимо, що $\varphi(x)$, а отже $\tau_{xyj}(\alpha x)$ $(j=1,2)$ на кінцях інтервалу $[-1,1]$ мають особливість виду $(\sqrt{1-x^2})^{-1}$. У формулах (1.2) для нормальних напружень фігурує інтеграл $T(x)$, який можна записати

$$2T(x) = \begin{cases} n\int\limits_{-1}^{x}\varphi(t)dt + \Phi(x) & (|x| \leq 1); \\ -in\int\limits_{-1}^{x}\varphi(t)dt + i\,\mathrm{sign}(x)\,\varphi(x) + \Phi(x) & (|x| > 1), \end{cases} \qquad (2.4)$$

де $\varphi(x)$ зображена формулою (2.1).

Звідси випливає, що $\sigma_{yj}(\alpha x)$, $\sigma_{xj}(\alpha x)$ $(j=1,2)$ при $x \in [-1,1]$ обмежені, а при підході x до точок ± 1 зовні $[-1,1]$ мають особливість виду $(\sqrt{x^2-1})^{-1}$. Згідно з (1.2), (2.1) та (2.4) коефіцієнти інтенсивності напружень, що визначаються формулами

$$k_{1j} = \lim_{x \to 1}\sqrt{x-1}\,\sigma_{yj}(\alpha x), \quad k_{2j} = \lim_{x \to 1}\sqrt{x-1}\,\sigma_{xj}(\alpha x) \quad (|x| > 1); \quad (j=1,2)$$

$$k_{3j} = \lim_{x \to 1}\sqrt{1-x}\,\tau_{xyj}(\alpha x) \qquad (|x| \leq 1),$$

запишуться

$$k_{10} = \frac{1}{2}m_{12}k; \quad k_{21} = -n_{12}k; \quad k_{22} = -n_{21}k; \quad k_{31} = c_{12}k; \quad k_{32} = -c_{21}k, \qquad (2.5)$$

де

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{\infty} A_j.$$

3. Система рівнянь (2.2) при довільних пружних характеристиках матеріалів є квазірегулярною [3], тому її можна розв'язувати методом редукції. Числовий аналіз на ЕОМ показав, що для точності 1% достатньо взяти 10 членів ряду (2.1). Досягнення подібної точності методом, запропонованим в [1], [4], виявилося практично неможливим.

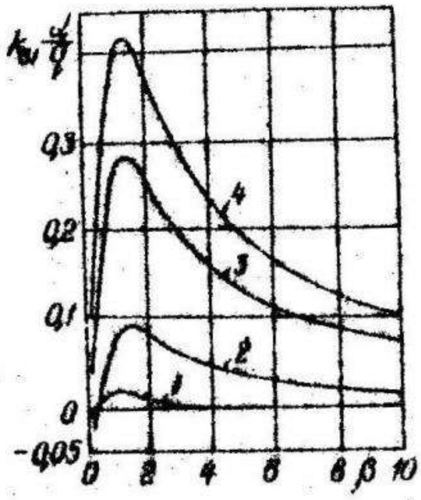

Рис.2

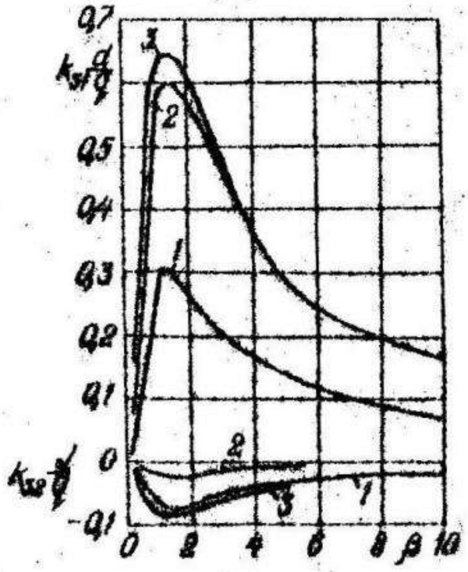

Рис.3

На рис. 2,3 наведені графіки залежності k_{31}, k_{32} від віддалі точки прикладання зосереджених сил, обчислені при $\frac{\ell}{h}=10$, $\nu_1=\nu_2=\nu_{0k}=\frac{1}{3}$, $q_1=q_2=q$ та різних співвідношеннях модулів Юнга матеріалів $\frac{E_1}{E_2}=\lambda$, $\frac{E_{0k}}{E_1}=k$. Криві 1-4 рис. 2 для k_{31} при $\lambda=1$ $(k_{32}=-k_{31})$ відповідають значенням $k=1$, $k=2$, $k=10$, $k\geqslant 100$. На рис. 3 криві для k_{31}, k_{32} характеризуються такими параметрами: $1-\lambda=5$, $k=2$; $2-\lambda=50$; $k=2$; $3-\lambda=10$, $k=10$.

Література

1. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. - "Прикладная математика и механика", 1968, т. 32, вып. 4.

2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., "Наука", 1971.

3. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.- "Прикладная математика и механика", 1970, т. 34, вып. 3.

4. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Напряженное состояние кусочно однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. - "Прикладная механика", 1972, т. УШ, вып. П.

5. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. - "Известия АН АрмССР, Механика", 1970, т. XXШ, № 3.

УДК 539.311

В.К.Опанасович

ПРО ОДИН ВИПАДОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ЩІЛИНОЮ ПО ДУЗІ КОЛА

Розглянемо необмежену ізотропну пластинку, послаблену щілиною вздовж дуги (ab) одиничного кола. Припустимо, що під дією зосередженої сили, прикладеної в центрі даного кола, береги щілини вступають у гладкий контакт по всій її довжині. Визначимо напружений стан у пластинці.

Початок декартової системи координат xOy виберемо в центрі одиничного кола, а вісь x направимо через середину дуги (ab), яку позначимо через L. Тоді кінці щілини в комплексній площині будуть характеризуватись точками $a=e^{-i\varphi}$, $b=e^{i\varphi}$.

Отже, маємо такі граничні умови задачі

$$\tau\tau^{+}=\tau\tau^{-}=\tau\tau, \quad \tau\vartheta^{+}=\tau\vartheta^{-}=0 \quad \text{на} \quad L, \tag{1}$$

$$v_{\tau}^{+}-v_{\tau}^{-}=0 \quad \text{на} \quad L. \tag{2}$$

Тут і надалі знаком "+" позначено граничні значення відповідних величин на лівому березі щілини, а знаком "-" - на правому березі, якщо рухатися по щілині від точки a до b.

Для розв'язання задачі введемо функції напружень Колосова-Мусхелішвілі $\varphi(z)$ і $\psi(z)$. Тоді, наслідуючи [2], для компонент вектора переміщень і тензора напружень матимемо

$$e^{-i\vartheta}\left[\varkappa\varphi(z)-\omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)-\left(z-\frac{1}{\bar z}\right)\overline{\varphi'(z)}\right]=2\mu(v_r+iv_\theta), \tag{3}$$

$$\varphi(z)+\omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)+\left(z-\frac{1}{\bar z}\right)\overline{\varphi'(z)}=\int_{z_0}^{z}(\sigma_r+i\tau_{r\vartheta})\,dt, \tag{4}$$

де

$$\omega(z)=z\bar\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)+\bar\psi\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z=|z|e^{i\vartheta}.$$

Використовуючи (4), з (I) одержуємо

$$[\varphi(t)-\omega(t)]^{+}-[\varphi(t)-\omega(t)]^{-}=0 \qquad t\in L. \tag{5}$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (5) має вигляд

$$\omega(z)=\varphi(z)+\rho(z), \tag{6}$$

де

$$\rho(z)=-\bar P z^2+(1-\varkappa)P\ln z+\bar A_1 z+D_2; \tag{7}$$

D_2 – невідома постійна; A_1 – значення в нулі функції $\varphi'(z)+\frac{P}{z}$; $P=\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}$, X і Y – проекції зосередженої сили на осі x і y.

Якщо ввести нову функцію

$$F(z)=\frac{\varphi(z)}{z}, \tag{8}$$

то на основі (I) і (2), з врахуванням (3), (4) і (6), одержимо, що вона задовольняє граничні умови

$$F^{+}(t)+F^{-}(t)=f(t)-\frac{\rho(t)}{t} \qquad t\in L, \tag{9}$$

$$[F(t)-\bar F(t)]^{+}-[F(t)-\bar F(t)]^{-}=0 \quad t\in L, \tag{10}$$

де

$$f(t)=\frac{1}{t}\int_a^t \tau_{r\vartheta}\,dt.$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (10), дістанемо

$$F(z)-\bar F\left(\frac{1}{z}\right)=-\bar A_1-\frac{P}{z}\ln z-\bar P z\ln z. \tag{11}$$

Враховуючи (9), з (11) одержимо

$$\frac{1}{t}\int_{a}^{t} z\bar{z}\,dt + t\int_{a}^{t}\frac{z\bar{z}}{t^2}\,dt = \frac{D_2}{t} - \bar{D}_2 t + \frac{P}{t} - \bar{P}t -$$

$$- A_1 - \bar{A}_1 - (1+\varkappa)\left(\frac{P}{t} + \bar{P}t\right)\ln t. \qquad (12)$$

Розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$z\bar{z} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(A_1 + \bar{A}_1)\ln t - (1+\varkappa)\left(\frac{P}{t} + \bar{P}t\right), \qquad (13)$$

де A - невідома дійсна постійна.

Беручи до уваги, що $z\bar{z}$ - дійсна величина, з (13) маємо

$$Re\,A_1 = 0.$$

Згідно з [1] і (12), запишемо

$$f(t) = \frac{1}{2}A + \frac{D_2}{t} - \frac{(1+\varkappa)P\ln t}{t} - \frac{(1+\varkappa)\bar{P}t}{2} + \frac{(1-\varkappa)P}{2t}. \qquad (14)$$

Підставляючи (14) у (9) і розв'язуючи відповідну задачу лінійного спряження, знаходимо

$$F(z) = -\frac{P}{z}\ln z + F_0(z) = -\frac{P}{z}\ln z + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}A - \bar{A}_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\varkappa}{2}\left(\frac{P}{z} + \bar{P}z\right)\right] + \frac{1-\varkappa}{4}\left(\frac{P}{z} - \bar{P}\right)X_0(z), \qquad (15)$$

де

$$X_0(z) = \sqrt{z^2 - 2z\cos\varphi + 1}.$$

Для визначення невідомих постійних A і A_1 скористаємося умовами

$$F_0(\infty) = 0, \qquad F_0(0) = A_1,$$

які з урахуванням (15), наберуть вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}\bar{A}_1 + \frac{1-\varkappa}{4}(\bar{P} + P\cos\varphi) = A_1, \\ &\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}\bar{A}_1 + \frac{1-\varkappa}{4}(P + \bar{P}\cos\varphi) = 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Розв'язавши систему (16), одержимо

$$A_1 = i\frac{Y(\varkappa-1)}{2\pi(1+\varkappa)}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad A = \frac{X(\varkappa-1)}{\pi(1+\varkappa)}\cos^2\frac{\varphi}{2}. \tag{17}$$

Зауважимо, що для визначення постійних A_1 і A достатньо скористатися тільки одним з рівнянь (16). Постійну D_2 знайдемо з умови $f(a) = 0$. Підставляючи (17) у (15) і враховуючи (8), одержимо

$$\varphi(z) = -P\ln z + \frac{1-\varkappa}{4}\left[P + \bar{P}z^2 - (P + \bar{P}\cos\varphi)z + (P - \bar{P}z)X_0(z)\right].$$

Знаючи $\varphi(z)$, можемо визначити напруження

при $|\theta| < \varphi$

$$rr^+ = rr^- = 2DX\cos^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\pi}(X\cos\theta + Y\sin\theta),$$

$$\vartheta\vartheta^{\pm} = 2D\left\{X\cos^2\frac{\varphi}{2} \mp \frac{X\left(\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}\right) + Y\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}}\right\}, \tag{18}$$

$$r\vartheta^+ = r\vartheta^- = 0;$$

при $\varphi < \theta < 2\pi - \varphi$

$$rr = -\frac{1}{\pi}(X\cos\theta + Y\sin\theta) + D\Big\{X(1+\cos\varphi) + R(\theta)\cdot\Big\{X\Big[\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(1+2\cos\varphi)\Big] - Y\Big[\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}(1-2\cos\varphi)\Big]\Big\}\Big\},$$

$$r\vartheta = -DR(\theta)\left[X\left(\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}\right) + Y\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\varphi\sin\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

$$\vartheta\vartheta = rr + \frac{1}{\pi}(X\cos\theta + Y\sin\theta).$$

Тут введені позначення

$$D = \frac{\varkappa-1}{4\pi(1+\varkappa)}, \quad R(\theta) = \left[\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Аналіз формул (18) показує, що напруження $\rho\rho$ - обмежені на одиничному колі. Напруження $\rho\vartheta$ - необмежені при підході до кінців щілини зовні; $\vartheta\vartheta$ - обмежені зовні і необмежені при підході до її кінців з внутрішньої сторони.

Для визначення максимального кута, при якому буде проходити контакт по всій щілині, скористаємося формулою

$$tg\frac{\varphi^*}{2} = -|m| + \sqrt{m^2 + \frac{3+\varkappa}{2(1+\varkappa)}},$$

де
$$m = \frac{Y}{X}.$$

Зауважимо, що коли

$$|m| < \sqrt{\frac{3+\varkappa}{6(1+\varkappa)}} \quad і \quad tg\frac{\varphi}{2} = |m|,$$

то всі напруження будуть обмеженими на кінці щілини, до якого напрямлена сила.

Л і т е р а т у р а

1. Г р и л і ц ь к и й Д. В., Л у ц и ш и н Р. М. Про один випадок пружної рівноваги пластинки, ослабленої криволінійним розрізом. - "ДАН УРСР", серія А, 1968, № 4.

2. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.3

М.К.Зварич

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛІПТИЧНОГО КІЛЬЦЯ З ВПРЕСОВАНИМ СТЕРЖНЕМ

Розглянемо пружну ізотропну пластинку, серединна площина якої займає область D, обмежену двома співфокусними еліпсами L_1 і L_2. У точках кільця z_i та z_j прикладено відповідно зосереджені сили

$P_i(x_i, y_i)$ і моменти M_j $(i=1,2,\dots,r;\ j=1,2,\dots,s)$. Нехай в отвір пластинки, обмеженого контуром $\mathcal{L}_1$, впресовано або натягнуто на кільце замкнутий криволінійний стержень постійного поперечного перерізу, а до іншого краю пластинки $\mathcal{L}_2$ прикладені напруження N_2 і T_2 (N_2, T_2 – нормальна і дотична складові заданих напружень). Вважається, що зовнішні зусилля, прикладені до пластинки і стержня, задовольняють умови статики. Тертям між контактуючими тілами нехтуємо. Напружено деформований стан стержня описується рівняннями теорії тонких криволінійних стержнів.

