ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 90

2020

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 90

Випуск 90

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2020

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка Протокол №22/11 від 24.11.2021 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації. Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №1188 від 24.09.2020 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-42-18

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Комп'ютерний набір і верстка О. ГУТІК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 9.2
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 5–19
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 5–19
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.005-019

УДК 512.53

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ БIЦИКЛIЧНОГО МОНОЇДА

Олег ГУТIК, Микола МИХАЛЕНИЧ

Львiвський нацiональний унiверситет iменi Iвана Франка,
вул. Унiверситетська, 1, 79000, Львiв
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
myhalenychmc@gmail.com

Вводимо алгебричне розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ бiциклiчного моноїда для довiльної ω-замкненої сiм'ї $\mathscr{F}$ пiдмножин в ω, якi узагальнюють бiциклiчний моноїд, злiченну напiвгрупу матричних одиниць i деякi iншi комбiнаторнi iнверснi напiвгрупи. Доведено, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є комбiнаторною iнверсною напiвгрупою, а також описано вiдношення Ґрiна, частковий природний порядок на напiвгрупi $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її множину iдемпотентiв. Також доведено критерiї простоти, 0-простоти, бiпростоти та 0-бiпростоти напiвгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а також коли $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ мiстить одиницю, iзоморфна бiциклiчному моноїду або злiченнiй напiвгрупi матричних одиниць.

Ключовi слова: напiвгрупа, бiциклiчний моноїд, розширення.

1. Вступ

Ми користуватимемось термiнологiєю з [5, 6, 12, 14]. Надалi у текстi множину невiд'ємних цiлих чисел позначатимемо через ω. Для довiльного $k \in \omega$ позначимо $[k) = \{i \in \omega \colon i \geqslant k\}$.

Пiдмножина A в ω називається *iндуктивною*, якщо з того, що $i \in A$ випливає, що $i+1 \in A$. Очевидно, що $\varnothing$ — iндуктивна множина в ω, i непорожня пiдмножина $A \subseteq \omega$ є iндуктивною тодi i лише тодi, коли $A = [k)$ для деякого $k \in \omega$.

Якщо S — напiвгрупа, то її пiдмножина iдемпотентiв позначається через $E(S)$. Напiвгрупа S називається *iнверсною*, якщо для довiльного її елемента x iснує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [1, 14]. В iнверснiй напiвгрупi S вище означений елемент x^{-1} називається *iнверсним до* x. *В'язка* — це напiвгрупа iдемпотентiв, а *напiвґратка* — це комутативна в'язка.

Якщо S — напiвгрупа, то ми позначатимемо вiдношення Ґрiна на S через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ i $\mathscr{J}$ (див. означення в [5, §2.1] або [10]). Напiвгрупа S називається *простою*,

---

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10, 20M15

якщо S не містить власних двобічних ідеалів, тобто S складається з одного $\mathscr{J}$-класу, і *біпростою*, якщо S складається з одного $\mathscr{D}$-класу.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a та b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b)\in\mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb),(ad,bd)\in\mathfrak{K}$, для довільних $c,d\in S$. Відношення $(a,b)\in\mathfrak{K}$ також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи a і b $\mathfrak{K}$-еквівалентні*.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e\preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef=fe=e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так: $s\preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s=te$. для деякого ідемпотента $e\in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нагадаємо (див. [5, §1.12], що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq=1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема О. Андерсена [2] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічного моноїда. Різні розширення біциклічного моноїда вводили раніше різні автори [7, 8, 9, 18]. Такими є, зокрема, конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості та описання інверсних біпростих і 0-біпростих ω-напівгруп [4, 15, 17, 11].

Зауваження 1. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_\omega=\omega\times\omega$ з напівгруповою операцією

$$(i_1,j_1)\cdot(i_2,j_2)=(i_1+i_2-\min\{j_1,i_2\},j_1+j_2-\min\{j_1,i_2\})=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2), & \text{якщо } j_1\leqslant i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2), & \text{якщо } j_1\geqslant i_2.\end{cases}$$

Ми вводимо алгебричні розширення $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ біциклічного моноїда для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в ω, які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченну напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи. Доведено, що $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Ґріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ та її множину ідемпотентів. Також доведено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$, а також коли $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

2. Конструкція розширення $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$

Нехай $\mathscr{P}(\omega)$ — сім'я усіх підмножин ординалу ω. Для довільних $F\in\mathscr{P}(\omega)$ і $n,m\in\omega$ приймемо

$$n-m+F=\{n-m+k\colon k\in F\},\qquad \text{якщо } F\neq\varnothing$$

і $n-m+F=\varnothing$, якщо $F=\varnothing$.

Будемо говорити, що підсім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є *ω-замкненою*, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathscr{F}$ для довільних $n \in \omega$ і $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

Нехай $\boldsymbol{B}_\omega$ — біциклічний моноїд і $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. На множині $\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}$ означимо бінарну операцію "$\cdot$" формулою

$$(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2. \end{cases}$$

Тоді отримуємо, що

$$\begin{aligned}
&((i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2)) \cdot (i_3, j_3, F_3) = \\
&\quad = \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2, (j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2){\cdot}(i_3, j_3, F_3), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2)){\cdot}(i_3, j_3, F_3), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_2{-}i_3{+}((j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2)) \cap F_3), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \leqslant i_3; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, (j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \geqslant i_3; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}(F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2)) \cap F_3), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \leqslant i_3; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, (F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2)) \cap (j_3{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \geqslant i_3 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_2{-}i_3{+}j_1{-}i_2{+}F_1) \cap (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \leqslant i_3; & (1_1) \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, (j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \geqslant i_3; & (2_1) \\ (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}F_1) \cap (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \leqslant i_3; & (3_1) \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2) \cap (j_3{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \geqslant i_3 & (4_1) \end{cases}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
&(i_1, j_1, F_1) \cdot ((i_2, j_2, F_2) \cdot (i_3, j_3, F_3)) = \\
&\quad = \begin{cases} (i_1, j_1, F_1){\cdot}(i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), & \text{якщо } j_2 \leqslant i_3; \\ (i_1, j_1, F_1){\cdot}(i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), & \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \end{cases} = \\
&\quad = \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}F_1) \cap (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2{-}j_2{+}i_3; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_2{+}i_3{-}j_1{+}((j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3))), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2{-}j_2{+}i_3; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, (j_1{-}j_2{+}i_3{-}j_3{+}F_1) \cap F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}(F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)))), \\ \qquad\qquad \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2; \end{cases} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2-j_2+i_3, j_3, (j_1-i_2+j_2-i_3+F_1) \cap (j_2-i_3+F_2) \cap F_3), \\ \hfill \text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2-j_2+i_3; & (1_2) \\ (i_1, j_1-i_2+j_2-i_3+j_3, F_1 \cap (i_2-j_1+F_2) \cap (i_2-j_2+i_3-j_1+F_3)), \\ \hfill \text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2-j_2+i_3; & (2_2) \\ (i_1-j_1+i_2, j_2-i_3+j_3, (j_1-j_2+i_3-j_3+F_1) \cap F_2 \cap (i_3-j_2+F_3)), \\ \hfill \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2; & (3_2) \\ (i_1, j_1-i_2+j_2-i_3+j_3, F_1 \cap (i_2-j_1+F_2) \cap (i_2-j_1+i_3-j_2+F_3)), \\ \hfill \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2. & (4_2) \end{cases}$$

Аналогічно, як і у випадку доведення асоціативності напівгрупової операції для біциклічного моноїда, маємо такі еквівалентності умов:

$$(1_1) \vee (3_1) \iff (1_2), \qquad (2_1) \iff (3_2), \qquad (4_1) \iff (2_2) \vee (4_2).$$

Отже, ми довели таке твердження.