Визначення напруженого стану в контактуючих тілах зводиться до знаходження компонент деформації e_o, θ_ε стержня і функцій $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ комплексного змінного $z=x+iy$, які задовольняють граничні умови

$$\int_{\mathcal{L}_1} F_1(t)\, Re\, dU^* = 2\mu \int_{\mathcal{L}_1} F_1(t)\, d[U_{1n} \mp \varepsilon^*(t)];$$

$$\int_{\mathcal{L}_1} F_1(t)\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_1} N^{(i)} F_1(t)\, dt; \quad \int_{\mathcal{L}_2} F_1(t)\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) F_1(t)\, dt; \quad (1)$$

$$\int_{\mathcal{L}_1} \overline{F_1(t)}\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_1} N^{(i)} \overline{F_1(t)}\, dt; \quad \int_{\mathcal{L}_2} \overline{F_1(t)}\, dV^* = \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(t)}\, dt.$$

де

$$U^* = i\dot{t}\left[\varkappa\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}\right];$$
$$V^* = \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}; \qquad (2)$$

$\varepsilon^*(t)$ – нормальна величина скачка вектора переміщення; $F_1(z)$ – довільна, голоморфна, в області D, функція; $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$; $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Нормальна складова переміщення U_{1n} контурних точок стержня виражається через відносне подовження e_o нульової (для чистого згину) лінії $\mathcal{L}_o$ і кут повороту θ_ε нормального перерізу стержня згідно з [2] формулою

$$U_{1n} = Re\left\{ i\dot{t} \int_{t_o}^{t} \left[\frac{r_1}{r_1} e_o + \dot{t}(r_1 - r_0)\frac{d\theta_\varepsilon}{dt} + i\theta_\varepsilon \right] dt + \dots \dot{t} \right\}, \qquad (3)$$

де $c = u_{1n}^{*} + i u_{1t}^{*}$ — стала інтегрування.

Закон Гука для стержня візьмемо у вигляді [2]

$$V_t = g e_0; \quad L_g = g \eta_c r_1 t \frac{d\theta_g}{dt}. \tag{4}$$

В (3) і (4) використані позначення з [1].

За допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}) \tag{5}$$

зробимо конформне відображення області D на концентричне кільце з радіусами ρ_1 і ρ_2, де $R = \frac{a_1 + b_1}{2}$; $m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}$; $\rho_2 = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} > 1$; $\rho_1 = 1$; a_j; b_j — півосі співфокусних еліпсів $\mathcal{L}_j$ $(j = 1, 2)$.

Величини e_0 і θ_g подаємо на γ_1 у формі комплексних рядів Фур'є

$$e_0 = \alpha_0 + 2Re\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sigma^k; \quad \theta_g = \beta_0 + 2Re\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sigma^k. \tag{6}$$

Функції напруження $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$ в області D, шукаємо у вигляді [3]

$$\varphi(\zeta) = -\sum_{i=1}^{r} P_i \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^{-k};$$

$$\psi(\zeta) = \varkappa \sum_{i=1}^{r} \overline{P}_i \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i \eta_i}{\zeta - \zeta_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{M_j^* \eta_j^*}{\zeta - \zeta_j} + \tag{7}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} A'_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} B'_k \zeta^{-k},$$

де

$$P_i = \frac{x_i + i y_i}{4\pi h(1+\varkappa)}; \quad M_j^* = \frac{i M_j}{4\pi h}; \quad \eta_j^* = \frac{\zeta_j^2}{\zeta_j^2 - m}; \quad \eta_i = \eta_i^*(\overline{\zeta}_i + m\overline{\zeta}_i^{-1}).$$

Довільну функцію $F(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)]$ подаємо у вигляді ряду

$$F(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \zeta^{-n}; \quad \rho_1 \leq |\zeta| \leq \rho_2. \tag{8}$$

У випадку силової та геометричної симетрії задачі відносно координатних осей, нормальна складова контактного напруження має вигляд

$$N^{(i)}=\frac{q}{2hr_1}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}\alpha_k f_k(\sigma), \qquad (9)$$

де

$$f_k(\sigma)=\frac{q}{2hr_1}\,\frac{1}{(1-m^2)^2}\Big\{\big[(1-m^2)^2-k^2(1+4m^2+m^4)\big](\sigma^{k}+\sigma^{-k})-$$

$$-km^2\big[(k+2)(\sigma^{k+4}+\sigma^{-k-4})+(k-2)(\sigma^{k-4}+\sigma^{-k+4})\big]+$$

$$+2km(1+m^2)\big[(k+1)(\sigma^{k+2}+\sigma^{-k-2})+(k-1)(\sigma^{k-2}+\sigma^{-k+2})\big]\Big\}.$$

Враховуючи (2), (3), (5), (6), підставимо (7) - (9) в граничні умови (I) і виконаємо інтегрування вздовж контурів γ_1 та γ_2, приймаючи при цьому всі E_j, крім E_n, рівними нулю. У результаті одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів α_k, β_k, A_k, B_k, A_k' і B_k', яку запишемо для випадку, коли навантаження N_2+iT_2, симетричне відносно координатних осей $0x$, $0y$ і P_i, M_j^* дорівнюють нулеві ($i=1,2,...,r$; $j=1,2,...,s$). Завдяки силовій та геометричній симетрії задачі відносно обох осей координат, коефіцієнти розкладів (6) з непарними, а (7) з парними індексами дорівнюють нулеві, і A_k, B_k, A_k', B_k', α_k - дійсні, а β_k - уявні величини

$$\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(1)}\alpha_k+\sum_{k=2,4}^{\infty}b_{kn}^{(1)}\beta_k^*=0;$$

$$\frac{1}{2}a_{0n}^{(2)}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(2)}\alpha_k+\sum_{k=2,4}^{\infty}b_{kn}^{(2)}\beta_k^*+\sum_{k=2,4}^{\infty}c_{kn}^{(2)}A_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{(2)}B_k+$$

$$+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}'^{(2)}A_k'+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}'^{(2)}B_k'=6;$$

$$\frac{1}{2}a_{0n}^{(3)}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(3)}\alpha_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}^{(3)}A_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{(3)}B_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}'^{(3)}A_k'=0; \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2}a_{0n}^{(4)}\alpha_0+\sum_{k=2,4}^{\infty}a_{kn}^{(4)}\alpha_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}c_{kn}^{(4)}A_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}^{(4)}B_k+\sum_{k=1,3}^{\infty}d_{kn}'^{(4)}B_k'=0;$$

$$\sum_{k=1,3}^{\infty} c_{kn}^{(5)} A_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} d_{kn}^{(5)} B_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} c_{kn}'^{(5)} A_k' = P_n^{(5)};$$

$$\sum_{k=1,3}^{\infty} c_{kn}^{(6)} A_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} d_{kn}^{(6)} B_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} d_{kn}'^{(6)} B_k' = P_n^{(6)}$$

де

$$a_{kn}^{(1)} = \int_{\gamma_1} (\sigma^k + \sigma^{-k})\, d(r_0 \sigma^{-n-1});$$

$$b_{kn}^{(1)} = k(n+1)\int_{\gamma_1} r_1 \eta_c (\sigma^k + \sigma^{-k}) \frac{\sigma^{-n-2}}{|\omega'(\sigma)|}\, d\sigma;$$

$$a_{kn}^{(2)} = -2\mu \int_{\gamma_1} Re\left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma|\omega'(\sigma)|} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{r_0}{r_1} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \omega'(\sigma)\, d\sigma \right\} \sigma^{-n} d\sigma;$$

$$b_{kn}^{(2)} = 2\mu \int_{\gamma_1} Re\left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma|\omega'(\sigma)|} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left[\sigma^k - \sigma^{-k} + \frac{k(r_1 - r_0)}{|\omega'(\sigma)|} (\sigma^k + \sigma^{-k})\right] \omega'(\sigma)\, d\sigma \right\} \sigma^{-n} d\sigma;$$

$$c_{kn}^{(2)} = \int_{\gamma_1} Re\left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} \left(\varkappa \sigma^{k-1} - k \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \sigma^{-k} \right) \right\} \sigma^{-n} d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(2)} = \int_{\gamma_1} Re\left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} \left(\varkappa \sigma^{-k-1} + k \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \sigma^{k} \right) \right\} \sigma^{-n} d\sigma; \qquad (11)$$

$$c_{kn}'^{(2)} = -\int_{\gamma_1} Re\left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} \sigma^{-k-1} \right\} \sigma^{-n} d\sigma; \quad d_{kn}'^{(2)} = -\int_{\gamma_1} Re\left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} \sigma^{k-1} \right\} \sigma^{-n} d\sigma;$$

$$a_{kn}^{(3)} = \int_{\gamma} f_k(\sigma) \sigma^{n} \omega'(\sigma)\, d\sigma; \quad c_{kn}^{(3)} = nk \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \sigma^{-k+n} d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(3)} = c_{kn}'^{(3)} = n \int_{\gamma_1} \sigma^{-k+n-1} d\sigma; \quad a_{kn}^{(4)} = \int_{\gamma_1} f_k(\sigma) \sigma^{-n} \omega'(\sigma)\, d\sigma;$$

$$c_{kn}^{(4)} = -n\int_{\gamma_1}\left(\sigma^{k} + k\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\sigma^{-k+1}\right)\sigma^{-n-1}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(4)} = kn\int_{\gamma_1}\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\sigma^{k-n}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{\prime(4)} = -n\int_{\gamma_1}\sigma^{k-n-1}d\sigma; \qquad c_{kn}^{(5)} = kn\rho_2^{2k-2n-2}\int_{\gamma_2}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{-k+n}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(5)} = n\rho_2^{-2n}\int_{\gamma_2}\sigma^{-k+n-1}d\sigma; \quad c_{kn}^{\prime(5)} = n\rho_2^{2k-2n}\int_{\gamma_2}\sigma^{-k+n-1}d\sigma;$$

$$c_{kn}^{(6)} = n\int_{\gamma_2}\left[\sigma^{k} + k\rho_2^{2k-2}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{-k+1}\right]\sigma^{-n-1}d\sigma;$$

$$d_{kn}^{(6)} = -kn\rho_2^{-2k-2}\int_{\gamma_2}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma^{k-n}d\sigma; \quad d_{kn}^{\prime(6)} = n\rho_2^{-2k}\int_{\gamma_2}\sigma^{k-n-1}d\sigma;$$

$$P_n^{(5)} = -\rho_2^{-2n}\int_{\gamma_2}(N_2 + iT_2)\sigma^{n}\omega'(\sigma)d\sigma; \quad P_n^{(6)} = \int_{\gamma_2}(N_2 + iT_2)\sigma^{-n}\omega'(\sigma)d\sigma.$$

$$\mathcal{E} = 2\mu\int_{\gamma_1}\varepsilon^{*}(\sigma)\sigma^{-n}d\sigma. \qquad n = 1,3,5\ldots$$

Для числового прикладу взято мідну пластинку і стальне кільце прямокутного перерізу з такими пружними і геометричними характеристиками $E = 2{,}1\cdot 10^{6}\ кГ/см^2$; $\mu = 4{,}42\cdot 10^{5}\ кГ/см^2$; $\varkappa = 2{,}08$; $\gamma = 1$; $\delta = \frac{b}{R} = 0{,}2$; $\rho_2 = 4$; $m = 0{,}2$.

Нижче наводимо числові значення напружень σ_θ і σ_ρ в кільці на лінії контакту і нормальне напруження $\sigma(r = r_1)$ в перерізі отвору:

θ^{0}	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\sigma_\theta/10^{6}\mathcal{E}$	0,434	0,416	0,381	0,352	0,334	0,322	0,312	0,304	0,298	0,295
$-\sigma_\rho/10^{6}\mathcal{E}$	0,504	0,489	0,446	0,378	0,307	0,248	0,204	0,178	0,163	0,159
$-\sigma/10^{6}\mathcal{E}$	0,481	0,664	1,020	1,282	1,397	1,428	1,429	1,424	1,420	1,419

Зовнішнє навантаження, прикладене до кільця, відсутнє.

Література

1. Зварич М. К., Мартынович Т. Л. Анизотропный диск, обжатый изотропным кольцом меньшего радиуса. - "Прикладная механика", 1970, т. 6, вып. 9.
2. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс., Львов, 1970.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., "Наука", 1966.

УДК 539.377

Т.Л.Мартинович, Махмуд Аллам, Ю.С.Перец

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЯВНОСТІ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА. І.

Розглянемо плоску задачу термопружності для двозв'язної області S, обмеженої гладкими контурами L_1 і L_2 $(L = L_1 + L_2)$. У випадку узагальненого плоского напруженого стану вважається, що бічні поверхні пластинки теплоізольовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем вздовж контура L відбувається за законом Ньютона. В області S в точках (x_j, y_j) з афіксом z_j поміщені зосереджені джерела тепла потужності Q_j $(j = 1, 2, \dots, N)$. На зовнішньому контурі L_2 області S задані переміщення u і v, а на внутрішньому L_1 - зовнішні зусилля X_n, Y_n.

Проблема зводиться до розв'язування такої крайової задачі термопружності [1,2,4].

$$\Delta T = -\sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j}{\lambda_t h} \delta(x - x_j)\, \delta(y - y_j) \tag{1}$$

$$\lambda_t \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_n^{(\ell)} (T - T_c^{(\ell)}) = 0 \quad \text{на } L_\ell \ (\ell = 1, 2) \tag{2}$$

$$d\left[\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\right]=2\kappa T dt+2\kappa t\frac{\partial T}{\partial t}d\bar{t}+$$

$$+i(X_n+iY_n)dS \qquad \text{на} \quad \mathcal{L}_1; \tag{3}$$

$$d\left[\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}\right]=-2\kappa T dt-2\kappa t\frac{\partial T}{\partial t}d\bar{t}+$$

$$+2\mu d(u+iv) \qquad \text{на} \quad \mathcal{L}_2,$$

де T - температура; λ_t - коефіцієнт теплопровідності; $\alpha_n^{(\ell)}$ - коефіцієнт тепловіддачі; $T_c^{(\ell)}$ - температура зовнішнього середовища вздовж контура $\mathcal{L}_\ell$; h - товщина пластинки; $\kappa=\frac{\alpha_t E}{4}$ (для узагальненого плоского напруженого стану); $\kappa=\frac{\alpha_t E}{4(1-\nu)}$ (для плоскої деформації), α_t - температурний коефіцієнт лінійного розширення; $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ - комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі; $\delta(z)$ - функція Дірака.

Враховуючи, що $T=\operatorname{Re} f(z)$, де $f(z)$ - аналітична функція комплексного змінного, контурні умови (2), (3) можна подати у вигляді [1,2]

$$\lambda_t\int_{\mathcal{L}_\ell}F(t)\,d\left[f(t)-\overline{f(t)}\right]+\int_{\mathcal{L}_\ell}\alpha_n^{(\ell)}\left[f(t)+\overline{f(t)}-2T_c^{(\ell)}\right]F(t)e^{-i\alpha}dt=0 \tag{4}$$

$$(\ell=1,2);$$

$$\int_{\mathcal{L}_1}\overline{F(t)}\Phi_*(t)dt-\varkappa\int_{\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}\Phi_*(t)dt+\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}\,d\left[t\overline{\Phi_*(t)}\right]=$$

$$=i\int_{\mathcal{L}_1}\overline{F(t)}(X_n+iY_n)dS-2\mu\int_{\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}\,d(u+iv)+\kappa(1+\varkappa)\int_{\mathcal{L}_2}\overline{F(t)}f(t)dt, \tag{5}$$

$$\int_{\mathcal{L}_1}F(t)\Phi_*(t)dt-\varkappa\int_{\mathcal{L}_2}F(t)\Phi_*(t)dt+\int_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}F(t)\,d\left[t\,\overline{\Phi_*(t)}\right]+$$

$$+\int\limits_{L_1+L_2} F(t)\overline{\Psi'(t)}\,d\bar{t} = i\int\limits_{L_1} F(t)(X_n+iY_n)\,dS - 2\mu\int\limits_{L_2} F(t)\,d(u+iv) + \tag{6}$$

$$+\kappa(1+\varkappa)\int\limits_{L_2} F(t)f(t)\,dt,$$

причому $\Phi_*(z)=\Phi(z)-\kappa f(z)$; α – кут між зовнішньою нормаллю до контура L і віссю Ox ; $F(z)$ – довільна функція, голоморфна в області S .