Твердження 1. *Якщо сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є ω-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$ є напівгрупою.*

Припустимо, що ω-замкнена сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ містить порожню множину $\varnothing$, то з означення напівгрупової операції $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$ випливає, що множина $\boldsymbol{I} = \{(i,j,\varnothing) \colon i,j \in \omega\}$ є ідеалом напівгрупи $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$.

Означення 1. Для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ означимо

$$\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)/\boldsymbol{I}, & \text{якщо } \varnothing \in \mathscr{F}; \\ (\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot), & \text{якщо } \varnothing \notin \mathscr{F}. \end{cases}$$

3. Алгебричні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$

Надалі ми вважатимемо, що $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$.

Твердження леми 1 очевидне.

Лема 1. *Напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ містить нуль $\mathbf{0}$ тоді і лише тоді, коли $\varnothing \in \mathscr{F}$, причому нуль $\mathbf{0}$ є образом ідеала $\boldsymbol{I}$ при природному гомоморфізмі, породженому конгруенцією Ріса*

$$\mathfrak{C}_{\boldsymbol{I}} = \{(x,x) \colon x \in \boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}\} \cup (\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I})$$

на напівгрупі $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$.

Лема 2. *Ненульовий елемент (i,j,F) напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли $i = j$.*

Доведення. $(\Longleftarrow)$ Якщо $i = j$, то маємо, що

$$(i,i,F) \cdot (i,i,F) = (i,i,F \cap F) = (i,i,F),$$

а отже, $(i,i,F) \in E(\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}})$.

$(\Longrightarrow)$ Припустимо, що $(i,j,F) \in E(\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}})$ та $i \geqslant j$. Тоді

$$(i,j,F) \cdot (i,j,F) = (i-j+i, j, (j-i+F) \cap F) = (i,j,F),$$

а отже, $i-j+i = i$, звідки випливає, що $i = j$. У випадку $i \leqslant j$ аналогічно отримуємо, що $i = j$. $\square$

Лема 3. *Ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ комутують.*

Доведення. Очевидно, якщо напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить нуль $\mathbf{0}$, то елемент $\mathbf{0}$ комутує з кожним елементом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Зафіксуємо два довільні ненульові ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, які за лемами 1 і 2 мають зображення (i,i,F_i) і (j,j,F_j), де $i,j\in\omega$ і $F_1,F_2\in\mathscr{F}$ — непорожні підмножини в ω. Тоді

$$
\begin{aligned}
(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j) &= \left\{\begin{array}{ll} (i-i+j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i,i-j+j,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i\geqslant j \end{array}\right. = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} (j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i,i,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i\geqslant j \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

і

$$
\begin{aligned}
(j,j,F_i)\cdot(i,i,F_j) &= \left\{\begin{array}{ll} (j,j-i+i,F_j\cap(i-j+F_i)), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i-i+j,j,(j-i+F_j)\cap F_i), & \text{якщо } i\geqslant j \end{array}\right. = \\
&= \left\{\begin{array}{ll} (j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i,i,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i\geqslant j, \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

звідки

$$
(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j)=(j,j,F_i)\cdot(i,i,F_j),
$$

а отже, справджується твердження леми. □

Лема 4. *Елементи (i,j,F) і (j,i,F) є інверсними в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Доведення. Справді, маємо

$$
(i,j,F)\cdot(j,i,F)\cdot(i,j,F)=(i,i,F)\cdot(i,j,F)=(i,j,F)
$$

і

$$
(j,i,F)\cdot(i,j,F)\cdot(j,i,F)=(j,j,F)\cdot(j,i,F)=(j,i,F),
$$

звідки й випливає твердження леми. □

За теоремою Вагнера–Престона (див. [5, теорема 1.17]) регулярна напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли ідемпотенти в ній комутують, а отже, з лем 3 і 4 випливає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — інверсна напівгрупа.*

Лема 5 описує природний частковий порядок на множині ідемпотентів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Лема 5. *$(i,i,F_i)\preccurlyeq(j,j,F_j)$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})$ тоді і тільки тоді, коли*

$$
i\geqslant j \qquad \text{і} \qquad F_i\subseteq j-i+F_j.
$$

Доведення. Припустимо, що $(i,i,F_i)\preccurlyeq(j,j,F_j)$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})$. Тоді

$$
(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j)=(i,i,F_i),
$$

і оскільки

$$(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j)=\begin{cases}(i-i+j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i,i-j+j,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i\geqslant j\end{cases}= \\ =\begin{cases}(j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i,i,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i\geqslant j,\end{cases}$$

то з леми 3 випливає, що $i\geqslant j$ і $F_i\subseteq j-i+F_j$.

Навпаки, припустимо, що $i\geqslant j$ і $F_i\subseteq j-i+F_j$. Тоді

$$\begin{aligned}(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j)&=(i,i-j+j,F_i\cap(j-i+F_j))=\\&=(i,i,F_i\cap(j-i+F_j))=\\&=(i,i,F_i),\end{aligned}$$

а отже, $(i,i,F_i)\preccurlyeq(j,j,F_j)$ в $E(\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}})$. □

Твердження 2 описує природний частковий порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$.

Твердження 2. *Нехай (i_1,j_1,F_1) і (i_2,j_2,F_2) — ненульові елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$. Тоді $(i_1,j_1,F_1)\preccurlyeq(i_2,j_2,F_2)$ тоді і лише тоді, коли $F_1\subseteq -k+F_2$ й $i_1-i_2=j_1-j_2=k$ для деякого $k\in\omega$.*

Доведення. ($\Longleftarrow$) Якщо $F_1\subseteq -k+F_2$, $i_1-i_2=k$ і $j_1-j_2=k$ для деякого $k\in\omega$, то

$$\begin{aligned}(i_1,j_1,F_1)\cdot(i_1,j_1,F_1)^{-1}\cdot(i_2,j_2,F_2)&=(i_1,j_1,F_1)\cdot(j_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,i_1-i_2+j_2,F_1\cap(i_2-i_1+F_2))=\\&=(i_1,j_1-j_2+j_2,F_1\cap(-k+F_2))=\\&=(i_1,j_1,F_1\cap(-k+F_2))=\\&=(i_1,j_1,F_1),\end{aligned}$$

і за лемою 1.4.6 [12] отримуємо, що $(i_1,j_1,F_1)\preccurlyeq(i_2,j_2,F_2)$.

($\Longrightarrow$) Припустимо, що $(i_1,j_1,F_1)\preccurlyeq(i_2,j_2,F_2)$. Тоді за лемою 1.4.6 [12],

$$\begin{aligned}(i_1,j_1,F_1)&=(i_1,j_1,F_1)\cdot(i_1,j_1,F_1)^{-1}\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,j_1,F_1)\cdot(j_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=\begin{cases}(i_1-i_1+i_2,j_2,(i_1-i_2+F_1)\cap F_2), & \text{якщо } i_1\leqslant i_2;\\ (i_1,i_1-i_2+j_2,F_1\cap(i_2-i_1+F_2)), & \text{якщо } i_1\geqslant i_2\end{cases}=\\&=\begin{cases}(i_2,j_2,(i_1-i_2+F_1)\cap F_2), & \text{якщо } i_1\leqslant i_2; & (1_3)\\ (i_1,i_1-i_2+j_2,F_1\cap(i_2-i_1+F_2)), & \text{якщо } i_1\geqslant i_2 & (2_3)\end{cases}\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
(i_1,j_1,F_1) &= (i_2,j_2,F_2)\cdot(i_1,j_1,F_1)^{-1}\cdot(i_1,j_1,F_1) = \\
&= (i_2,j_2,F_2)\cdot(j_1,i_1,F_1)\cdot(i_1,j_1,F_1) = \\
&= (i_2,j_2,F_2)\cdot(j_1,j_1,F_1) = \\
&= \begin{cases} (i_2,j_2-j_1+j_1,F_2\cap(j_1-j_2+F_1)), & \text{якщо } j_1\leqslant j_2;\\ (i_2-j_2+j_1,j_1,(j_2-j_1+F_2)\cap F_1), & \text{якщо } j_1\geqslant j_2 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i_2,j_2,F_2\cap(j_1-j_2+F_1)), & \text{якщо } j_1\leqslant j_2; \quad (1_4)\\ (i_2-j_2+j_1,j_1,(j_2-j_1+F_2)\cap F_1), & \text{якщо } j_1\geqslant j_2 \quad (2_4)\end{cases}
\end{aligned}$$