Напруження обчислюється за звичайними формулами плоскої теорії пружності [3]

$$\begin{aligned} &\sigma_x+\sigma_y = 2[\Phi_*(z)+\overline{\Phi_*(z)}],\\ &\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi_*'(z)+\Psi(z)]. \end{aligned} \tag{7}$$

Формула для переміщень має вигляд

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi_*(z) - z\overline{\Phi_*(z)} - \overline{\Psi(z)} + \kappa(1+\varkappa)\int f(z)\,dz, \tag{8}$$

причому $\Psi(z)=\Psi'(z)$, $\Phi_*(z)=\varphi_*'(z)$, $\varphi_*(z)=\varphi(z)-\kappa\int f(z)\,dz$.

Нехай функція $z=\omega(\zeta)$ конформно відображає концентричне кільце, обмежене колами γ_1 і γ_2 ($\gamma=\gamma_1+\gamma_2$) радіусів ρ_1 і ρ_2 на розглядувану область S . В круговому кільці функції $f_1(\zeta)=f[\omega(\zeta)]$, $\Phi_1(\zeta)=\Phi_*[\omega(\zeta)]$, $\Psi_1(\zeta)=\Psi[\omega(\zeta)]$, $F_1(\zeta)=F[\omega(\zeta)]$ можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} &f_1(\zeta) = q_1^*\ln\zeta + \sum_{j=1}^{N} Q_j^*\ln(\zeta-\zeta_j) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\zeta^n,\\ &\Phi_1(\zeta) = -\kappa q_1^*\ln\zeta - \kappa\sum_{j=1}^{N} Q_j^*\ln(\zeta-\zeta_j) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\zeta^n,\\ &\Psi_1(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n\zeta^n, \quad F_1(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E_j\zeta^j, \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$q_1^* = \frac{q_1}{2\pi\lambda_t h}; \quad Q_j^* = -\frac{Q_j}{2\pi\lambda_t h}; \quad q_1 + q_2 = \sum_{j=1}^{N} Q_j \tag{10}$$

$$q_\ell = \alpha_n^{(\ell)} h \int_{L_\ell} T dS - \alpha_n^{(\ell)} h \int_{L_\ell} T_c^{(\ell)} dS \qquad (\ell = 1,2).$$

Через q_ℓ позначено сумарний потік тепла, що приходить через замкнутий контур L_ℓ області S .

Внесемо вирази (9) у формули (4), (5), (6) і виконаємо інтегрування, вважаючи при цьому, що всі $E_n = 0$, крім $E_j = 1$. У результаті одержимо нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу шуканих функцій a_n, A_n, B_n і q_1^* [1,2]

$$2\pi i \lambda_t (2 q_1^* \delta_{j0}^{\ell} - j a_{-j} + j \rho_\ell^{2j} \bar{a}_j) + (-1)^\ell \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \rho_\ell^n + \bar{a}_n \rho_\ell^{-n}) \rho_\ell^j \beta_{nj}^{(\ell)} +$$

$$+ (-1)^\ell 2 q_1^* \ln \rho_\ell \cdot \rho_\ell^j \beta_{0j}^{(\ell)} = 2(-1)^\ell \int_{\gamma_\ell} \alpha_n^{(\ell)} T_c^{(\ell)} \rho_\ell |\omega'(\sigma)| \sigma^{j-1} d\sigma -$$

$$- (-1)^\ell \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_\ell} \alpha_n^{(\ell)} \rho_\ell |\omega'(\sigma)| \ln[(\sigma - \zeta_\nu)(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu)] \sigma^{j-1} d\sigma - \tag{11}$$

$$- \lambda_t \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_\ell} \left[\frac{1}{\sigma - \zeta_\nu} + \frac{\rho_\ell^2}{\sigma^2(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu)}\right] \sigma^j d\sigma \quad (\ell = 1,2);$$

$$(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n (b_{nj}^{(1)} - \varkappa b_{nj}^{(2)}) - j \bar{A}_n g_{nj}] = \kappa (1 + \varkappa) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{nj}^{(2)} + \tag{12}$$

$$+ \kappa q_1^* \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \bar{\sigma}^j \ln(\sigma\bar{\sigma}) d\omega(\sigma) + \kappa q_1^* g_{0j} + \kappa \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \bar{\sigma}^j \ln[(\sigma - \zeta_\nu)(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu)] d\omega(\sigma) +$$

$$+ \kappa \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu^* \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \bar{\sigma}^j \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu} d(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu) + i \int_{\gamma_1} \bar{\sigma}^j (X_n + i Y_n) dS - 2\mu \int_{\gamma_2} \bar{\sigma}^j d(u + iv);$$

$$(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{b}_n\bar{t}_{nj}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(1+\varkappa)A_n z_{nj}+j\bar{A}_n S_{nj}\right]+\kappa(1+\varkappa)\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z_{nj}+ \tag{13}$$

$$+\kappa q_1^*\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j}\ln(\sigma\bar{\sigma})\,d\omega(\sigma)-\kappa q_1^* S_{0j}+\kappa\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^*\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j}\ln\left[(\sigma-\zeta_\nu)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)\right]d\omega(\sigma)+$$

$$+\kappa\sum_{\nu=1}^{N}\bar{Q}_\nu^*\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j}\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu}d(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)+i\int\limits_{\gamma_1}\sigma^{-j}(X_n+iY_n)\,dS-$$

$$-2\mu\int\limits_{\gamma_2}\sigma^{-j}d(u+iv)\qquad(j=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

Тут введені позначення

$$\beta_{nj}^{(\ell)}=\int\limits_{\gamma_\ell}e^{i(n+j-1)\theta}\alpha_n^{(\ell)}|\omega'(\sigma)|\,d\sigma;\qquad \delta_{nj}=\begin{cases}1 & n=j\\ 0 & n\neq j\end{cases};$$

$$b_{nj}^{(1)}=\int\limits_{\gamma_1}\bar{\sigma}^{-j}\sigma^{n}d\omega(\sigma);\qquad b_{nj}^{(2)}=\int\limits_{\gamma_2}\bar{\sigma}^{-j}\sigma^{n}d\omega(\sigma);$$

$$g_{nj}=\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\sigma}^{j+n-1}\omega(\sigma)\,d\bar{\sigma};\quad S_{nj}=\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j-1}\bar{\sigma}^{n}\omega(\sigma)\,d\sigma; \tag{14}$$

$$z_{nj}=\int\limits_{\gamma_2}\sigma^{-j+n}d\omega(\sigma);\qquad t_{nj}=\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{-j}\bar{\sigma}^{n}d\overline{\omega(\sigma)}\;.$$

За конкретну двозв'язну область S візьмемо софокусне еліптичне кільце, якому відповідає відображаюча функція

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)\qquad(|m|<1),$$

$$R=\frac{a_1+b_1}{2},\quad m=\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1};\quad \rho_2=\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1},\quad \rho_1=1 \tag{15}$$

(a_j, b_j – півосі софокусних еліпсів $\mathcal{L}_j$).

Температуру середовища $T_1^{(1)}$ вважатимемо сталою. У цьому випадку системи (11), (12), (13) набувають вигляду

$$(1+\varkappa\rho_2^{2j})(mA_{j+1}-A_{j-1})+j\left[(\rho_2^{2}-1)\bar{A}_{-j+1}+m(\rho_2^{-2}-1)\bar{A}_{-j-1}\right]=$$

$$=\kappa(1+\varkappa)\rho_2^{2j}(a_{j-1}-ma_{j+1})+\kappa q_1^{*}\left[\rho_2^{2j}(\ln\rho_2^{2}-1)+1\right]\delta_{j,-1}-$$

$$-\kappa q_1^{*}m\left[\rho_2^{2j}(\ln\rho_2^{2}+1)-1\right]\delta_{-j-2,-1}+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^{*}\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\sigma}^{j}\ln[(\sigma-\zeta_\nu)\cdot \tag{16}$$

$$\cdot(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)]\,d\omega(\sigma)+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^{*}\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\sigma}\,\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu}\,d(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)+$$

$$+\frac{1}{2\pi iR}\int\limits_{\gamma_1}\bar{\sigma}^{j}(X_n+iY_n)\,dS-\frac{2\mu}{2\pi iR}\int\limits_{\gamma_2}\bar{\sigma}^{j}\,d(u+iv),$$

$$(j=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

$$(\rho_2^{2j}-1)(m\bar{B}_{j+1}-\bar{B}_{j-1})=(1+\varkappa)(A_{-j-1}-mA_{-j+1})+$$

$$+j\left[(\rho_2^{2j+2}-1)\bar{A}_{j+1}+m(\rho_2^{2j-2}-1)\bar{A}_{j-1}\right]+\kappa(1+\varkappa)(a_{-j-1}-ma_{-j+1})+$$

$$+2\kappa q_1^{*}\ln\rho_2(\delta_{j,-1}-m\delta_{j-2,-1})+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^{*}\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{j}\ln[(\sigma-\rho_\nu)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)]\,d\omega(\sigma)+$$

$$+\frac{\kappa}{2\pi iR}\sum_{\nu=1}^{N}Q_\nu^{*}\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2}\sigma^{j}\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_j}\,d(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_\nu)+$$

$$+\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\gamma_1}\sigma^{j}(X_n+iY_n)\,dS-\frac{2\mu}{2\pi iR}\int\limits_{\gamma_2}\sigma^{j}\,d(u+iv), \tag{17}$$

$$(j=0,\pm1,\pm2,\dots);$$

$$
\kappa_\ell \left(2q_1^* \delta_{j0} - j a_{-j} + j \rho_\ell^{2j} \bar{a}_j\right) + (-1)^{\ell+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \rho_\ell^n + \bar{a}_n \rho_\ell^{-n}\right) \rho_\ell^j h^{(\ell)}_{\frac{n+j}{2}} +
$$

$$
+ (-1)^{\ell+1} 2 q_1^* \rho_\ell^j \ln \rho_\ell \, h^{(\ell)}_{\frac{j}{2}} = 2(-1)^{\ell+1} T_c^{(\ell)} \rho_\ell^j h^{(\ell)}_{\frac{j}{2}} - \tag{18}
$$

$$
- \frac{\kappa_\ell}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu \int_{\gamma_\ell} \left[\frac{1}{\sigma - \zeta_\nu} + \frac{\rho_\ell^2}{\sigma^2 (\bar{\sigma} - \bar{\rho}_\nu)}\right] \sigma^{-j} d\sigma +
$$

$$
+ \frac{(-1)^{\ell+1}}{2\pi i R} \sum_{\nu=1}^{N} Q_\nu \int_{\gamma_\ell} |\omega'(\sigma)| \ln\left[(\sigma - \zeta_\nu)(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_\nu)\right] \sigma^{-j-1} d\sigma
$$

$$
(\ell = 1, 2), \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).
$$

Тут позначено

$$
h_n^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right) = h_{-n}^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right) = -\frac{2\left[1 + (m\rho_\ell^{-2})^2\right]}{\pi} I^{(\ell)}_{|2n|} + \frac{2m\rho_\ell^{-2}}{\pi}\left(I^{(\ell)}_{2|n-1|} + I^{(\ell)}_{2|n+1|}\right)
$$

$$
I^{(\ell)}_{|n|}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right) = \left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)^{\left|\frac{n}{2}\right|} \int_0^1 \frac{x^{|n|} dx}{\sqrt{(1 - x^2)\left[1 - (m\rho_\ell^{-2})^2 x^2\right]}} ; \qquad \kappa_\ell = \frac{\lambda_t}{\alpha_n^{(\ell)} \rho_\ell R} . \tag{19}
$$

Вираз $I_n^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)$ дорівнює нулеві при n непарних, а величина $h_n^{(\ell)}\left(\frac{m}{\rho_\ell^2}\right)$ дорівнює нулеві при n дробових.

Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16), (17) і (18) служать для визначення коефіцієнтів a_n, A_n і B_n розкладу шуканих функцій $f_1(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$.

Література

1. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А. К решению плоской задачи термоупругости для двухсвязных областей. - "Прикладная механика", 1972, т. УШ, вып. 7.

2. Мартинович Т. Л., Ніщенко І. О., Махмуд Аллам. Температурні напруження біля криволінійних отворів, викликані однорідним тепловим потоком на неокінченності. - „Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1973, вип. 8.

3. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, 1972.

4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстия. К., "Наукова думка", 1968.

УДК 534.1

В.М.Флячок

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИХ ПОЛОГИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

У цій роботі ми розглядаємо вільні коливання трансверсально ізотропної пологої циліндричної панелі, на основі рівнянь теорії типу С.П.Тимошенка, які враховують деформації поперечних зсувів і інерцію повороту [1].

Розглянемо прямокутну в плані циліндричну панель товщини $2h$, довжини ℓ, з кутом розкриття β_0, яка вільно оперта вздовж усього контуру. Коливання такої оболонки в ортогональних безрозмірних координатах α, β описуються рівняннями

$$\left[\left(\Delta-\frac{3R^2\varepsilon}{h^2}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\Delta-\frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)+\frac{3R^4}{h^2}\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]F+\frac{R}{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0;$$

$$\left[\left(\Delta-\frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\varepsilon-R^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}F+\frac{R}{2hE}\Delta\Delta\varphi=0; \qquad (1)$$

$$\Delta\psi - \frac{2R^2}{\varepsilon(1-\nu)}\left[1+\frac{\varepsilon}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\psi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$; $\varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}\frac{E}{G_n}$, $D = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{(1-\nu^2)}$;

$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$; ρ – густина матеріалу оболонки; R – радіус її серединної поверхні; k' – коефіцієнт зсуву; E, ν – пружні характеристики матеріалу оболонки в напрямках α, β; G_n – модуль зсуву в площадках, нормальних до серединної поверхні.

Нормальне переміщення w і кути повороту γ_α, γ_β через функцію прогину $F(\alpha,\beta,\tau)$ і функцію зсуву $\psi(\alpha,\beta,\tau)$ виражаються так:

$$w = \left[1 - \frac{\varepsilon}{R^2}\left(\Delta - \frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]F;$$

$$\gamma_\alpha = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right); \quad \gamma_\beta = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial F}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right). \qquad (2)$$

Відповідно можна зобразити компоненти зусиль і моментів через ці функції і функцію напружень $\varphi(\alpha,\beta,\tau)$.

Граничні умови вільного опирання країв оболонки

$$\begin{aligned} &v = w = \gamma_\beta = N_\alpha = M_\alpha = 0 \quad &\text{при} \quad &\alpha = 0,\ \alpha = \frac{\ell}{R};\\ &u = w = \gamma_\alpha = N_\beta = M_\beta = 0 \quad &\text{при} \quad &\beta = 0,\ \beta = \beta_0, \end{aligned} \qquad (3)$$

будуть задовольнятись, якщо розв'язок системи (I) вибрати у вигляді

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\tau) &= \sum_n\sum_m A_{nm}\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta\sin\omega_{nm}\tau;\\ \varphi(\alpha,\beta,\tau) &= \sum_n\sum_m B_{nm}\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta\sin\omega_{nm}\tau;\\ \psi(\alpha,\beta,\tau) &= \sum_n\sum_m C_{nm}\cos\lambda_n\alpha\cos\mu_m\beta\sin\omega_{nm}\tau, \end{aligned} \qquad (4)$$

де $n, m = 1, 2, 3, \ldots\infty$; $\lambda_n = \frac{n\pi R}{\ell}$; $\mu_m = \frac{m\pi}{\beta_0}$;

ω_{nm} – колова частота коливань

Відзначимо, що в цьому випадку крайова задача розділяється на дві: відносно функцій F , φ і відносно функції ψ . Остання визначає зсувні коливання, які тут не розглядаються.

Підставивши (4) в систему (1), одержимо частотне рівняння, з якого знайдемо власні частоти коливання вільно опертої циліндричної панелі

$$
\left(\omega_{nm}^{2}\right)_{1,2}=\frac{E}{\rho(1-\nu^{2})R^{2}\varepsilon_{0}}\left\{\frac{1}{2}\left[1+\varepsilon_{0}\varkappa_{nm}^{2}+\delta^{2}\varkappa_{nm}^{2}+\frac{\lambda_{n}^{4}\varepsilon_{0}(1-\nu^{2})}{\varkappa_{nm}^{4}}\right]\mp\right.
$$

$$
\left.\mp\sqrt{\frac{1}{4}\left[1+\varepsilon_{0}\varkappa_{nm}^{2}+\delta^{2}\varkappa_{nm}^{2}+\frac{\lambda_{n}^{4}\varepsilon_{0}(1-\nu^{2})}{\varkappa_{nm}^{4}}\right]^{2}-\varepsilon_{0}\left[\delta^{2}\varkappa_{nm}^{4}+\frac{\lambda_{n}^{4}(1-\nu^{2})}{\varkappa_{nm}^{4}}\left(1+\varepsilon_{0}\varkappa_{nm}^{2}\right)\right]}\right\} \quad (5)
$$

Тут $\delta=\frac{h}{\sqrt{3}R}$; $\varepsilon_{0}=\frac{\varepsilon}{K^{2}}$; $\varkappa_{nm}^{2}=\lambda_{n}^{2}+\mu_{m}^{2}$.

Із аналізу (5) видно, що власні частоти коливання трансверсально ізотропної оболонки суттєво залежать від відношення $\frac{E}{G_n}$, яке для ізотропного матеріалу дорівнює $\frac{E}{G_n}=2(1+\nu)$. При $\frac{E}{G_n}=0$ з рівняння (5) випливає результат [2] , одержаний на основі класичної теорії оболонок. Прямуючи $R\to\infty$, дістанемо частоти для прямокутної трансверсально ізотропної пластинки [3] .

Як числовий приклад розглянемо циліндричну панель з характеристиками $\nu=0{,}17$; $k'=\frac{5}{6}$; $\beta_0=1{,}5$ рад.; $\ell=6$м, 50м; $\frac{E}{G_n}=2{,}34$; 40.

Значення безрозмірного частотного параметра $p_{nm}=\left(\frac{\rho R^{2}}{E}\right)^{\frac{1}{2}}(\omega_{nm})_{1}$.

p_{nm}	$\ell=6$ м				$\ell=50$ м			
	$R/2h=8$		$R/2h=30$.		$R/2h=8$		$R/2h=30$	
	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$	$E/G_n=2{,}34$	$E/G_n=40$
p_{11}	2,294	1, 407	1,128	1,089	0,256	0,237	0,176	0,175
p_{15}.	4,766	1,843	1,663	1,300	3,283	1,419	1,059	0,873
p_{23}	6,999	2,528	2,796	2,026	1,434	0,814	0,425	0,392
p_{55}	21,940	5,912	12,979	5,585	3,803	1,575	1,269	1,028

Як бачимо з таблиці, власні частоти коливання трансверсально ізотропної ($\frac{E}{G_n}=40$) оболонки менші, ніж ізотропної ($\frac{E}{G_n}=2{,}34$). Ця різниця зростає зі зменшенням довжини оболонки, збільшенням відносної товщини, а також для вищих частот і більшого відношення $\frac{E}{G_n}$.

Література

1. Ж у к Є. І. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1967, вип. 3.

2. О н и а ш в и л и О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. М., Изд-во АН СССР, 1957.

3. П е л е х Б. Л., Т е т е р с Г. А. О динамическом изгибе пластинок, слабо сопротивляющихся сдвигу. - "Механика полимеров", 1968, № 1.

УДК 539.3

Я.Г.Савула, Н.П.Флейшман

ПРО ОДНЕ МОЖЛИВЕ РОЗШИРЕННЯ КЛАСУ ОБОЛОНОК КАНОНІЧНИХ ФОРМ

У спеціальній літературі існує велика кількість робіт, присвячених розрахунку оболонок канонічних форм (сферична, циліндрична, оболонка обертання та ін.), проте в інженерній практиці часто виникає необхідність також у розрахунку тонкостінних конструкцій більш складних конфігурацій. Значно розширити можливості розрахунку конструкцій можна, зокрема, за рахунок оболонок з різаною (моржевою) серединною поверхнею.

Нехай просторова крива L_2, так звана напрямна різаної поверхні, задана радіусом-вектором $\vec{r}_0(s)$, де s – натуральний параметр, а твірна L_1 поверхні задана параметричними рівняннями $\rho=\rho(\alpha)$, $\zeta=\zeta(\alpha)$ в плоскій системі координат з ортами $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Тоді різану поверхню, утворену рухом заданої твірної L_1 по заданій напрямній L_2, можна зобразити векторним рівнянням [3]

$$\vec{r}(\alpha,s)=\vec{r}_0(s)+\rho(\alpha)\vec{c}(s)+\zeta(\alpha)\vec{d}(s). \qquad (1)$$

Локальна система координат з ортами $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у точках напрямної кривої L_2 вводиться співвідношеннями

$$\begin{aligned}\vec{c}(s)&=\vec{n}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta;\\ \vec{d}(s)&=-\vec{n}\sin\theta+\vec{b}\cos\theta,\end{aligned} \qquad (2)$$

де $\vec{n}$, $\vec{b}$ – вектори головної нормалі і бінормалі напрямної. Параметр θ виражається через кручення $\varkappa$ напрямної кривої співвідношенням

$$\theta=\int\varkappa ds. \qquad (3)$$

У випадку, коли напрямна L_2 є колом, різана поверхня вироджується у поверхню обертання. За аналогією з поверхнями обертання лінії

L_1 на різаній поверхні прийнято називати меридіанами, ортогональні ж траєкторії меридіанів - паралелями. Паралелі та меридіани різаної поверхні є лініями головних кривин [2].

Взагалі різані поверхні становлять досить широкий клас, в який, крім поверхонь обертання, включаються ще каналові і трубчасті поверхні [2].

Враховуючи формули диференціювання векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$ [3], легко одержати вирази для коефіцієнтів першої квадратичної форми та головних кривин різаної поверхні

$$A_1^2=(\rho')^2+(\zeta')^2; \quad A_2^2=[1+k(\zeta\sin\theta-\rho\cos\theta)]^2; \tag{4}$$

$$k_1=\frac{\zeta''\rho'-\zeta'\rho''}{\pm[(\rho')^2+(\zeta')^2]^{3/2}}; \tag{5}$$

$$k_2=-\frac{k}{\pm[(\rho')^2+(\zeta')^2]^{1/2}}\;\frac{\rho'\sin\theta+\zeta'\cos\theta}{[1+k(\zeta\sin\theta-\rho\cos\theta)]},$$

де k - кривина напрямної L_2.

У випадку, коли меридіаном різаної поверхні є пряма лінія, тобто для різаної поверхні нульової гаусової кривини, зручно ввести параметризацію твірної L_1 співвідношеннями

$$\rho=-s_1\cos\gamma; \quad \zeta=-s_1\sin\gamma, \tag{6}$$

де s_1 - довжина, яка відлічується від деякого фіксованого початку на кривій L_1; $\gamma=const$.

Використовуючи вирази (4), (5) після підстановки у них співвідношень (6), легко записати загальні інтеграли статичних і геометричних рівнянь безмоментної теорії [1] для оболонок з різаною серединною поверхнею нульової гаусової кривини.

Коли ж напрямною різаної поверхні є плоска лінія

$$x=x_0(\beta); \quad y=y_0(\beta); \quad z=0, \tag{7}$$

то формули (4) і (5) значно спрощуються, оскільки кручення в цьому випадку дорівнює нулеві. Це виродження різаної поверхні можна розглядати як узагальнення поверхні обертання в тому сенсі, в якому будь-яка крива L_2 є узагальненням кола.

Умови Гауоса-Кодацці [3] для цього випадку виродження різаної поверхні записуються у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_2}{r_2}\right)=\omega(\alpha)\,\chi(\beta);$$
$$\frac{A_1A_2}{r_1r_2}=\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\rho'(\alpha)}{A_1(\alpha)}\right]\chi(\beta). \tag{8}$$

Тут

$$\omega(\alpha)=-\frac{\rho'(\alpha)}{r_1};\qquad \chi(\beta)=\frac{y_0''x_0'-x_0''y_0'}{(x_0')^2+(y_0')^2};$$

r_1, r_2 – величини обернені головним кривинам k_1, k_2, тобто радіуси головних кривин.

Система трьох рівнянь рівноваги безмежної теорії [1] оболонок з різаною серединною поверхнею, що має плоску напрямну криву, записується

$$\frac{\partial A_2T_1}{\partial\alpha}+A_1\frac{\partial S}{\partial\beta}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}T_2=-A_1A_2q_1;$$
$$\frac{\partial A_2S}{\partial\alpha}+A_1\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}S=-A_1A_2q_2; \tag{9}$$
$$\frac{T_1}{r_1}+\frac{T_2}{r_2}=q_n.$$

Введенням функції напружень W за формулами

$$T_1=\chi(\beta)\frac{r_2}{A_2^2}\frac{\partial W}{\partial\beta};$$
$$S=\frac{1}{\varphi(\alpha)A_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha}+\frac{1}{A_1}\int\left[-A_1A_2q_1+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}r_2q_n\right]d\beta, \tag{10}$$

система (9) зводиться до одного рівняння

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{A_2^2}{\varphi(\alpha)A_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right]+\frac{A_1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\chi(\beta)\frac{r_2^2}{A_2^2r_1}\frac{\partial W}{\partial\beta}\right]=$$
$$=+A_1A_2q_2-A_1\frac{\partial}{\partial\beta}(r_2q_n)+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{A_2^2}{A_1}\int\left[-A_1A_2q_1+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}r_2q_n\right]d\beta\right\} \tag{11}$$

де

$$\varphi(\alpha)=\frac{r_1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\rho'(\alpha)}{A_1(\alpha)}\right].$$

При цьому використаємо співвідношення

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}\frac{r_2}{r_1}T_1=\frac{r_2}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_2^2}{r_2}T_1\right), \tag{12}$$

що випливає із умов Гаусса-Кодацці. Третє рівняння (9) служить для визначення зусилля T_2.

Аналогічно можна перетворити також систему геометричних рівнянь [1] безмежної теорії оболонок з різаною серединною поверхнею.

Наведені співвідношення значно спрощуються, коли твірну L_1 параметризувати кутом α між нормаллю в довільній її точці і бінормаллю кривої L_2 , а напрямну L_2 параметризувати кутом β між нормаллю в довільній точці і деяким фіксованим напрямком в її площині [4].

Таким чином, крайові задачі для безмоментних оболонок з різаною серединною поверхнею зводяться до розв'язання при відповідних крайових умовах двовимірного рівняння другого порядку в частинних похідних (11), тип якого визначається знаком гаусової кривини поверхні. Область зміни параметрів α, β в плоскій системі координат (α, β) є або безмежною смугою в напрямку координати β або прямокутником, обмеженим лініями $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_0$, $\beta=\beta_1$.

Для замкненої по β оболонки необхідно задовольняти умову періодичності функції напружень по координаті β , на краях $\alpha=\alpha_0$ і $\alpha=\alpha_1$ задати умови, що відповідають типу закріплення.

Наприклад, два краї оболонки, що проходять вздовж координатних ліній $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$ шарнірно оперті, тобто

$$\begin{aligned} &T_1=T_0^*; \quad v=0, \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0 \\ &T_1=T_1^*; \quad v=0, \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Із статичних умов (13), враховуючи співвідношення (10), одержуємо для визначення функції напружень крайові умови

$$W=c_1 \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0; \quad W=c_2 \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_1. \tag{14}$$

З огляду на те, що зусилля в оболонці визначається через похідні функції напружень, одну із сталих C_1, C_2 можна прийняти рівною нулеві; другу тоді визначимо із умови рівності нулеві головного вектора всіх діючих на оболонку зовнішніх і крайових навантажень.

У випадку, коли оболонка має площину симетрії, що проходить через лінію $\beta = \beta^*$, одержимо з умови рівності дотичного зусилля S на лінії $\beta = \beta^*$ додаткову умову

$$W = \int H d\alpha + C_3 \qquad \text{при} \qquad \beta = \beta^*, \tag{15}$$

де

$$H(\alpha,\beta) = \varphi(\alpha) \int \left[-A_1 A_2 q_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} r_2 q_n \right] d\beta .$$

Прийнявши, наприклад, $C_1 = 0$ дві інші сталі, можемо визначити з умов неперервності функції напружень у точках (α_0, β^*) і (α_1, β^*).

Аналогічними міркуваннями можна користуватися при постановці інших крайових умов.

Література

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.

2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. I. М.-Л., ГИТТЛ, 1947.

3. Норден А. П. Теория поверхностей. М., ГИТТЛ, 1956.

4. Флейшман Н. П., Савула Я. Г. - "Прикладная механика", 1972, т. VIII, вып. 3.

УДК 519.21

І.Д.Квіт

ЕНЕРГОМОМЕНТИ

1. Нехай додатнозначна випадкова змінна ξ буде абсолютно неперервна з густиною

$$p(t)=\begin{cases} =0, & t<0, \\ \geq 0, & t>0. \end{cases} \qquad \int_0^\infty p(t)\,dt=1. \tag{1}$$

Тоді існують такі додатні числа α та β, що мелінове перетворення густини (1)

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}p(t)\,dt, \quad (z=x+iy,\ i=\sqrt{-1}) \tag{2}$$

абсолютно збігається в смузі

$$1-\alpha<x<1+\beta, \quad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{3}$$

та є принаймні в ній аналітичною функцією. Вираз (2) при $y=0$ є початковим моментом порядку $x-1$

$$m(x-1)=\int_0^\infty t^{x-1}p(t)\,dt, \quad 1-\alpha<x<1+\beta. \tag{4}$$

Густина розмаху для випадку двох спостережень над випадковою змінною ξ з густиною (1) згідно з [1] має вигляд

$$q_2(t)=2\int_0^\infty p(\tau)\,p(\tau+t)\,d\tau, \quad t>0. \tag{5}$$

При $t=0$ додатна величина (5) може бути скінченна або нескінченна. Якщо інтеграл

$$E\xi=\int_0^\infty p^2(t)\,dt \tag{6}$$

збігається, то він називається енергією випадкової змінної ξ з густиною (1). У випадку збіжності (6) існують такі додатні числа A та B, що інтеграл

$$\psi(z)=\int_0^\infty t^{2z-1}p^2(t)\,dt, \quad (z=x+iy,\ i=\sqrt{-1}), \tag{7}$$

абсолютно збігається в смузі

$$\frac{1}{2}-A < x < \frac{1}{2}+B, \quad (A>0, B>0), \tag{8}$$

та є принаймні в ній аналітичною функцією. Вираз (7) при $y=0$ назвемо початковим енергомоментом порядку $2x-1$

$$\mathcal{E}m(2x-1)=\int_0^\infty t^{2x-1} p^2(t)dt, \quad \frac{1}{2}-A<x<\frac{1}{2}+B. \tag{9}$$

Очевидно, що початковий енергомомент нульового порядку збігається з енергією

$$\mathcal{E}m(0)=\mathcal{E}\xi \tag{10}$$

Мета нашої замітки - вказати два зображення початкових енергомоментів (9) і два представлення енергії (6) за допомогою мелінового перетворення (2).