У випадках (1_3) і (1_4) маємо, що $i_1=i_2$, $j_1=j_2$, а отже, $i_1-i_2=j_1-j_2=0$ і $F_1\subseteq -0+F_2$. У випадках (2_3) і (2_4) одержуємо, що $i_1=i_2-j_2+j_1$, і врахувавши, що $i_1\geqslant i_2$, $j_1\geqslant j_2$ і $(j_2-j_1+F_2)\cap F_1=F_1$, та прийнявши $k=i_1-i_2=j_1-j_2$, отримуємо, що $F_1\subseteq -k+F_2$ для деякого $k\in\omega$. □

Теорема 2 описує відношення Ґріна на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Теорема 2. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Тоді:*

- ***(i)*** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$;*
- ***(ii)*** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{L}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $j_1=j_2$ і $F_1=F_2$;*
- ***(iii)*** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{H}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $i_1=i_2$, $j_1=j_2$ і $F_1=F_2$, а отже, всі $\mathscr{H}$-класи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є одноелементними;*
- ***(iv)*** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{D}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $F_1=F_2$;*
- ***(v)*** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{J}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли існують $k_1,k_2\in\omega$ такі, що $F_1\subseteq -k_1+F_2$ і $F_2\subseteq -k_2+F_1$.*

Доведення. ***(i)*** Нехай (i_1,j_1,F_1) і (i_2,j_2,F_2) — $\mathscr{R}$-еквівалентні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такі, що $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$. Позаяк за теоремою 1, $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — інверсна напівгрупа та $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_2,j_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, то з теореми 1.17 [5] випливає, що

$$(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_1,j_1,F_1)(i_1,j_1,F_1)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_1,i_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$$

і

$$(i_2,j_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_2,j_2,F_2)(i_2,j_2,F_2)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_2,i_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}},$$

а отже, $(i_1,i_1,F_1)=(i_2,i_2,F_2)$. Отож виконуються рівності $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$.

Навпаки, нехай (i_1,j_1,F_1) і (i_2,j_2,F_2) — елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такі, що $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$. Тоді $(i_1,i_1,F_1)=(i_2,i_2,F_2)$. Позаяк $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — інверсна напівгрупа, то з теореми 1.17 [5] випливає, що

$$\begin{aligned}
(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} &= (i_1,j_1,F_1)(i_1,j_1,F_1)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} = \\
&= (i_1,i_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} = \\
&= (i_2,j_2,F_2)(i_2,j_2,F_2)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} = \\
&= (i_2,i_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}},
\end{aligned}$$

а отже, $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Доведення твердження ***(ii)*** аналогічне до доведення твердження ***(i)***.

Твердження $\boldsymbol{(iii)}$ випливає з $\boldsymbol{(i)}$ та $\boldsymbol{(ii)}$.

$\boldsymbol{(iv)}$ Нехай (i_1, j_1, F_1) і (i_2, j_2, F_2) — елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такі, що $(i_1, j_1, F_1)\mathscr{D}(i_2, j_2, F_2)$. Позаяк $\mathscr{R}, \mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$ та

$$(i_1, i_1, F_1)\mathscr{R}(i_1, j_1, F_1) \qquad \text{i} \qquad (i_2, j_2, F_2)\mathscr{L}(j_2, j_2, F_2)$$

за твердженнями $\boldsymbol{(i)}$ і $\boldsymbol{(ii)}$, то $(i_1, i_1, F_1)\mathscr{D}(j_2, j_2, F_2)$. За лемою Манна (див. [13, лема 1.1] або [12, твердження 3.2.5]) існує елемент $(i, j, F) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такий, що

$$(i, j, F) \cdot (i, j, F)^{-1} = (i_1, i_1, F_1) \qquad \text{i} \qquad (i, j, F)^{-1} \cdot (i, j, F) = (j_2, j_2, F_2).$$

Але за лемою 4 маємо, що

$$(i, j, F) \cdot (i, j, F)^{-1} = (i, j, F) \cdot (j, i, F) = (i, i, F)$$

і

$$(i, j, F)^{-1} \cdot (i, j, F) = (j, i, F) \cdot (i, j, F) = (j, j, F),$$

а отже, $F = F_1 = F_2$.

Нехай i_1, i_2, j_1, j_2 — довільні невід'ємні цілі числа та $F \in \mathscr{F}$. За твердженнями $\boldsymbol{(i)}$ і $\boldsymbol{(ii)}$ отримуємо, що $(i_1, i_1, F)\mathscr{R}(i_1, j_1, F)$ і $(i_2, j_2, F)\mathscr{L}(j_2, j_2, F)$, а з леми 2 випливає, що $(i_1, i_1, F), (i_2, j_2, F) \in E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})$. Позаяк

$$(i_1, j_2, F) \cdot (i_1, j_2, F)^{-1} = (i_1, j_2, F) \cdot (j_2, i_1, F) = (i_1, i_1, F)$$

і

$$(i_1, j_2, F)^{-1} \cdot (i_1, j_2, F) = (j_2, i_1, F) \cdot (i_1, j_2, F) = (j_2, j_2, F),$$

то за лемою Манна (див. [13, лема 1.1] або [12, твердження 3.2.5]) отримуємо, що $(i_1, i_1, F)\mathscr{D}(j_2, j_2, F)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, і позаяк $\mathscr{R} \circ \mathscr{D} \circ \mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$, то $(i_1, j_1, F)\mathscr{D}(i_2, j_2, F)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

$\boldsymbol{(v)}$ Зауважимо, оскільки $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ і за твердженням $\boldsymbol{(iv)}$ маємо, що $(0, 0, F)\mathscr{D}(i, j, F)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ для довільних $i, j \in \omega$ і $F \in \mathscr{F}$, то достатньо знайти необхідну та достатню умову, коли елементи $(0, 0, F_1)$ і $(0, 0, F_2)$ є $\mathscr{J}$-еквівалентні в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

За твердженням 3.2.8 [12] елементи a і b інверсної напівгрупи S є $\mathscr{J}$-еквівалентні тоді і лише тоді, коли $a\mathscr{D}b' \preccurlyeq b$ і $b\mathscr{D}a' \preccurlyeq a$ для деяких $a', b' \in S$. Тоді за твердженням 2 ідемпотенти $(0, 0, F_1)$ і $(0, 0, F_2)$ є $\mathscr{J}$-еквівалентні в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ і $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$. Тоді з вище сказаного випливає, що $(i_1, j_1, F_1)\mathscr{J}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ і $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$. □

Нагадаємо [12, 3], що інверсна напівгрупа S називається *комбінаторною*, якщо відношення Ґріна $\mathscr{H}$ на S є відношенням рівності.

З твердження $\boldsymbol{(iii)}$ теореми 2 випливає наслідок 1.

Наслідок 1. *Якщо $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — комбінаторна інверсна напівгрупа.*

Також з твердження $\boldsymbol{(v)}$ теореми 2 випливає наслідок 2.