2. З теореми Планшереля [2] відомо, що коли енергія (6) густини (1) існує, то для всіх x з інтервалу (8) початковий енергомомент (9) виражається за допомогою мелінового перетворення (2) формулою

$$\mathcal{E}m(2x-1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^2dy. \tag{11}$$

При $x=\frac{1}{2}$ вираз (11) переходить у вираз для енергії

$$\mathcal{E}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\tfrac{1}{2}+iy)|^2dy. \tag{12}$$

3. З існування початкових енергомоментів порядку $2x-1$ для x з інтервалу (8) випливає, що збігається інтеграл

$$\int_0^\infty t^{z-1}p^2(t)dt, \quad 1-2A<Re z<1+2B.$$

За формулою Парсеваля [2] маємо, що для всіх z зі смуги $1-2A< Re z<1+2B$ дістаємо співвідношення

$$\int_0^\infty t^{z-1}p^2(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\varphi(z-\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta, \tag{13}$$

$$\max(1-\alpha, Re z-1-\beta)<c<\min(1+\beta, Re z-1+\alpha).$$

При $\xi = 1$ вираз (13) переходить у вираз для енергії

$$\mathcal{E}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(1-\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta, \tag{14}$$

$$\max(1-\alpha, -\beta) < c < \min(1+\beta, \alpha).$$

Формули (11) і (13) представляють початкові енергомоменти відповідних порядків, а формули (12) і (14) представляють енергію випадкової змінної ξ з густиною (1) у термінах мелінового перетворення (2).

4. Для ілюстрації формул, зв'язаних з енергією та енергомоментами, розглянемо кілька прикладів. Випадкова змінна Парето з густиною

$$p(t) = \frac{\alpha a^{\alpha}}{t^{1+\alpha}}, \quad 0 < a < t, \quad (\alpha > 0), \tag{15}$$

має меліновим перетворенням функцію

$$\varphi(z) = \frac{\alpha a^{z-1}}{1+\alpha-z}, \quad \operatorname{Re} z < 1+\alpha.$$

Енергомоменти розподілу (15) дорівнюють

$$\mathcal{E}m(2x-1) = \frac{\alpha a^{2(x-1)}}{2(1+\alpha-x)}, \quad x < 1+\alpha.$$

Енергія розподілу (15) записується

$$\mathcal{E}\xi = \frac{\alpha}{a(1+2\alpha)}.$$

Енергія арксинус-розподілу з густиною

$$p(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}, \quad 0 < t < 1, \tag{16}$$

не існує. Тим більше не існують енергомоменти розподілу (16).

Співвідношення (9) і (11) можна використати для знаходження вартості одного з інтегралів, коли значення іншого відоме. Наприклад, для розподілу з густиною

$$p(t) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, \quad t > 0,$$

і меліновим перетворенням

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi z}{2}}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 2,$$

маємо один раз

$$\int_0^{\infty} t^{2x-1}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\right]^2 dt = \frac{2}{\pi^2}\Gamma(x)\Gamma(2-x), \quad 0<x<2;$$

а інший раз

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}(x+iy)}\right|^2 dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sin^2\frac{\pi x}{2}\,ch^2\frac{\pi y}{2}+\cos^2\frac{\pi x}{2}\,sh^2\frac{\pi y}{2}}.$$

Отже

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sin^2\frac{\pi x}{2}\,ch^2\frac{\pi y}{2}+\cos^2\frac{\pi x}{2}\,sh^2\frac{\pi y}{2}} = \frac{4}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(2-x), \quad 0<x<2.$$

Аналогічно можна також використати інші співвідношення.

Література

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М., "Мир", 1965.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., Гостехиздат, 1948.

УДК 539.3

Л.Й.Ощипко

РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПУАНКАРЕ ДЛЯ СИСТЕМИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай область S^+ займає внутрішність або зовнішність кола γ одиничного радіуса на площині комплексної змінної $\zeta = x+iy$. Задача Рімана-Гільберта-Пуанкаре [1,6] для системи функцій полягає в тому, щоб знайти голоморфні в області S^+ функції $\Phi_i = \Phi_i(\zeta)$ $(i = 1,2\ldots n)$ за граничними умовами

$$Re\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[a_{\alpha ij}(\sigma)\Phi_i^{(j)}(\sigma)+\int_\gamma h_{\alpha ij}(\sigma)\Phi_i^{(j)}(\sigma)ds\right]\right\} = f_\alpha(\sigma), \qquad (1)$$

$$\alpha = 1,2,\ldots n,$$

де σ - афікс точки на γ ; Re - дійсна частина; $f_\alpha(\sigma, a_{\alpha ij}$, $h_{\alpha ij}$ - задані функції на γ, що задовольняють умову H ; $\Phi_i^{(j)}(\sigma)$ - означає граничне значення $[\Phi_i^{(j)}(\zeta)]^+$ похідної порядку j функції $\Phi_i(\zeta)$ до порядку n включно. Вважатимемо, що функції $\Phi_i^{(j)}(\zeta)$ на γ задовольняють умову H .

Побудуємо розв'язок задачі (I) для випадку, коли

$$h_{\alpha ij} = 0; \quad a_{\alpha ij} = b_{\alpha ij}\,\sigma^{-j}; \qquad \begin{array}{l} j = 1,2, \dots m; \\ \alpha = i = 1,2, \dots n; \end{array} \tag{2}$$

$b_{\alpha ij}$ - сталі коефіцієнти.

Для кінцевої області зобразимо функції $\Phi_i(\zeta)$ у вигляді

$$\Phi_i(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{ki}\,\zeta^k; \quad i = 1,2 \dots n. \tag{3}$$

Тоді

$$\Phi_i^{(j)}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\prod_{\ell=0}^{j-1}(k-\ell)\right] d_{ki}\,\zeta^{k-j}; \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots n; \\ j = 1,2, \dots m. \end{array} \tag{4}$$

Підставляючи залежності (4) у граничні умови (1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ , одержуємо систему n алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів d_{ki}

$$\sum_{i=1}^{n} b_i D_i = A; \tag{5}$$

де b_i - матриці, коефіцієнти яких $b_{\alpha ij}$; D_i - вектори з коефіцієнтами $\left[\prod_{\ell=0}^{j-1}(k-\ell)\right] d_{ki}$; A - вектор з коефіцієнтами $A_{k\alpha}$; $A_{k\alpha}$ - коефіцієнти розкладу в ряд функцій $f_\alpha(\sigma)$.

Якщо ж область S^+ займає зовнішність кола одиничного радіуса γ , то зображення функцій (3) та їх похідних (4) матиме відповідно вигляд

$$\Phi_i(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{-ki}\,\zeta^{-k};$$

$$\Phi_i^{(j)}(\zeta) = (-1)^j \sum_{k=0}^{\infty}\left[\prod_{\ell=0}^{j-1}(k+\ell)\right] d_{-ki}\,\zeta^{-(k+j)} \qquad i = 1,2, \dots n. \tag{6}$$

Аналогічно, як і для кінцевої області задача зводиться до системи n алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів d_{-ki}.

До розв'язаної вище задачі Рімана-Гільберта-Пуанкаре зводиться задача про вільне опирання круглої (безмежної з круговим отвором) пластинки по несиметричному ребру жорсткості.

Граничні умови [2] для кругової границі мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&2\,Re\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi_2(\sigma)+\chi_2(\sigma)\right\}=f_1(\sigma);\\
&2\,Re\Big\{\pm\delta_2\sigma^2\varphi_2'''(\sigma)+(\pm\delta_2\mp\delta_1-\nu+1)\sigma\varphi_2''(\sigma)+2(\pm\delta_1+\nu-1)\varphi_2'(\sigma)+\\
&\quad+(\pm2\delta_2\mp\delta_1-\nu+1)\sigma^2\chi_2''(\sigma)\pm\delta_2\sigma^3\chi_2'''(\sigma)+6\lambda(1-\nu)\big[\sigma\varphi_1''(\sigma)-\\
&\quad-2\varphi_1'(\sigma)+\sigma^3\chi_1''(\sigma)\big]\Big\}=-\frac{R}{D}f_2(\sigma);\\
&2\,Re\Big\{2\lambda\big[\mp\delta_3\sigma^2\varphi_2'''(\sigma)\mp(2\delta_3+\delta)\sigma\varphi_2''(\sigma)\mp2(\delta+\delta_3)\varphi_2'(\sigma)\mp\\
&\quad\mp\delta_3\sigma^3\chi_2'''(\sigma)\mp(3\delta_3+\delta)\sigma^2\chi_2''(\sigma)\big]\pm\delta_3\sigma^2\varphi_1'''(\sigma)\pm\big[(\varkappa_1+1)\delta_3+\delta\big]\sigma\varphi_1''(\sigma)+\\
&\quad+\big[1\mp(\varkappa_1+1)(\delta+\delta_3)\big]\varphi_1'(\sigma)+\frac{1}{\sigma}\varphi_1(\sigma)+\sigma\chi_1'(\sigma)\pm(3\delta_3+\delta)\sigma^2\chi_1''(\sigma)\pm\\
&\quad\pm\delta_3\sigma^3\chi_1'''(\sigma)\big]=\frac{1}{\mu h^2}f_3(\sigma);\qquad\qquad (7)\\
&2\,Re\Big\langle i\Big\{\mp2\lambda\delta_3\big[\sigma^3\varphi_2^{IV}(\sigma)+4\sigma^2\varphi_2'''(\sigma)+\sigma^4\chi_2^{IV}(\sigma)+6\sigma^3\chi_2'''(\sigma)+\\
&\quad+6\sigma^2\chi_2''(\sigma)\big]\pm\delta_3\big[\sigma^3\varphi_1^{IV}(\sigma)+(3+\varkappa_1)\sigma^2\varphi_1'''(\sigma)\big]+\varphi_1'(\sigma)-\\
&\quad-\frac{1}{\sigma}\varphi_1(\sigma)\pm\delta_3\big[\sigma^4\chi_1^{IV}(\sigma)+6\sigma^3\chi_1'''(\sigma)+6\sigma^2\chi_1''(\sigma)\big]+\\
&\quad+\sigma\chi_1'(\sigma)\Big\}\Big\rangle=\frac{1}{\mu h^2}f_4(\sigma).
\end{aligned}
$$

Тут і нижче верхній знак береться для внутрішньої області, а нижній – для внутрішньої. Функції $\varphi_2(\zeta)$ і $\chi_2(\zeta)$ визначають прогин пластинки [4]

$$W = 2Re[\bar{\zeta}\varphi_2(\zeta) + \chi_2(\zeta)] + W_0; \qquad (8)$$

який задовольняє рівняння

$$D\Delta\Delta W = q; \qquad (9)$$

q – поперечне навантаження на пластинку; D – циліндрична жорсткість пластинки; W_0 – частковий розв'язок рівняння (9).

Функції $\varphi_1(\zeta)$ і $\chi_1(\zeta)$ визначають функцію напружень Ері, тобто напружений стан пластинки [4]

$$U = Re[\bar{\zeta}\varphi_1(\zeta) + \chi_1(\zeta)]; \qquad (10)$$

$\varkappa_1 = -\frac{3-\nu}{1+\nu}$; ν – коефіцієнт Пуассона; δ ; δ_1 ; δ_2 ; δ_3 – відповідно жорсткості ребра на розтяг, згин і кручення; $\lambda = \frac{h_0}{h}$; h_0 – зміщення осі ребра відносно серединної площини пластинки; h – товщина пластинки; $f_i(\sigma)$ $(i = 1,2,3,4)$ – залежать від навантаження на ребро і W_0 [2].

При заміні $\frac{1}{\zeta}\varphi_i(\zeta) = \varphi_i^0(\zeta)$ задача (7) матиме вигляд задачі (1),(2).

Застосуванням запропонованої методики задача про вільне опирання пластинки по несиметричному ребру жорсткості зводиться до розв'язку системи чотирьох алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу в ряд функцій $\varphi_1(\zeta)$; $\chi_1(\zeta)$; $\varphi_2(\zeta)$; $\chi_2(\zeta)$.

Визначник одержаної системи

$$\begin{aligned} J_k^* = -\frac{2}{1+\nu}\Big\langle (\delta_2 k^2 + 2k + \delta_1 \pm \nu \pm 1)\Big\{(k^2-1)\big[(3-\nu)k^2\delta + 2k \mp (1-\nu)\big]\delta_3 + (2k \pm 1 \mp \nu)\delta \pm \\ \pm(1+\nu)\Big\} + 12\lambda^2(1-\nu)\Big\{(1+\nu)\big[(k^2-1)^2\delta_3 + \delta\big] + k^2(k^2-1)\big[2k \mp (1-\nu)\big]\delta\delta_3\Big\}\Big\rangle < 0, \end{aligned}$$

а тому розв'язок її однозначний.

Для круглої пластинки радіуса R , навантаженої зосередженою силою в довільній точці $R\zeta_0$, розв'язок задачі матиме вигляд

$$W=\frac{PR^2}{16\pi D}\Big\{(\zeta-\zeta_0)(\bar\zeta-\bar\zeta_0)\ln\frac{(\zeta-\zeta_0)(\bar\zeta-\bar\zeta_0)}{(1-\zeta\bar\zeta_0)(1-\bar\zeta\zeta_0)}+(1-\rho_0^2)(1-\rho^2)\Big[1+$$

$$+2\frac{1+\nu+(1-\nu)(\delta+\delta_3)}{(\delta_1+1+\nu)[1+\nu+(1-\nu)(\delta+\delta_3)]+12\lambda^2(1-\nu^2)(\delta+\delta_3)}+$$

$$+4\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{(k^2-1)\big[(3-\nu)\delta k^2+2k+1-\nu\big]\delta_3+(2k+1-\nu)\delta+1+\nu\Big\}\frac{Re(\bar\zeta_0\zeta)^k}{J_k}\Big]\Big\};$$

$$U=-\frac{PR^2}{16\pi D}\lambda\mu h(1-\rho_0^2)\Big\{\frac{(1+\nu)(\delta+\delta_3)(1-\rho^2)}{(\delta_1+1+\nu)[1+\nu+(1-\nu)(\delta+\delta_3)]+12\lambda^2(1-\nu^2)(\delta+\delta_3)}+$$

$$+2(1+\nu)(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}\big[(k^2-1)(k^2\delta+k-1)+\delta\big]\frac{Re(\bar\zeta_0\zeta)^k}{J_k}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-1)(k^2\delta+k-1)\,\delta_3\,\frac{Re(\bar\zeta_0\zeta)^k}{J_k};$$

де
$$J_k=-\frac{1+\nu}{2}J_k^*;\quad \rho_0=|\zeta_0|;\quad \rho=|\zeta|.$$

Прийнявши $\lambda=0$, дістанемо розв'язок задачі про згин пластинки, підкріпленої симетричним ребром жорсткості [5] . При $\delta_2=\delta_3=0$ розв'язок задачі збігається з [3] , де використовувались пом'якшені граничні умови.

На рис. I,2 показані залежності прогину під силою від жорсткості δ_1 для різних λ . Вважалося, що ребро прямокутного поперечного перерізу ширини b і висоти h_1 і прийнято $\frac{b}{R}=\frac{1}{20}$, $\frac{b}{h}=1$, $\frac{h_1}{h}=3$, $\nu=0{,}3$. Жорсткості δ , δ_2 і δ_3 визначалися відповідно через δ_1 . Для порівняння наведено цю ж залежність (пунктиром) при пом'якшених граничних умовах.

Для безмежної пластинки з круговим отвором радіуса R , навантаженої зосередженою силою в довільній точці $R\zeta_0$, розв'язок одержуємо у вигляді

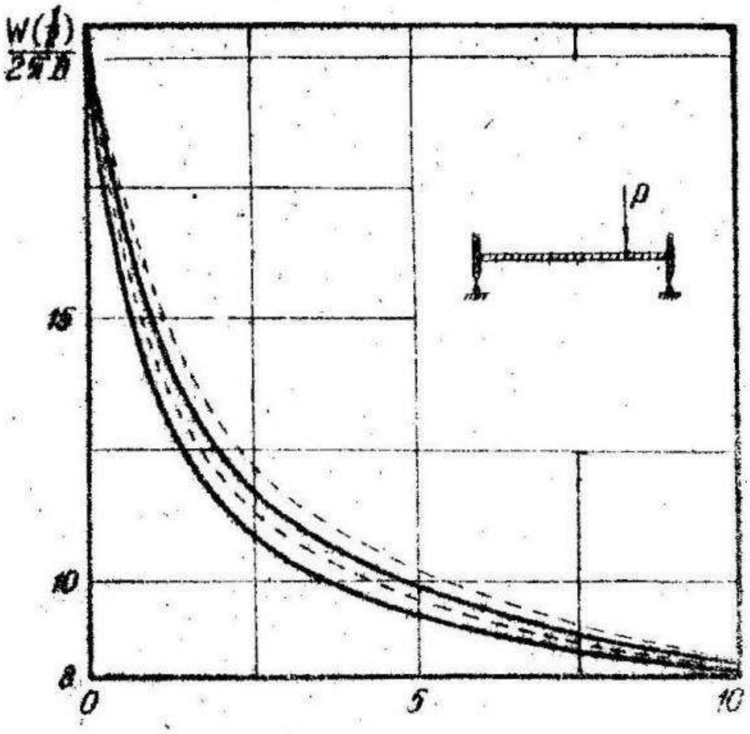

Рис.1

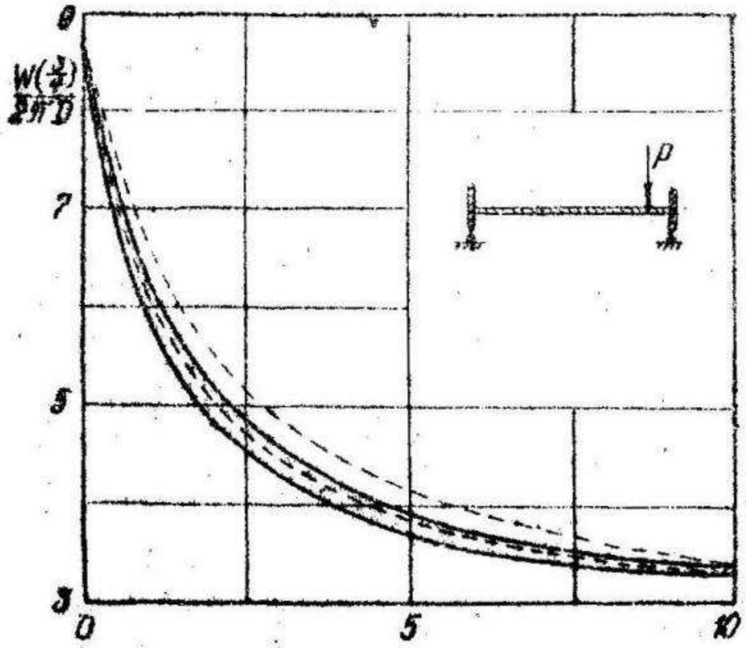

Рис.2

$$W=\frac{PR^2}{16\pi D}\left\{(\zeta-\zeta_0)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0)\ln\frac{(\zeta-\zeta_0)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0)}{(1-\zeta\bar{\zeta}_0)(1-\bar{\zeta}\zeta_0)}+2\ln(\rho_0)\cdot(\rho^2-1)+\right.$$

$$+2\left[\rho_0^2-1-2\frac{(\delta_1-1-\nu)(1+\delta+\delta_3)+12\lambda^2(1-\nu)(\delta+\delta_3)}{(\delta_1+1-\nu)(1+\delta+\delta_3)+12\lambda^2(1-\nu)(\delta+\delta_3)}\ln(\rho_0)\cdot\ln\rho+\right.$$

$$\left.+4(1-\rho_0^2)(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(k^2-1)\left[(3-\nu)k^2\delta+2k+1-\nu\right]\delta_3+(2k-1+\nu)\delta+(1+\nu)\right\}\frac{Re(\bar{\zeta}_0\zeta)^{k}}{J_k}\right.;$$

$$U=\frac{PR^2}{2\pi D}\mu h\lambda\left\{\frac{2(\delta+\delta_3)\ln(\rho_0)}{(\delta_1+1-\nu)(1+\delta+\delta_3)+12\lambda^2(1-\nu)(\delta+\delta_3)}\ln\rho+\right.$$

$$+(1+\nu)(1-\rho_0^2)(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta-(k^2-1)(k^2\delta+k+1)\delta_3\right]\frac{Re(\bar{\zeta}_0\zeta)^{k}}{J_k}+$$

$$\left.+2(1-\rho_0^2)\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-1)(2k\delta+1+\nu)\delta_3\frac{Re(\bar{\zeta}_0\zeta)^{-k}}{J_k}\right\};$$

де $\qquad J_k=-\frac{1+\nu}{2}J_k^{*};\quad \rho_0=|\zeta_0|;\quad \rho=|\zeta|.$

Прийнявши $\lambda=0$, дістанемо $U=0$, а W дає прогин пластинки з симетричним ребром жорсткості [5]. Якщо ж прийняти $\delta_2=\delta_3=0$, то матимемо розв'язок задачі при пом'якшених граничних умовах [3].

На рис. 3,4 побудовані графіки залежності прогину під силою від жорсткості на згин δ_1 і ексцентриситету λ. Для порівняння наведені ті ж графіки при пом'якшених граничних умовах.

Графіки рис. 1,2,3,4 наочно демонструють вплив жорсткостей δ_2 і δ_3 на прогин під силою. Як і слід було чекати, з наближенням сили до границі пластинки зростає вплив цих жорсткостей на прогин.

Література

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

2. Ощипко Л. Й. Равновесие пластин с симметричными и несимметричными упругими ребрами. Автореферат канд. дисс. Львов, 1971.

3. Ощипко Л. Й. Упругое равновесие пластинки, опертой по несимметричному ребру жесткости. - "Динамика и прочность машин", 1972, № 15.

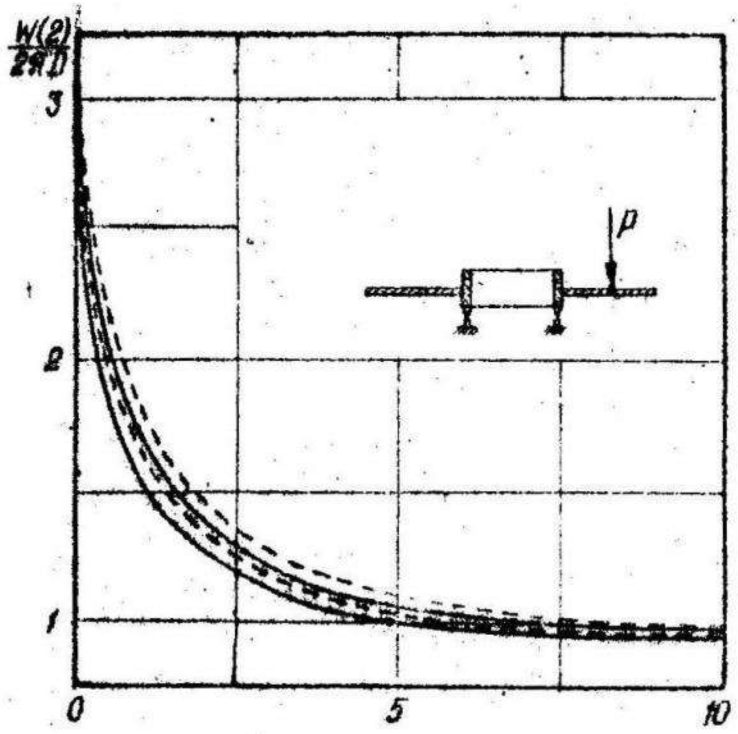

Рис.3

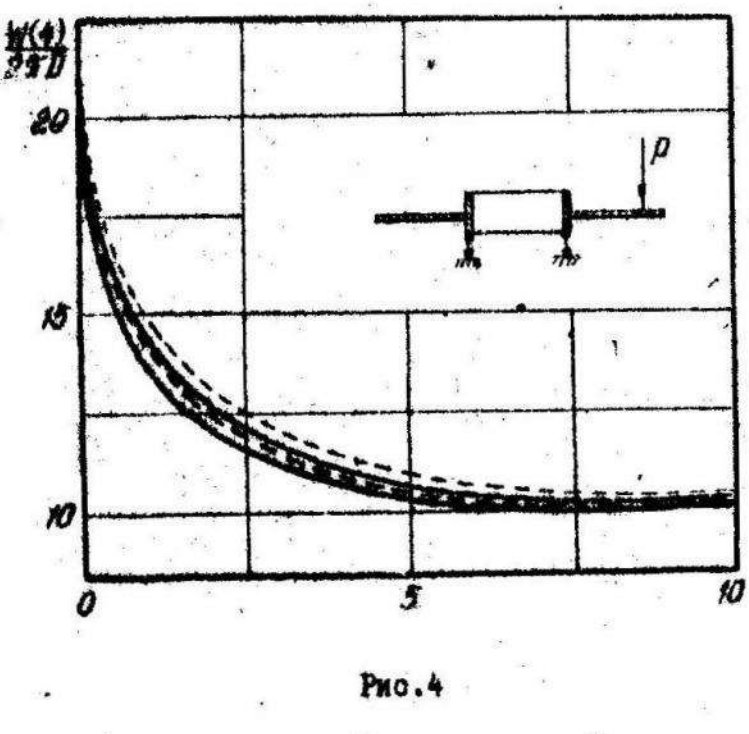

Рис.4

4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., "Наукова думка", 1964.

5. Флейшман Н. П., Ощипко Л. Й. Произвольный изгиб тонкой плиты с круглым опорным кольцом. - "Прикладная математика", 1966, т. II, вып. 4.

6. Хведелидзе Б. В. Об одной линейной граничной задаче Римана для системы аналитических функций. - "Сообщения АН Груз.ССР", 1943, т. IV.

УДК 539.370

В.М.Косарчин

ДО ЗАДАЧІ ПРО КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ

Задача про пружне кручення призматичного стержня зводиться [2] до знаходження функції $\Phi(x,y)$, яка в області поперечного перерізу стержня Ω задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-2 \tag{1}$$

і на її границі S умову

$$\Phi|_S=0. \tag{2}$$

Нехай область поперечного перерізу стержня обмежена прямими $x=\pm\alpha$, $y=\pm\beta$ і дугами деяких кривих $S_1, S_2, \ldots, S_N$, заданих параметрично

$$x^i=x^i(t),\quad y^i=y^i(t)\quad (i=1,2,\ldots,N).$$

Розв'язок задачі (1), (2) для випадку прямокутної області $-\alpha\leq x\leq\alpha,\ -\beta\leq y\leq\beta$ записуємо у вигляді Нав'є

$$\Phi_0=-\sum_{l,m=1,2\ldots}\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma_{lm}}{\pi^2(l^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right),$$

де γ_{lm} - коефіцієнти розкладу правої частини рівняння (1):

$$-2=\sum_{lm}\gamma_{lm}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right)$$

Розв'язок задачі (1), (2) у випадку області, обмеженої ще й дугами кривих, зображаємо аналогічно введеному в [1] потенціалом

$$\Phi(x,y)=\Phi_0(x,y)-\int_S g_0(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta)dS, \tag{3}$$

де $g_0(x,y,\xi,\eta)=-\sum_{\ell m}\frac{4\alpha\beta}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right)\cdot$

$$\cdot\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{\xi}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\eta}{\beta}+1\right)$$

функція Гріна і $\mu(\xi,\eta)$ – довільна густина.

Функція (3) є розв'язком рівняння (1), оскільки

$\Delta\Phi_0(x,y)=-2$ і $\Delta_{xy}g_0(x,y;\xi,\eta)=0$.

Позначивши через $\mu^k(\tau)$, значення густини потенціалу на кривій з індексом k запишемо (3) так

$$\Phi(x,y)=\Phi_0(x,y)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell m}\int_0^{2\pi}\frac{4\alpha\beta}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right)\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{\xi^k(\tau)}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\eta^k(\tau)}{\beta}+1\right)\cdot \tag{4}$$

$$\cdot\mu^k(\tau)d\tau.$$

Здійснюючи граничний перехід до контура $S_k(x\to\xi^k,\ y\to\eta^k)$ і враховуючи умову $\Phi(x,y)|_S=0$, отримуємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомої густини потенціалу

$$-\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi}g_0(x^n(t),y^n(t);\xi^k(\tau),\eta^k(\tau))\mu^k(\tau)d\tau=\Phi_0(x^n(t),y^n(t)), \tag{5}$$
$$(n=1,2,\dots,N).$$

Наближений розв'язок цієї системи рівнянь можна одержати таким способом.

Нехай

$$\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{x^n(t)}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y^n(t)}{\beta}+1\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{p=0,1,\dots}\left(P^{1n}_{\ell mp}\cos pt+P^{2n}_{\ell mp}\sin pt\right),$$

$$\Phi_0\left(x^n(t), y^n(t)\right) = \sum_{p=0,1,\dots}\left(f_p^{1n}\cos pt + f_p^{2n}\sin pt\right),$$

$$\mu^k(t) = \sum_p\left(\mu_p^{1k}\cos pt + \mu_p^{2k}\sin pt\right).$$

Підставляючи ці розклади в (5), дістаємо

$$\sum_p\left(f_p^{1n}\cos pt + f_p^{2n}\sin pt\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell m}\frac{4\alpha\beta}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sum_p P_{\ell mp}^{1n}\cos pt + P_{\ell mp}^{2n}\sin pt.$$

Умова тотожного виконання цієї рівності приводить до безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих μ_r^{1k}, μ_r^{2k}

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell mr}\frac{4\alpha\beta P_{\ell mp}^{1n}P_{\ell mr}^{1k}}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\mu_r^{1k} - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell mr}\frac{4\alpha\beta P_{\ell mp}^{1n}P_{\ell mr}^{2k}}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\mu_r^{2k} = f_p^{1n},$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell mr}\frac{4\alpha\beta P_{\ell mp}^{2n}P_{\ell mr}^{1k}}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\mu_r^{1k} - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell mr}\frac{4\alpha\beta P_{\ell mp}^{2n}P_{\ell mr}^{2k}}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\mu_r^{2k} = f_p^{2n}$$

Підставляючи знайдені μ_p^{1k}, μ_p^{2k} в (4), одержуємо остаточно

$$\Phi(x,y) = \sum_{\ell m}\left\{-\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma_{\ell m}}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)} + \frac{4\alpha\beta}{\pi^2(\ell^2\beta^2+m^2\alpha^2)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=0}^{\infty}\left(P_{\ell mp}^{1k}\mu_p^{1k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + P_{\ell mp}^{2k}\mu_p^{2k}\right)\right\}\sin\frac{\ell\pi}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{y}{\beta}+1\right).$$

Література

1. Гавеля С. П., Косарчин В. М. Пружна рівновага пологої сферичної оболонки, обмеженої еліпсом і прямокутником. - "Збірник робіт аспірантів. Природничі науки". Вид-во Львівського ун-ту, 1963.