Наслідок 2. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \notin \mathscr{F}$. Тоді напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є простою тоді і лише тоді, коли для довільних $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що*

$$F_1 \subseteq -k_1 + F_2 \qquad i \qquad F_2 \subseteq -k_2 + F_1.$$

Нагадаємо [5], що напівгрупа S з нулем 0 називається 0-*простою*, якщо $S \cdot S \neq \{0\}$ і $\{0\}$ — єдиний власний двобічний ідеал в S. Добре відомо (див. [5, лема 2.28]), що напівгрупа S з нулем 0 є 0-простою тоді і лише тоді, коли S має лише два $\mathscr{J}$-класи: $S \setminus \{0\}$ і $\{0\}$. З твердження (v) теореми 2 випливає наслідок 3.

Наслідок 3. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \in \mathscr{F}$. Тоді напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є 0-простою тоді і лише тоді, коли для довільних непорожніх множин $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що*

$$F_1 \subseteq -k_1 + F_2 \qquad i \qquad F_2 \subseteq -k_2 + F_1.$$

Нагадаємо [16] (див. також [12]), що інверсна напівгрупа S називається E-*унітарною*, якщо для $e \in E(S)$ і $s \in S$ з $e \preccurlyeq s$ випливає, що $s \in E(S)$. Тоді з твердження 2 випливає теорема 3.

Теорема 3. *Якщо $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \notin \mathscr{F}$, то $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — E-унітарна інверсна напівгрупа.*

Індуктивні підмножини в ω описує лема 6.

Лема 6. *Непорожня множина $F \subseteq \omega$ є індуктивною в ω тоді і лише тоді, коли*

$$(-1 + F) \cap F = F.$$

Доведення. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що F — непорожня індуктивна множина в ω і нехай $x \in F$. Тоді $y = x + 1 \in F$, а отже, $x = y - 1 \in (-1 + F) \cap F$. Звідки випливає, що $F \subseteq (-1 + F) \cap F$.

$(\Longleftarrow)$ Нехай $(-1 + F) \cap F = F$ для деякої непорожньої множини $F \subseteq \omega$. Зафіксуємо довільний елемент $x \in F$. Тоді існує елемент $y \in F$ такий, що $y - 1 = x \in F$, а отже, $x + 1 = y \in F$. $\square$

Теорема 4. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю тоді і лише тоді, коли сім'я $\mathscr{F}$ містить індуктивну множину F_0 в ω таку, що $F_0 = \bigcup \mathscr{F}$. За виконання цих умов елемент $(0, 0, F_0)$ є одиницею напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Доведення. $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю. Оскільки одиниця кожної напівгрупи є ідемпотентом, то за лемою 2 одиниця в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ має вигляд (i, i, F_0) для деяких $i \in \omega$ і $F_0 \in \mathscr{F}$. Якщо $\mathscr{F} = \{\varnothing\}$, то твердження теореми очевидне, а тому надалі вважатимемо, що $F_0 \neq \varnothing$. Якщо $i \neq 0$, то

$$(0, 0, F_0) \cdot (i, i, F_0) = (i, i, (-i + F_0) \cap F_0) \neq (0, 0, F_0),$$

звідки випливає, що елемент $(0, 0, F_0)$ є одиницею напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. З рівності

$$(0, 0, F_0) \cdot (1, 1, F_0) = (1, 1, (-1 + F_0) \cap F_0) = (1, 1, F_0)$$

випливає, що F_0 — індуктивна множина в ω. Позаяк

$$(0,0,F_0)\cdot(0,0,F)=(0,0,F_0\cap F)=(0,0,F)$$

для довільної множини $F\in\mathscr{F}$, то $F_0\supseteq\bigcup\mathscr{F}$, а з того, що $F_0\in\mathscr{F}$ отримуємо рівність $F_0=\bigcup\mathscr{F}$.

($\Longleftarrow$) Доведемо, що елемент $(0,0,F_0)$ є у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}$ містить індуктивну множину F_0 в ω таку, що $F_0=\bigcup\mathscr{F}$, є одиницею напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Нехай (i,j,F) — довільний елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Оскільки F_0 — індуктивна підмножина в ω, то $F_0\subseteq((-i+F_0)\cap\omega)$, і з рівності $F_0=\bigcup\mathscr{F}$ випливає, що $(-i+F_0)\cap F=F$ для довільних $i\in\omega$ і $F\in\mathscr{F}$, а отже, отримуємо, що

$$(0,0,F_0)\cdot(i,j,F)=(i,j,(-i+F_0)\cap F)=(i,j,F)$$

і

$$(i,j,F)\cdot(0,0,F_0)=(i,j,(-i+F_0)\cap F)=(i,j,F).$$

Теорему доведено. □

Твердження 3. *Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F}=\{F\}$ і F — непорожня індуктивна підмножина в ω.*

Доведення. ($\Longleftarrow$) Нехай F — індуктивна підмножина в ω і $\mathscr{F}=\{F\}$. Для довільних $i,j,k,l\in\omega$ маємо, що

$$(i,j,F)\cdot(k,l,F)=\begin{cases}(i-j+k,l,(j-k+F)\cap F), & \text{якщо } j\leqslant k;\\ (i,j-k+l,F\cap(k-j+F)), & \text{якщо } j\geqslant k\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i-j+k,l,F), & \text{якщо } j\leqslant k;\\ (i,j-k+l,F), & \text{якщо } j\geqslant k,\end{cases}$$

а тоді з означення напівгрупової операції на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ випливає, що відображення $\mathfrak{f}\colon\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\to\mathscr{C}(p,q)$, означене за формулою $\mathfrak{f}(i,j,F)=q^ip^j$ є ізоморфізмом.

($\Longrightarrow$) Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$. Оскільки біциклічний моноїд не містить нуля, то $\varnothing\notin\mathscr{F}$. Також з теореми 4 випливає, що сім'я $\mathscr{F}$ містить індуктивну множину F_0 в ω таку, що $F_0=\bigcup\mathscr{F}$. Розглянемо довільну множину $F\in\mathscr{F}$. Оскільки біциклічний моноїд є біпростою інверсною напівгрупою та напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$, то $F=F_0$ за теоремою 2, а отже, $\mathscr{F}=\{F_0\}$. □

З твердження 3 випливає наслідок 4.

Наслідок 4. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Якщо сім'я $\mathscr{F}$ містить непорожню індуктивну підмножину в ω, то напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить ізоморфну копію біциклічного моноїда.*

Теорема 5. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(i) *$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — біпроста напівгрупа;*
(ii) *$\mathscr{F}$ — одноелементна сім'я;*
(iii) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ або тривіальна, або ізоморфна біциклічному моноїду.*

Доведення. Еквівалентність умов $\boldsymbol{(i)}$ і $\boldsymbol{(ii)}$ випливає з теореми 2$\boldsymbol{(iv)}$.

Імплікація $\boldsymbol{(iii)} \Longrightarrow \boldsymbol{(ii)}$ випливає з твердження 3.

Доведемо імплікацію $\boldsymbol{(ii)} \Longrightarrow \boldsymbol{(iii)}$. Якщо $\mathscr{F} = \{\varnothing\}$, то з означення напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — тривіальна (одноелементна) напівгрупа. Тому припустимо, що $\mathscr{F} = \{F\}$ для деякої непорожньої множини F. Позаяк сім'я $\mathscr{F}$ — ω-замкнена, то $(-1+F)\cap F = F$, а отже, за лемою 6, F — індуктивна підмножина в ω. Далі скористаємося твердженням 3. $\square$

Якщо λ — ненульовий кардинал, то множина $\mathcal{B}_{\lambda} = (\lambda\times\lambda)\sqcup\{0\}$ з напівгруповою операцією

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a,d), & \text{якщо } b=c;\\ 0, & \text{якщо } b\neq c, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad (a,b)\cdot 0 = 0\cdot(a,b) = 0\cdot 0 = 0,$$

де $a,b,c,d\in\lambda$, називається *напівгрупою $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць* [12, 14].