2. Ляв А. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.

УДК 517.56/.8

М.А.Рудь

МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ $\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$

Існує багато формул [2,3,5,7,8], які зображають ψ -функцію або у вигляді інтеграла, або у вигляді ряду. Але внаслідок повільної збіжності інтегралів і рядів ні одна з цих формул не придатна для обчислення значень цієї функції.

Одним з таких рядів є

$$\psi(x)=-C-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right), \tag{1}$$

де C - постійна Ейлера. Цей ряд хоч і непогано збіжний, але для обчислення значення $\psi(x)$ за його допомогою потрібно було б взяти багато доданків, а це значно зменшило б точність обчислення. Однак він дає можливість вивести для $\psi(x)$ при $x>0$ вираз, який дозволяє врахуванням лише небагатьох доданків обчислити значення $\psi(x)$ з будь-якою точністю.

Для цього ряд справа у виразі (1) розділимо на дві частини

$$\psi(x)=-C-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)+\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right). \tag{2}$$

Для другої частини суми на основі співвідношення Ейлера-Маклорена між сумою та інтегралом [1,4] одержуємо такий вираз

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)=\ln\frac{x+N}{N}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{x+N}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{N^{2k}}-\frac{1}{(x+N)^{2k}}\right)-z_{2p}(N,x), \tag{3}$$

де B_{2k} - числа Бернулі [2,6]; $z_{2p}(N,x)$ - лишок ряду

$$z_{2p}(N,x)=(2p+2)!\int_0^1 P_{2p+2}(\xi)\left[\zeta(2p+3,N+\xi)-\zeta(2p+3,x+N+\xi)\right]d\xi,$$

де $P_i(t)$ - поліном Бернулі; $\zeta(m,a)$ - узагальнена дзета-функція Рімана.

Підставляючи значення лівої частини виразу (3) в (2), одержуємо

$$\psi(x)=-C-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{x}{n(x+n)}+\ln\frac{x+N}{N}+\frac{1}{2}\frac{x}{N(x+N)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2k}\left(\frac{1}{N^{2k}}-\frac{1}{(x+N)^{2k}}\right)-r_{2p}(N,x). \qquad (4)$$

Щоб спростити (4), знайдемо зручний вираз для постійної Ейлера. Одна з формул, яка виражає значення C [2] є

$$C=\lim_{s\to 1+0}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right]. \qquad (5)$$

Для дзета-функції Рімана

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

на основі співвідношення Ейлера-Маклорена одержуємо вираз

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{2N^s}+\frac{1}{s-1}\frac{1}{N^{s-1}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{s(s+1)\ldots(s+2k-2)}{N^{s+2k-1}}-r'_{2p}(N,s), \qquad (6)$$

де лишок ряду

$$r'_{2p}(N,s)=s(s+1)\ldots(s+2p+1)\int_0^1 P_{2p+2}(\xi)\zeta(s+2p+2,N+\xi)\,d\xi$$

Підстановка (6) в (5) і перехід до границі дає

$$C=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}+\frac{1}{2N}-\ln N+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2k}\frac{1}{N^{2k}}-r'_{2p}(N,1). \qquad (7)$$

Підставляючи значення C з (7) у (4) і проводячи спрощення, маємо

$$\psi(x)=-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x+n}+\ln(x+N)-\frac{1}{2}\frac{1}{x+N}-\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2k}\cdot\frac{1}{(x+N)^{2k}}+$$
$$+R_{2p}(N,x);\qquad x>0, \qquad (8)$$

де $R_{2p}(N,x)=(2p+2)!\int_0^1 P_{2p+2}(\xi)\zeta(2p+3,x+N+\xi)\,d\xi$

Для обчислення $\psi(x)$ при $x<0$ скористаємось такими функціональними співвідношеннями [2,3,8]:

$$\left.\begin{aligned}\psi(1-x)&=\psi(x)+\pi\,ctg\,\pi x;\\ \psi(t+1)&=\psi(t)+\frac{1}{t}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Звідси при $x<0$ маємо

$$\psi(-t)=\psi(t)+\frac{1}{t}+\pi\,ctg\,\pi t,\quad t=|x|. \tag{10}$$

Отже, для обчислення значень ψ -функції маємо такий алгоритм:

$$\psi(x)=\left\{\begin{array}{l}\Phi(t)-\frac{1}{t};\ t=x;\ x>0;\\ \Phi(t)+\pi\,ctg\,\pi t;\ t=|x|;\ x\leq 0\end{array}\right|, \tag{11}$$

де

$$\Phi(t)=\ln(t+N)-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{t+n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+N}-$$

$$-\sum_{K=1}^{P}\frac{B_{2K}}{2K}\,\frac{1}{(t+N)^{2K}}+R_{2p}(N,t);\quad t\geqslant 0. \tag{12}$$

Формули (II) і (12) дають можливість обчислювати з будь-якою точністю значення $\psi(x)$ при будь-якому дійсному x. Для цього лише потрібно вибрати оптимальні значення N і p.

З цією метою ми досліджували обчислення $\Phi(t)$ на ЕОМ "Минск-22". При $t=0$ вираз (12) дає від'ємне значення постійної Ейлера. Очевидно, що при $t=0$ друга сума в (12) гірше збіжна ніж при $t\neq 0$, тому досліджували обчислення виразу для $\Phi(0)$.

При кожному фіксованому значенні $N=4(1)18$ обчислювали з 32 десятковими знаками після коми значення $\Phi(0)$ для кожного з $p=1(1)N+10$. Аналіз результатів показав, що для обчислення значення $\Phi(0)$ з τ десятковими знаками після коми доцільно прийняти $N=[\frac{\tau+2}{2}]$ і $p=[1{,}06\tau+0{,}30]-[\frac{\tau+2}{2}]$, де $[y]$ ціла частина числа y. Це означає, що при вибраних значеннях N і p $\Phi(0)$, а отже і $\psi(x)$, обчислюється з потрібною точністю врахуванням лише мінімально необхідної кількості доданків.

Нижче наводимо значення перших 18 коефіцієнтів $B_{2K}/2K$, які дають можливість обчислювати значення ψ -функції з точністю в $\tau=4(1)33$ десяткових знаків після коми.

k	$B_{2k}/2k$	k	$B_{2k}/2k$
1	1:12	10	-174611:6600
2	-1:120	11	77683:276
3	1:252	12	-236364091:65520
4	-1:240	13	657931:12
5	1:132	14	-3392780147:3480
6	-691:32760	15	172 3168255201:85932
7	1:12	16	-770 9321041217:16320
8	-3617:8160	17	15 1628697551:12
9	43867:14364	18	-2631527155 3053477373:69090840

Література

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., "Наука", 1966.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
3. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М., ИЛ, 1963.
4. Крылов В. И. Приближенные вычисления интегралов. М., "Наука", 1967.
5. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М., "Высшая школа", 1965.
6. Петерс И., Штейн И. Математические таблицы. М., 1965.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М.-Л., Гостехиздат, 1957.
8. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., "Наука", 1968.

УДК 517.946

Є.М.Парасюк, П.С.Сеньо

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

Розглянемо задачу про відтворення овала, який на колі радіуса $R = 3,5$ з центром в початку координат індукує потенціал простого шару

$$f(\theta) = 2,4188 \sin\theta + 0,4572 \sin 3\theta + 0,1791 \sin 5\theta.$$

Припускаємо, що густина потенціалу кусково-стала

$$\mu(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 < \varphi < \pi, \\ -1, & -\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

як показано в [1], ця задача зводиться до розв'язання інтегро-диференціального рівняння I-го роду

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \ln\left[R^2 + r^2(\varphi) - 2Rr(\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right]\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi = f(\theta), \quad (1)$$

яке, в свою чергу, користуючись методом редукції, можна звести до системи трансцендентних рівнянь вигляду

$$g_k(r_0, r_1, r_2) = 0 \qquad k = 0,1,2, \quad (2)$$

де

$$g_k(r_0, r_1, r_2) = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\left[\frac{r(\varphi)}{R}\right]^{2k+1} \sin(2k+1)\varphi\, d\varphi - f_{2k+1},$$

$$r(\varphi) = r_0 + r_1 \cos 2\varphi + r_2 \cos 4\varphi,$$

а числа f_{2k+1} - відповідні коефіцієнти при $\sin(2k+1)\theta$ у виразу для функції $f(\theta)$.

Далі система (2) розв'язується за методом найскорішого спуску за схемою

$$r_k^{(n)} = r_k^{(n-1)} - \alpha \rho_k^{(n-1)}, \quad k = 0,1,2; \quad n = 1,2,3,\ldots \quad (3)$$

Тут числа $\rho_k^{(n)}$ складають розв'язок лінійної алгебраїчної системи

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial g_k(r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, r_2^{(n)})}{\partial r_i}\rho_i^{(n)} = g_k(r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, r_2^{(n)}), \quad (4)$$

$$k = 0,1,2; \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

а число α підбирається так, щоб

$$\sum_{k=0}^{2} g_k^2\left(r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, r_2^{(n)}\right) > \sum_{k=0}^{2} g_k^2\left(r_0^{(n)}-\alpha\rho_0^{(n)}, r_1^{(n)}-\alpha\rho_1^{(n)}, r_2^{(n)}-\alpha\rho_2^{(n)}\right).$$

Дана задача розв'язувалась на машині "Минск-22". При цьому як нульове наближення, на відміну від [1] і [2], вибирали коло $x^2+y^2=4$. Як виявилось, досить було виконати всього п'ять ітерацій, щоб одержати точний розв'язок вказаної задачі. Одержані наближення мали вигляд:

$$r_1(\varphi) = 1,8475 + 0,4886\cos 2\varphi + 0,3022\cos 4\varphi,$$

$$r_2(\varphi) = 1,4459 + 0,8248\cos 2\varphi + 0,6429\cos 4\varphi,$$

$$r_3(\varphi) = 1,0011 + 1,0364\cos 2\varphi + 0,9681\cos 4\varphi,$$

$$r_4(\varphi) = 1 + 0,9987\cos 2\varphi + 1,0017\cos 4\varphi,$$

$$r_5(\varphi) = 1 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi.$$

Зауважимо, що всі наближення, крім першого, були одержані при $\alpha=1$. Для першого наближення $\alpha = \frac{1}{2}$. Цей приклад ще раз підтверджує, що метод, запропонований в [1], можна здійснювати при досить грубому нульовому наближенні.

Література

1. Пар а с ю к В. Н. и др. . Об одном методе решения обратной задачи теории потенциала. - "Физика Земли", 1972, № 11.

2. Пар а с ю к Є. М., К а р д а ш А. І. Одна чисельна реалізація розв'язку оберненої задачі теорії логарифмічного потенціалу простого шару. - "Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат.", 1973, вип. 8.

МИХАЙЛО ПЕТРОВИЧ ШЕРЕМЕТЬЄВ

На 68-му році життя 27 липня 1973 р. помер відомий радянський учений, член КПРС, доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений діяч наук УРСР Михайло Петрович Шереметьєв.

М.П.Шереметьєв народився 21 листопада 1905 р. у с. Одинці Красненського району Смоленської області. Закінчивши в 1927 р. фізико-математичний факультет Смоленського університету, два роки працював учителем середньої школи на Смоленщині. Після закінчення в 1930 р. вищих інженерно-педагогічних курсів при МВТУ М.П.Шереметьєв працює до 1932 р. асистентом кафедри механіки Мінського хіміко-технологічного інституту, в 1936 р. закінчує аспірантуру під керівництвом акад. А.Н.Динника і після захисту кандидатської дисертації працює старшим науковим співробітником фізико-технічного інституту АН БРСР, а з 1938 р. - доцентом Білоруського держуніверситету.

Під час Великої Вітчизняної війни М.П.Шереметьєв у лавах Радянської Армії захищав нашу Батьківщину від фашистських загарбників. За бойові заслуги його було нагороджено орденом Богдана Хмельницького та іншими урядовими нагородами.

Після демобілізації у 1945 р. М.П.Шереметьєв працює у Львівському держуніверситеті спочатку на посаді доцента, а після захисту докторської дисертації в 1953 р. - професором і завідуючим кафедрою механіки.

У 1961 р. М.П.Шереметьєву було присвоєно звання заслуженого діяча наук УРСР.

У Львові починається найбільш яскравий та плідний період його наукової діяльності. М.П.Шереметьєв дослідив новий важливий для застосувань клас задач, які ефективно розв'язуються методами, що грунтуються на теорії функцій комплексного змінного - задачі про підкріплення пластинок тонкими пружними елементами.

Основоположні результати, одержані М.П.Шереметьєвим, висвітлені в його монографії "Пластинки с подкрепленным краем" (1960 р.) та в численних наукових публікаціях.

Інші роботи М.П.Шереметьєва відносяться до плоскої задачі теорії пружності, контактних задач, теорії пружних оболонок. Він одержав важливі результати в теорії тонких оболонок без використання гіпотези Кірхгофа-Лява.

Наукові праці М.П.Шереметьєва одержали високу оцінку спеціалістів в Радянському Союзі та за кордоном.

За час своєї багаторічної науково-педагогічної діяльності М.П.Шереметьєв підготував одинадцять кандидатів наук, з яких чотири захистили згодом докторські дисертації.

За принциповість у наукових питаннях, працелюбність, велику вимогливість, цілеспрямованість М.П.Шереметьєв користувався глибокою повагою.

Світлу пам'ять про нього як про вченого, педагога, чуйного товарища і прекрасну людину назавжди збережуть всі, хто його знав.

ЗМІСТ

Математика

Г. П. Бойко. Зовнішні узагальнені задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа. 3

Г. П. Бойко. Про зв'язок зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа 7

Г. П. Губанов, Б. В. Ковальчук. Про лінійні методи наближення функцій класу Ліпшиця тригонометричними поліномами, що найліпші в заданій системі точок 12

У. А. Мишковець. Про один критерій абсолютної збіжності узагальнених рядів Фур'є. 18

У. А. Мишковець. Підсумовування рядів Фур'є рівномірних майже періодичних функцій методом Рімана. 21

О. І. Бобик, О. В. Лопушанський, В. М. Поліщук. Ефективні ознаки однозначної розв'язності граничної задачі для еліптичних рівнянь в неопуклих областях 23

І. М. Колодій. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. 27

І. М. Колодій. Локальна неперервність за Гельдером узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням 33

Л. М. Макаренко, М. І. Іванчов. Про фундаментальний розв'язок одного рівняння еліптичного типу. 37

О. Г. Сторож. Асимптотика власних значень і власних функцій операторів, споріднених з диференціальними. 40

К. С. Костенко. Лінійні звичайні диференціальні рівняння четвертого порядку, інтегровані в замкнутій формі 44

В. Г. Костенко, О. О. Веселовська. Інтегрування деяких лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку на площині зі змінними коефіцієнтами. 52

Г. Г. Цегелик. Застосування мажорант і діаграм Ньютона для виділення областей, в яких квазіполіноми не перетворюються в нуль. 55

А. О. Копистянський. Сферична колінеація. 60

С. В. Дениско. Про один клас нескінченно малих деформацій прямолінійної конгруенції 63

Механіка

О. П. Піддубняк. Кручення пружного шару, послабленого круговою щілиною 69

Г. Т. Сулим. Концентрація напружень на тонкостінному включенні в кусково-однорідній площині. 74

В. К. Опанасович. Про один випадок контактної задачі теорії пружності для пластинки з щілиною по дузі кола 80

М. К. Зварич. Напружений стан еліптичного кільця з впресованим стержнем. 84

Т. Л. Мартинович, Махмуд Аллам, Ю. С. Перец. Плоска задача термопружності для двозв'язних областей при наявності джерел тепла. І. 90

В. М. Флячок. Про вільні коливання трансверсально ізотропних пологих циліндричних оболонок 97

Прикладна математика

Я. Г. Савула, Н. П. Флейшман. Про одне можливе розширення класу оболонок канонічних форм 101

І. Д. Квіт. Енергомоменти. 106

Л. Й. Ощипко. Розв'язок однієї задачі Рімана-Гільберта-Пуанкаре для системи аналітичних функцій. 109

В. М. Косарчин. До задачі про кручення стержнів. . . . 117

М. А. Рудь. Метод обчислення функції $\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$ . . 120

Є. М. Парасюк, П. С. Сеньо. Про одну обернену задачу логарифмічного потенціалу простого шару. 124

Михайло Петрович Шереметьєв 126

УДК 517.946

Внешние обобщенные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Б о й к о Г. П. Зовнішні узагальнені задачі Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 3-7 (укр.).

В области Ω (R^n, $n \geqslant 2$), которая расположена вне замкнутой бесконечно дифференцируемой поверхности, рассматриваются обобщенные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Устанавливаются теоремы о представлении решений рассматриваемых задач, теоремы единственности. Библиогр. 3.

УДК 517.946

О связи внешних обобщенных задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа. Б о й к о Г. П. Про зв'язок зовнішніх узагальнених задач Діріхле і Неймана для рівнянь Лапласа. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 7-11 (укр.).

Получены теоремы о связи внешних обобщенных задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Утверждается, что гармоническая в области $\Omega \in R^n$ ($n \geqslant 2$), расположенной вне бесконечно дифференцируемой поверхности, функция может принимать обобщенные граничные значения только вместе со своей нормальной производной, что решение внешней обобщенной задачи Дирихле является также решением некоторой внешней обобщенной задачи Неймана и наоборот. Рассматривается внешняя обобщенная (в том же смысле) задача Амерно. Устанавливается теорема о представлении решения этой задачи, необходимое и достаточное условие существования его. Библиогр. 5.

УДК 517.512

О линейных методах приближения функций класса Липшица тригонометрическими полиномами, наилучшими в заданной системе точек. Г у б а н о в Г. П., К о в а л ь ч у к Б. В. Про лінійні методи наближення функцій класу Ліпшиця тригонометричними поліномами, що найліпші в заданій системі точок. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 12-17 (укр.).

Изучены линейные методы приближения класса $H^{\alpha}(0<\alpha<1)$ 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами, наилучшими в системе точек $x_k=\frac{k\pi}{nq}$, $k=1,2,\dots,nq$; $q\geq 1$. Аналогична задача рассмотрена и для классов $H_1^{(\alpha,\beta)}$ $(0<\alpha,\beta<1)$ 2π-периодических функций двух переменных. Библиогр. 5.

УДК 517.512

Об одном критерии абсолютной сходимости обобщенных рядов Фурье. М и ш к о в е ц ь У. А. Про один критерій абсолютної збіжності узагальнених рядів Фур'є. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 18-20 (укр.).

Доказывается теорема, которая дополняет один результат С.Б.Стечкина об абсолютной сходимости ряда Фурье функции из гильбертова пространства L^2. Библиогр. 1.

УДК 517.512

Суммирование рядов Фурье равномерных почти периодических функций методом Римана. М и ш к о в е ц ь У. А. Підсумовування рядів Фур'є рівномірних майже періодичних функцій методом Рімана. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 21-22 (укр.).

Обобщается известный метод Римана суммирования рядов Фурье непрерывных периодических функций на суммирование рядов Фурье равномерных почти периодических функций. Библиогр. 3.

УДК 517.94

Эффективные признаки однозначной разрешимости первой граничной задачи для эллиптических уравнений в невыпуклых областях. Б о б и к О. І., Л о п у ш а н о в с к и й О. В., П о л і щ у к В. М. Ефективні ознаки однозначної розв'язності першої граничної задачі для еліптичних рівнянь в неопуклих областях. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 23-27 (укр.).

Методом защитных неравенств исследуется единственность решения первой граничной задачи для эллиптических уравнений второго порядка в случае невыпуклой области. Получены эффективные признаки единственности решения названной задачи, выражающиеся через внутренний диаметр области, минимальный радиус кривизны невыпуклой части границы и коэффициенты уравнения. Библиогр. 3.

УДК 517.946

Оценка максимума модуля обобщенных решений вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений. К о л о д і й І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 27-32 (укр.).

Доказана теорема о локальной ограниченности обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений вида $\operatorname{div} A(x,u,u_x)=B(x,u,u_x)$. Библиогр. 7.

УДК 517.946

Локальная непрерывность по Гельдеру обобщенных решений вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений. К о л о д і й І. М. Локальна неперервність за Гельдером узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 33-37 (укр.).

Рассматриваются вырождающиеся эллиптические уравнения вида

$$\operatorname{div} A(x,u,u_x)=B(x,u,u_x).$$

Установлено, что при определенных предположениях на функции, характеризующие уравнение, обобщенное решение непрерывно по Гельдеру. Библиогр. 4.

УДК 517.946

О фундаментальном решении одного уравнения эллиптического типа. Макаренко Л. М., Іванчов М. І. Про фундаментальний розв'язок одного рівняння еліптичного типу. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9, Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 37-40 (укр.).

Установлены свойства фундаментального решения одного уравнения эллиптического типа второго порядка, которые позволяют значительно уточнить имеющиеся условия существования ограниченных решений задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченной области. Библиогр. 3.

УДК 513.88

Асимптотика собственных значений и собственных функций операторов, родственных дифференциальным. С т о р о ж О. Г. Асимптотика власних значень і власних функцій операторів, споріднених з диференціальними. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 40-44 (укр.).

Рассматривается некоторый класс конечномерных возмущений обыкновенного дифференциального оператора. Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций операторов из этого класса. Библиогр. 2.

УДК 517.913

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка, интегрируемые в замкнутой форме. К о с т е н к о К. С. Лінійні звичайні диференціальні рівняння четвертого порядку, інтегровані в замкнутій формі. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 44-52 (укр.).

Найден некоторый класс линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, коэффициенты которого зависят определенным образом от одной произвольной достаточно гладкой функции и трех произвольных постоянных. Фундаментальная система решений каждого уравнения из этого класса уравнений может быть представлена в замкнутой форме. В частности, этот класс уравнений содержит в себе уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера. Библиогр. 3.

УДК 517.94

Интегрирование некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами на плоскости. К о с т е н к о В. Г., В е с е л о в с ь к а О. О. Інтегрування деяких лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку зі змінними коефіцієнтами на площині. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 52-55 (укр.).

Из совокупности линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на плоскости, инвариантных относительно группы преобразований с эллиптической траекторией выделены наиболее общие уравнения, решения граничных задач для которых в соответствующих областях представляются разложениями в ряды по специальным функциям. Библиогр. 2.

УДК 518:512.35

Применение мажорант и диаграмм Ньютона для выделения областей, в которых квазиполиномы не обращаются в нуль. Ц е г е л и к Г. Г. Застосування мажорант і діаграм Ньютона для виділення областей, в яких квазіполіноми не перетворюються в нуль. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 55-60 (укр.).

Строится аппарат мажорант и диаграмм Ньютона квазиполиномов. Как приложение этого аппарата рассматривается выделение областей, не содержащих нулей квазиполиномов. Библиогр. 4.

УДК 515.69

Сферическая коллинеация. К о п и с т я н с ь к и й А. О. Сферична колінеація. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 60-63 (укр.).

Рассматривается обобщенная коллинеация, в которой центр заменен сферической поверхностью. Дается теорема обобщенной коллинеации. Библиогр. 1.

УДК 513.015.6

Об одном классе бесконечно малых деформаций прямолинейной конгруэнции. Дениско С. В. Про один клас нескінченно малих деформацій прямолінійної конгруенції. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с.63-68 (укр.).

Рассматриваемые в работе бесконечно малые деформации прямолинейной конгруэнции осуществляются следующим образом. Опорная поверхность конгруэнции подвергается бесконечно малой деформации, а лучи конгруэнции при этом перемещаются в пространстве, сохраняя свое направление. Изучаются линейчатые поверхности конгруэнции, которые бесконечно мало изгибаются при деформации конгруэнции. Библиогр. 1.

УДК 539.385

Кручение упругого слоя, ослабленного круговой щелью. Піддубняк О. П. Кручення пружного шару, послабленого круговою щілиною. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 69-74 (укр.).

Рассматривается осесимметричная контактная задача об упругом кручении двумя штампами двухслойного бесконечного пакета, ослабленного в плоскости сопряжения двух слоев щелью, которая занимает внутренность (задача I) или внешность (задача II) некоторого круга. Задача сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма II рода, решение которой получено при условии малости радиусов штампов и щели по сравнению с толщиной пакета. Получены формулы для контактных напряжений под штампами и для коэффициента интенсивности напряжений в вершине щели. Рассмотрен числовой пример. Табл. 2. Библиогр. 7.

УДК 539.311

Концентрация напряжений на тонкостенном включении в кусочно однородной плоскости. Сулим Г. Т. Концентрація напружень на тонкостінному включенні в кусково-однорідній площині. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 74-80 (укр.).

Рассматривается задача об упругом равновесии двух спаянных изотропных полуплоскостей из различных материалов с тонкостенным упругим включением конечной длины на линии спая под воздействием двух симметрично расположенных сосредоточенных сил. Разрешающее интегро-дифференциальное уравнение задачи сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Приведены графики коэффициентов напряжений на торцах включения в зависимости от расстояния точек приложения сил. Илл. 3. Библиогр. 5.

УДК 539.311

Об одном случае контактной задачи теории упругости для пластинки со щелью по дуге окружности. О п а н а с о в и ч В. К. Про один випадок контактної задачі теорії пружності для пластинки з щілиною по дузі кола. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 80-84 (укр.).

Рассматривается контактная задача для изотропной пластинки со щелью по дуге единичной окружности при условии, что берега щели приходят в гладкий контакт по всей ее длине под действием сосредоточенной силы, приложенной в центре окружности. Приводятся формулы для напряжений вдоль единичной окружности, а также формула для определения максимального угла контакта при заданном нагружении пластинки. Библиогр. 2.

УДК 539.3

Напряженное состояние эллиптического кольца с впрессованным стержнем. З в а р и ч М. К. Напружений стан еліптичного кільця з впресованим стержнем. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 84-90 (укр.).

Решена задача плоской теории упругости о напряженном состоянии эллиптического кольца с впрессованным стержнем под действием сосредоточенных сил и моментов, приложенных к внутренним точкам кольца и произвольной нагрузки, приложенной к другому контуру пластинки. Получена бесконечная система линейных алгебраических функций. Приводится числовой пример. Библиогр. 3.

УДК 539.377

Плоская задача термоупругости для двухсвязных областей при наличии источников тепла. I. М а р т и н о в и ч Т. Л., М а х м у д А л л а м, П е р е ц Ю. С. Плоска задача термопружності для двозв'язних областей при наявності джерел тепла. I. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 90-97 (укр.).

Решена задача плоской теории термоупругости для конечной двухсвязной области, ограниченной произвольными гладкими контурами, при наличии сосредоточенных источников тепла. Получены системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций. Библиогр. 4.

УДК 534.I

О свободных колебаниях трансверсально изотропных пологих цилиндрических оболочек. Ф л я ч о к В. М. Про вільні коливання трансверсально ізотропних пологих циліндричних оболонок. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 97-100 (укр.).

На основании уравнений теории оболочек типа Тимошенко, учитывающих деформации поперечных сдвигов и инерции вращения, рассмотрены собственные колебания трансверсально изотропной пологой цилиндрической панели, свободно опертой по всему контуру. Показано, что учет трансверсально изотропных свойств материала оболочки в некоторых случаях значительно влияет на величину собственных частот. Табл. I. Библиогр. 3.

УДК 539.3

Об одном возможном расширении класса оболочек канонических форм. С а в у л а Я. Г., Ф л е й ш м а н Н. П. Про одне можливе розширення класу оболонок канонічних форм. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 101-105 (укр.).

Показано, что расширение класса оболочек канонических форм осуществляется элементарно в случае безмоментных оболочек нулевой гауссовой кривизны. Для безмоментных оболочек, срединной поверхностью которых является монжевая поверхность с плоской направляющей, введена функция напряжений, позволяющая свести систему уравнений равновесия к одному разрешающему уравнению второго порядка. Рассмотрен пример постановки краевой задачи для определения функции напряжений. Библиогр. 4.

УДК 519.21

Энергомоменты. К в і т І. Д. Енергомоменти. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 106-109 (укр.).

Указаны выражения энергии и энергомоментов в терминах меллинового преобразования плотности вероятности положительнозначной случайной величины. Библиогр. 2.

УДК 539.3

Решение одной задачи Римана-Гильберта-Пуанкаре для системы аналитических функций. О щ и п к о И. Й. Розв'язок однієї задачі Рімана-Гільберта-Пуанкаре для системи аналітичних функцій. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 109-117 (укр.).

Приводится решение задачи Римана-Гильберта-Пуанкаре для системы аналитических функций при специальном виде коэффициентов. К такой задаче сведена задача об опирании пластинки по несимметричному круглому ребру жесткости. Для нагрузки в виде сосредоточенной силы графиками проиллюстрировано влияние жесткости и эксцентриситета ребра на прогиб пластинки под силой. Илл. 4. Библиогр. 6.

УДК 539.370

К задаче о кручении стержней. К о с а р ч и н В. М. До задачі про кручення стержнів. - Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 117-119 (укр.).

Решение задачи об упругом кручении призматического стержня, поперечное сечение которого является прямоугольником с вырезами, сведено к решению системы интегральных уравнений. Библиогр. 2.

УДК 517.56/.8

Метод вычисления функции $\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$. Р у д ь М. А. Метод обчислення функції $\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 120-123.(укр.).

Разрабатывается эффективный метод вычисления ψ-функции от действительного аргумента. Созданный алгоритм дает возможность вычислять значения ψ-функции с произвольным количеством десятичных знаков после запятой. Библиогр. 8.

УДК 517:946

Об одной обратной задаче логарифмического потенциала простого слоя. Парасюк Є. М., Сеньо П. С. Про одну обернену задачу логарифмічного потенціалу простого шару. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9. Видавниче об'єднання "Вища школа", с. 124-125 (укр.).

Рассмотрена задача об определении овала $r = 1 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi$, индуцирующего заданный потенциал на окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $(R = 3{,}5)$. Задача решается методом рядов с последующим применением метода редукции. Показано, что даже при весьма грубом нулевом приближении ($r = R$) уже на пятой итерации получается решение исходной задачи. Библиогр. 2.

Вестник Львовского ордена Ленина государственного университета
СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ. Выпуск 9
(На украинском языке)
Издательское объединение "Вища школа"
Издательство при Львовском государственном университете

Редактор В. В. Войтович
Коректор К. Г. Логвиненко

Підписано до друку 23.У 1974 р. Формат паперу 60х90 І/16. Папір друкарський № 3. Друк. арк. 8,75. Обл.-вид. арк. 6,3. Тираж 600.
БГ 00114. Ціна 63 коп. Зам. 1470.
Видавництво видавничого об'єднання "Вища школа" при Львівському державному університеті. Львів, Університетська, І.
Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління у справах видавництв, поліграції та книжкової торгівлі.
Львів, Стефаника, ІІ.

63 коп.