Твердження 4. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_{\omega}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F} = \{F,\varnothing\}$, де F — одноточкова підмножина в ω.*

Доведення. $(\Longleftarrow)$ Припустимо, що $\mathscr{F} = \{F,\varnothing\}$ і F — одноточкова підмножина в ω. Для довільних $i,j,k,l\in\omega$ отримаємо

$$\begin{aligned}(i,j,F)\cdot(k,l,F) &= \begin{cases} (i-j+k,l,(j-k+F)\cap F), & \text{якщо } j<k;\\ (i,l,F\cap F), & \text{якщо } j=k\\ (i,j-k+l,F\cap(k-j+F)), & \text{якщо } j>k \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i,l,F), & \text{якщо } j=k\\ 0, & \text{якщо } j\neq k, \end{cases}\end{aligned}$$

і очевидно, що

$$(i,j,F)\cdot 0 = 0\cdot(i,j,F) = 0\cdot 0 = 0,$$

звідки випливає, що відображення $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \mathcal{B}_{\omega}$, означене за формулою $\mathfrak{f}(i,j,F) = (i,j)$ є ізоморфізмом.

$(\Longrightarrow)$ Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_{\omega}$. Зафіксуємо довільний ненульовий елемент (i,j,F) напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Якщо (i,j,F) не є ідемпотентом, то за лемою 2 маємо, що $i\neq j$, а тоді

$$0 = (i,j,F)\cdot(i,j,F) = \begin{cases} (i-j+i,k,(j-i+F)\cap F), & \text{якщо } j<k;\\ (i,j-i+j,F\cap(i-j+F)), & \text{якщо } j>k. \end{cases}$$

Отже, для довільних різних $i,j\in\omega$ одержимо, що

$$(j-i+F)\cap F = \varnothing = F\cap(i-j+F),$$

а це означає, що для довільного натурального числа k маємо, що $-k+F\cap F = \varnothing$. Звідси випливає, що множина F одноелементна.

Припустимо, що сім'я $\mathscr{F}$ містить дві одноелементні множини $F_k = \{k\}$ і $F_l = \{l\}$, для деяких різних $k,l\in\omega$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $k<l$. За лемою 2 для довільного $i\in\omega$ елементи $(i+k,i+k,F_k)$ і $(i+l,i+l,F_l)$ є ідемпотентами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, причому $(i+k,i+k,F_k)\neq(i+l,i+l,F_l)$, оскільки

$k \neq l$. Позаяк напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\mathfrak{B}_{\omega}$ ізоморфні, то всі ненульові ідемпотенти в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ примітивні, а отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned} 0 &= (i+k, i+k, F_k) \cdot (i+l, i+l, F_l) = \\ &= (i+l, i+l, (k-l+F_l) \cap F_k) = \\ &= (i+l, i+l, F_k) \neq 0, \end{aligned}$$

суперечність. З отриманої суперечності випливає, що сім'я $\mathscr{F}$ містить лише одну одноелементну множину. □

Для довільного натурального числа n позначимо $n\omega = \{n \cdot i : i \in \omega\}$.

Лема 7. *Нескінченна підмножина $F \subseteq \omega$ задовольняє умову*

$(*)$ $(-k+F) \cap F = F$ *або* $(-k+F) \cap F = \varnothing$ *для довільного натурального числа* k

тоді і лише тоді, коли $F = i_0 + n\omega$ для деяких натурального числа n та $i_0 \in \omega$.

Доведення. Імплікація $(\Longleftarrow)$ очевидна.

$(\Longrightarrow)$ Припустимо, що нескінченна підмножина $F \subseteq \omega$ задовольняє умову $(*)$. Очевидно, оскільки F — нескінченна множина, то існує найменше натуральне число n_0 таке, що $(-n_0+F) \cap F \neq \varnothing$, а отже, $(-n_0+F) \cap F = F$. Якщо $n_0 = 1$, то F — індуктивна підмножина в ω за лемою 6, а отже, $F = i_0 + \omega$, де $i_0 = \min F$.

Далі вважатимемо, що $n_0 > 1$. Якщо $j_0 = \min F$, то $j_0 + n_0 \in F$, а отже $j_0 + n_0\omega \subseteq F$. Припустимо, що існує число $m \in \omega \setminus (j_0 + n_0\omega)$ таке, що $m \in F$, і нехай $j_0 + kn_0 < m < j_0 + (k+1)n_0$ для деякого натурального числа k. Тоді

$$m - (j_0 + n_0), \ldots, m - (j_0 + kn_0) \in F.$$

Однак $m - (j_0 + kn_0) < n_0$, а отже існує таке натуральне число $m - (j_0 + kn_0)$, що

$$-(m - (j_0 + kn_0)) + F \subseteq F,$$

що суперечить вибору числа n_0. З отриманої суперечності випливає імплікація $(\Longrightarrow)$. □

Нагадаємо [12], що інверсна напівгрупа S з нулем 0 називається 0-*біпростою*, якщо S має лише два $\mathscr{D}$-класи: $S \setminus \{0\}$ і $\{0\}$.

Приклад 1. Зафіксуємо довільні $i_0 \in \omega$ та натуральне число j_0. Приймемо $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_0,j_0)} = \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, де $\mathscr{F} = \{\varnothing, i_0 + j_0\omega\}$. Тоді, очевидно, що $\mathscr{F}$ — ω -замкнена сім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, а також за теоремою 1 інверсна напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_0,j_0)}$ є 0-біпростою. Більше того, для довільного $i_0 \in \omega$ за твердженням 3 напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_0,1)}$ ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем.

Безпосередньо звичайною перевіркою доводиться, що для довільних $i_1, i_2 \in \omega$ та довільного натурального числа j_0 відображення $\mathfrak{h} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_1,j_0)} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_2,j_0)}$, означене

$$\mathfrak{h}(n, m, i_1 + j_0\omega) = (n, m, i_2 + j_0\omega) \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{h}(0) = 0$$

є ізоморфізмом. Отже, виконується твердження 5.

Твердження 5. *Для довільних $i_1, i_2 \in \omega$ та довільного натурального числа j_0 напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_1,j_0)}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_2,j_0)}$ ізоморфні.*

Теорема 6 описує структуру 0-біпростих інверсних напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з точністю до ізоморфізму напівгруп.

Теорема 6. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, $\varnothing \in \mathscr{F}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — 0-біпроста напівгрупа. Тоді виконується лише одна з умов:*

(1) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$;*
(2) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем;*
(3) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(0,j_0)}$ для деякого натурального числа $j_0 \geqslant 2$.*

Доведення. За теоремою 2***(iv)*** сім'я $\mathscr{F}$ містить непорожню множину F і порожню множину $\varnothing$. Припустимо, що множина F скінченна. Тоді, аналогічно, як і в твердженні 4 доводиться, що F одноелементна множина, а отже, за твердженням 4 напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$.

Якщо ж F — нескінченна множина, то з теореми 2***(iv)*** випливає, що виконується одна з умов

$$a)\ (-1+F)\cap F = F \qquad \text{або} \qquad b)\ (-1+F)\cap F = \varnothing.$$

У випадку $a)$ за твердженням 3 множина $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \setminus \{0\}$ є піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічному моноїду, а отже, виконується твердження (2).

Якщо ж виконується умова $b)$, то за лемою 7 матимемо, що $F = j_0 + i_0\omega$ для деяких натурального числа i_0 та $j_0 \in \omega$. Застосувавши твердження 5, отримуємо, що виконується твердження (3). □

Нагадаємо [12, 14], що *найменша (мінімальна) групова конгруенція* $\boldsymbol{\sigma}$ на інверсній напівгрупі S визначається так:

$$s\boldsymbol{\sigma}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad es = et \quad \text{для деякого} \quad e \in E(S).$$

Очевидно, якщо $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \in \mathscr{F}$, то напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить нуль, а отже, фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}/\boldsymbol{\sigma}$ ізоморфна тривіальній напівгрупі.

Твердження 6. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \notin \mathscr{F}$. Тоді $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і тільки тоді, коли $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$, а отже, фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}/\boldsymbol{\sigma}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$.*

Доведення. Нехай (i_1,j_1,F_1) і (i_2,j_2,F_2) — довільні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. З означення найменшої групової конгруенції $\boldsymbol{\sigma}$ випливає, що $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2,j_2,F_2)$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $(i,j,F) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такий, що $(i,j,F) \preccurlyeq (i_1,j_1,F_1)$ і $(i,j,F) \preccurlyeq (i_2,j_2,F_2)$. Тоді за твердженням 2 отримаємо, що

$$F \subseteq -k_1 + F_1 \qquad \text{і} \qquad i - i_1 = j - j_1 = k_1$$

та

$$F \subseteq -k_2 + F_2 \qquad \text{і} \qquad i - i_2 = j - j_2 = k_2$$

для деяких $k_1, k_2 \in \omega$. Отож з $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що

$$i_1 - j_1 = i_2 - j_2 = i - j.$$

Припустимо, що для елементів (i_1, j_1, F_1) і (i_2, j_2, F_2) напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ справджується рівність $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $i_1 > i_2$. Позаяк $\mathscr{F}$ — ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то

$$F = F_1 \cap (i_2 - i_1 + F_2) \in \mathscr{F}.$$

Тоді $j_1 > j_2$ і за твердженням 2 отримаємо, що

$$(i_1, j_1, F) = (i_1, j_1, F \cap F_1) = (i_1, i_1, F) \cdot (i_1, j_1, F_1) \preccurlyeq (i_1, j_1, F_1)$$

і

$$\begin{aligned}(i_1, i_1, F) \cdot (i_2, j_2, F_2) &= (i_1, i_1 - i_2 + j_2, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)) = \\ &= (i_1, j_1 - j_2 + j_2, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)) = \\ &= (i_1, j_1, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)) = \\ &= (i_1, j_1, F) \preccurlyeq \\ &\preccurlyeq (i_2, j_2, F_2),\end{aligned}$$

а отже, $(i_1, j_1, F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Означимо відображення $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to Z(+)$ за формулою $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}}(i, j, F) = i - j$. З вище доведеного випливає, що $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}}(i_1, j_1, F_1) = \mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}}(i_2, j_2, F_2)$ тоді і лише тоді, коли $(i_1, j_1, F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, відображення $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to Z(+)$ є гомоморфізмом і фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}/\boldsymbol{\sigma}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$. □

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентів за цінні поради.

Список використаної літератури

1. В. В. Вагнер, *Обощенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
2. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
3. C. J. Ash, *The $\mathscr{J}$-classes of an inverse semigroup*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **28** (1979), no. 4, 427–432. DOI: 10.1017/S144678870001257X
4. R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, (Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20) Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. DOI: 10.1007/978-3-662-43119-1
5. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
6. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
7. V. A. Fortunatov, *Congruences on simple extensions of semigroups*, Semigroup Forum **13** (1976), 283–295. DOI: 10.1007/BF02194949
8. G. L. Fotedar, *On a semigroup associated with an ordered group*, Math. Nachr. **60** (1974), 297–302. DOI: 10.1002/mana.19740600128
9. G. L. Fotedar, *On a class of bisimple inverse semigroups*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 49–53.
10. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. Ser. 2 **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
11. O. Gutik, *On locally compact semitopological 0-bisimple inverse ω-semigroups,* Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008

12. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, Singapore, World Scientific, 1998.
13. W. D. Munn, *Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups*, Quart. J. Math. **17** (1966), no. 1, 151–159. DOI: 10.1093/qmath/17.1.151
14. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
15. N. R. Reilly, *Bisimple ω-semigroups,* Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–167. DOI: 10.1017/S2040618500035346
16. T. Saitô, *Proper ordered inverse semigroups*, Pacif. J. Math. **15** (1965), no. 2, 649–666. DOI: 10.2140/pjm.1965.15.649
17. R. J. Warne, *A class of bisimple inverse semigroups*, Pacif. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577. DOI: 10.2140/pjm.1966.18.563
18. R. J. Warne, *Bisimple inverse semigroups mod groups*, Duke Math. J. **34** (1967), 787–812. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 17.11.2021

ON SOME GENERALIZATION OF THE BICYCLIC MONOID

Oleg GUTIK, Mykola MYKHALENYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
myhalenychmc@gmail.com

We introduce an algebraic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ of the bicyclic monoid for an arbitrary ω-closed family $\mathscr{F}$ subsets of ω which generalizes the bicyclic monoid, the countable semigroup of matrix units and some other combinatorial inverse semigroups. It is proved that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ is a combinatorial inverse semigroup and Green's relations, the natural partial order on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, and its set of idempotents are described. We provide criteria of simplicity, 0-simplicity, bisimplicity, 0-bisimplicity of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ and when $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ has the identity, is isomorphic to the bicyclic semigroup or the countable semigroup of matrix units.

Key words: semigroup, bicyclic monoid, extension.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 20–47
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 20–47
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.020-047

УДК 512.53

ПОЛІЦИКЛІЧНІ РОЗШИРЕННЯ НАПІВГРУП

Олег ГУТІК, Павло ХИЛИНСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua,
pavlo.khylynskyi@lnu.edu.ua

Вводимо поняття λ-поліциклічного розширення Брука-Рейлі моноїда S із визначеним гомоморфізмом θ, яке є аналогом розширення Брука-Рейлі моноїда S. Описуємо ідемпотенти напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ та відношення Ґріна на $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$. Доводимо, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ — 0-проста напівгрупа для довільної напівгрупи S. Знайдено необхідні та достатні умови на моноїд S і гомоморфізм θ, за виконання яких напівгрупа $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ є регулярною, інверсною, 0-біпростою, комбінаторною, конгруенц-простою, чи інверсною 0-E-унітарною. Також вивчаємо топологізації напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$.

Ключові слова: напівгрупа, поліциклічний моноїд, розширення, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа.

1. Вступ. Термінологія та позначення

Ми користуватимемося термінологією з [6, 7, 8, 9, 11, 17, 20, 22]. Якщо $f\colon X\to Y$ – відображення, то для довільної точки $y\in Y$ через $f^{-1}(y)$ будемо позначати повний прообраз точки y стосовно відображення f.

Напівгрупа – це непорожня множина з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією.

Якщо S — напівгрупа, то через S^1 позначатимемо S з приєднаною одиницею та відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ і $\mathscr{H}$ на S визначаються так:

$$a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1=bS^1;$$

$$a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a=S^1b;$$

$$a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1=S^1bS^1;$$

2020 Mathematics Subject Classification: 20M15, 20M50, 18B40, 22A15

$$\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}$$

(див. [8, §2.1] або [12]). Також, через $H_S(1_S)$ будемо позначати *групу одиниць* моноїда S, і в цьому випадку, очевидно, що $H_S(1_S)$ є $\mathscr{H}$-класом одиниці 1_S моноїда S.

Нехай S — напівгрупа. Через $E(S)$ позначатимемо *множину ідемпотентів* в S. Напівгрупова операція визначає частковий порядок $\leqslant$ на $E(S)$

$$e \leqslant f \quad \Leftrightarrow \quad ef = fe = e.$$

Цей порядок називається *природним частковим порядком* на $E(S)$. Напівґратка — це комутативна напівгрупа ідемпотентів. Через $Z(S)$ будемо позначати центр напівгрупи S, тобто $Z(S) = \{s \in S \colon sx = xs \text{ для всіх } x \in S\}$.

Якщо $\mathfrak{C}$ — конгруенція на напівгрупі S, то через $[s]_{\mathfrak{C}}$ позначатимемо клас еквівалентності $\mathfrak{C}$, який містить елемент $s \in S$.

Напівгрупа S називається:

- *простою*, якщо S не має власних двобічних ідеалів;
- 0-*простою*, якщо S містить нуль і S не має власних двобічних ідеалів відмінних від $\{0\}$;
- *біпростою*, якщо S містить єдиний $\mathscr{D}$-клас;
- 0-*біпростою*, якщо S має нуль і S містить два $\mathscr{D}$-класи: $\{0\}$ і $S \setminus \{0\}$;
- *комбінаторною*, якщо усі $\mathscr{H}$-класи в S є одноелементними;
- *конгруенц-простою*, якщо S має лише одиничну й універсальну конгруенції.

Нагадаємо, що на інверсній напівгрупі S напівгрупова операція визначає частковий порядок $\leqslant$ на S

$$x \leqslant y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{існує} \quad e \in E(S) \quad \text{такий, що} \quad x = ey.$$

Цей порядок називається *природним частковим порядком* на S.

Інверсна напівгрупа S називається:

- E-*унітарною*, якщо з $es \in E(S)$ випливає, що $s \in E(S)$ для довільних $e \in E(S)$ і $s \in S$ [23];
- 0-E-*унітарною*, якщо S містить нуль 0_S і з $es \in E(S)$ випливає, що $s \in E(S)$ для довільних $e \in E(S) \setminus \{0_S\}$ і $s \in S$ [18, 27].

Напівтопологічною (*топологічною*) напівгрупою називається топологічний простір з нарізно неперервною (неперервною) напівгруповою операцією. Інверсна топологічна напівгрупа з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною напівгрупою*.

Топологія τ на напівгрупі S називається:

- *трансляційно неперервною*, якщо (S, τ) — напівтопологічна напівгрупа;
- *напівгруповою*, якщо (S, τ) — топологічна напівгрупа.

Біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p, q)$ – це напівгрупа з одиницею 1 породжена двома елементами p і q, що задовольняє умову $pq = 1$. На $\mathscr{C}(p, q)$ напівгрупова операція визначається так:

$$q^k p^l \cdot q^m p^n = q^{k+m-\min\{l,m\}} p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

Біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ є комбінаторною, біпростою, F-інверсною напівгрупою [17] і відіграє важливу роль в алгебричній теорії напівгруп і в теорії топологічних напівгруп. Зокрема, добре відомий результат Андерсона [3] стверджує, що (0-)проста напівгрупа є цілком (0-)простою тоді і тільки тоді, коли вона не містить ізоморфної копії біциклічного моноїда.

У 1970 році Ніва та Перро запропонували таке узагальнення біциклічного моноїда ([17], [19]). Для будь-якого ненульового кардинала λ *поліциклічний моноїд* P_λ — це напівгрупа з нулем така, що

$$P_\lambda = \left\langle \{p_i\}_{i\in\lambda}, \{p_i^{-1}\}_{i\in\lambda} \mid p_i p_i^{-1} = 1 \text{ і } p_i p_j^{-1} = 0 \text{ для } i \neq j \right\rangle.$$

Очевидно, що у випадку $\lambda = 1$ напівгрупа P_1 ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем.

Рональд Брук у монографії [5], використовуючи біциклічний моноїд, побудував конструкцію алгебричного занурення довільної напівгрупи S у простий моноїд $\boldsymbol{B}(S)$ (див. [9, §8.3]). Рейлі [21] та Уорн [28] узагальнили конструкцію Брука, побудувавши розширення Брука–Рейлі $\boldsymbol{BR}(S,\theta)$, для описання структури біпростих регулярних ω-напівгруп (див. [20, розділ II]). Топологізації напівгруп Бука та Брука–Рейлі вивчалися в працях [1, 2, 14, 15]. Структуру топологічних інверсних локально компактних біпростих ω-напівгруп вивчали в працях [24, 25, 26]. Ми будуємо та досліджуємо аналог розширення Брука–Рейлі напівгруп для λ-поліциклічного моноїда та досліджуємо його властивості.

Нехай λ – довільний ненульовий кардинал. Надалі, через λ^* будемо позначати вільний моноїд над алфавітом λ, а через ε – порожнє слово в λ^*. Для будь-якого слова $a \in \lambda^*$ позначимо:

$|a|$ – довжину слова a;
$\operatorname{suff}(a) = \{b \in \lambda^* \colon$ існує слово $c \in \lambda^*$ таке, що $cb = a\}$ – множину всіх суфіксів слова a;
$\operatorname{suff}^{\circ}(a) = \{b \in \lambda^* \colon$ існує слово $c \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $cb = a\}$ – множину всіх власних суфіксів слова a.

Нехай S – моноїд і $\theta\colon S \to H_S(1)$ – гомоморфізм з S у його групу одиниць $H_S(1)$. Множина $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S) = (S \times (P_\lambda \setminus \{0\})) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ з бінарною операцією

$$(1) \qquad (s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = \begin{cases} \left(\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2\right), & \text{якщо існує слово } u \in \lambda^* \\ & \qquad \text{таке, що } b_1 = ua_2; \\ \left(s\theta^{|v|}(t), a_1^{-1}vb_2\right), & \text{якщо існує слово } v \in \lambda^* \\ & \qquad \text{таке, що } a_2 = vb_1; \\ \mathbf{0}, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

і

$$(s, a_1^{-1}a_2) * \mathbf{0} = \mathbf{0} * (s, a_1^{-1}a_2) = \mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

де $\theta^n(s) = \underbrace{\theta \circ \cdots \circ \theta}_{n}(s)$ для будь-якого натурального числа n і $\theta^0(s) = s$ називається *λ-поліциклічним розширенням Брука-Рейлі* моноїда S з визначеним гомоморфізмом θ.

Ми доводимо, що так визначена бінарна операція $*$ на $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є асоціативною, а також описуємо ідемпотенти напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), *)$ та відношення Ґріна на $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), *)$. Доведено, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), *)$ — 0-проста напівгрупа для довільної напівгрупи S. Знайдено необхідні та достатні умови на моноїд S гомоморфізм θ, за виконання яких напівгрупа $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), *)$ є регулярною, інверсною, 0-біпростою, комбінаторною, конгруенц-простою, чи інверсною 0-E-унітарною. Також вивчається топологізація напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), *)$. Отримані результати анонсовано в [16].

2. Алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$

Твердження 1. *$(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), *)$ є напівгрупою.*

Доведення. Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$, $(t, b_1^{-1}b_2)$ і $(r, c_1^{-1}c_2)$ – довільні ненульові елементи множини $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $b_1 = ua_2$ і $c_1 = vb_2$. Тоді:

$$\begin{aligned}((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) =\\ &= (\theta^{|v|}(\theta^{|u|}(s)t)r, (vua_1)^{-1}c_2) =\\ &= (\theta^{|v|+|u|}(s)\theta^{|v|}(t)r, (vua_1)^{-1}c_2) =\\ &= (\theta^{|vu|}(s)\theta^{|v|}(t)r, (vua_1)^{-1}c_2) =\\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (vb_1)^{-1}c_2) =\\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).\end{aligned}$$

2. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = ub_1$ і $c_1 = vb_2$. Тоді розглянемо можливі підвипадки.

a) Існує слово $w \in \lambda^*$ таке, що $u = wv$. Тоді:

$$\begin{aligned}((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) =\\ &= (s\theta^{|wv|}(t), a_1^{-1}wvb_2) * (r, c_1^{-1}c_2) =\\ &= (s\theta^{|wv|}(t), a_1^{-1}wc_1) * (r, c_1^{-1}c_2) =\\ &= (s\theta^{|wv|}(t)\theta^{|w|}(r), a_1^{-1}wc_2) =\\ &= (s\theta^{|w|+|v|}(t)\theta^{|w|}(r), a_1^{-1}wc_2)) =\\ &= (s\theta^{|w|}(\theta^{|v|}(t)r), a_1^{-1}wc_2)) =\\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (vb_1)^{-1}c_2)) =\\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).\end{aligned}$$

b) Існує слово $w \in \lambda^*$ таке, що $v = wu$. Тоді:

$$\begin{aligned}((s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) =\\ &= (\theta^{|w|}(s\theta^{|u|}(t))r, (wa_1)^{-1}c_2) =\\ &= (\theta^{|w|}(s)\theta^{|w|+|u|}(t)r, (wa_1)^{-1}c_2) =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\theta^{|w|}(s)\theta^{|wv|}(t)r, (wa_1)^{-1}c_2) = \\
&= (\theta^{|w|}(s)\theta^{|v|}(t)r, (wa_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (wa_2)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (wub_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (vb_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

c) У випадку $u \notin \mathrm{suff}(v)$ і $v \notin \mathrm{suff}(u)$ отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= \mathbf{0} = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (vb_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

3. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $b_1 = ua_2$ і $b_2 = vc_1$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= (\theta^{|u|}(s)t\theta^{|v|}(r), (ua_1)^{-1}vc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (t\theta^{|v|}(r), b_1^{-1}vc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

4. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = ub_1$ і $b_2 = vc_1$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= (s\theta^{|u|}(t)\theta^{|uv|}(r), a_1^{-1}uvc_2) = \\
&= (s\theta^{|u|}(t)\theta^{|u|+|v|}(r), a_1^{-1}uvc_2) = \\
&= (s\theta^{|u|}(t\theta^{|v|}(r)), a_1^{-1}uvc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (t\theta^{|v|}(r), b_1^{-1}vc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

5. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$, $b_2 \notin \mathrm{suff}(c_1)$ і $c_1 \notin \mathrm{suff}(b_2)$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= \mathbf{0} = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

6. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $c_1 = ub_2$, $a_2 \notin \mathrm{suff}(b_1)$ і $b_1 \notin \mathrm{suff}(a_2)$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= \mathbf{0} = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|u|}(t)r, (ub_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

7. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$, $b_2 \notin \operatorname{suff}(c_1)$ і $c_1 \notin \operatorname{suff}(b_2)$. Тоді:

$$\begin{aligned}((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\ &= \mathbf{0} = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).\end{aligned}$$

8. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_2 = uc_1$ і $a_2 \notin \operatorname{suff}(b_1)$ і $b_1 \notin \operatorname{suff}(a_2)$. Тоді

$$\begin{aligned}((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= \mathbf{0} = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * (t\theta^{|u|}(r), b_1^{-1}uc_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).\end{aligned}$$

9. У випадку $a_2 \notin \operatorname{suff}(b_1)$, $b_1 \notin \operatorname{suff}(a_2)$, $b_2 \notin \operatorname{suff}(c_1)$ і $c_1 \notin \operatorname{suff}(b_2)$ маємо, що

$$((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) = \mathbf{0} = (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).$$

Отож, бінарна операція $*$ на $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ асоціативна. □

Надалі, якщо не зазначено інше, то будемо вважати, що S — моноїд з одиницею 1_S і групою одиниць $H_S(1_S)$. Також через 1_{P_λ} і 0_{P_λ} позначатимемо одиницю та нуль поліциклічного моноїда P_λ, а через $\mathbf{0}$ — нуль напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

Твердження 2. *Ненульовий елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $s \in E(S)$ і $a_1 = a_2$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $(e, a_1^{-1}a_2)$ – ненульовий ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_1 = ua_2$, то

$$(e, a_1^{-1}a_2) = (e, a_1^{-1}a_2) * (e, a_1^{-1}a_2) = (\theta^{|u|}(e) \cdot e, (ua_1)^{-1}a_2).$$

З цієї рівності випливає, що $a_1 = ua_1$. Тому $u = \varepsilon$, а отже,

$$e = \theta^{|u|}(e) \cdot e = \theta^0(e) \cdot e = e \cdot e$$

і $a_1 = a_2$.

2. Якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ua_1$, то

$$(e, a_1^{-1}a_2) = (e, a_1^{-1}a_2) * (e, a_1^{-1}a_2) = (e \cdot \theta^{|u|}(e), a_1^{-1}ua_2).$$

З цієї рівності випливає, що $a_2 = ua_2$. Тому $u = \varepsilon$, а отже,

$$e = e \cdot \theta^{|u|}(e) = e \cdot \theta^0(e) = e \cdot e$$

і $a_1 = a_2$.

($\Leftarrow$) Нехай e – довільний ідемпотент напівгрупи S і a – довільне слово з λ^*. Тоді $(e, a^{-1}a) * (e, a^{-1}a) = (e^2, a^{-1}a) = (e, a^{-1}a)$. □

Твердження 3. *Ідемпотенти комутують у $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли ідемпотенти комутують у напівгрупі S.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай e, f – довільні ідемпотенти напівгрупи S. Тоді елементи $(e, 1_{P_\lambda})$ і $(f, 1_{P_\lambda})$ є ідемпотентами напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Оскільки індемпотенти в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ комутують, то

$$(e \cdot f, 1_{P_\lambda}) = (e, 1_{P_\lambda}) * (f, 1_{P_\lambda}) = (f, 1_{P_\lambda}) * (e, 1_{P_\lambda}) = (f \cdot e, 1_{P_\lambda}),$$

а отже, $e \cdot f = f \cdot e$.

($\Leftarrow$) Нехай $(e, a^{-1}a)$ і $(f, b^{-1}b)$ – довільні ненульові ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a = ub$. Тоді

$$\begin{aligned}(e, a^{-1}a) * (f, b^{-1}b) &= (e \cdot \theta^{|u|}(f), a^{-1}ub) = \\ &= (e \cdot 1_S, a^{-1}ub) = \\ &= (1_S \cdot e, a^{-1}ub) = \\ &= (\theta^{|u|}(f) \cdot e, (ub)^{-1}a) = \\ &= (f, b^{-1}b) * (e, a^{-1}a).\end{aligned}$$

2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b = ua$. Тоді

$$\begin{aligned}(e, a^{-1}a) * (f, b^{-1}b) &= (\theta^{|u|}(e) \cdot f, (ua)^{-1}b) = \\ &= (1_S \cdot f, a^{-1}ub) = \\ &= (f \cdot 1_S, a^{-1}ub) = \\ &= (f \cdot \theta^{|u|}(e), b^{-1}ua) = \\ &= (f, b^{-1}b) * (e, a^{-1}a).\end{aligned}$$

3. Якщо $a \notin \operatorname{suff}(b)$ і $b \notin \operatorname{suff}(a)$, то

$$(e, a^{-1}a) * (f, b^{-1}b) = \mathbf{0} = (f, b^{-1}b) * (e, a^{-1}a).$$

Очевидно, що кожен елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ комутує з її нулем. $\square$

Нехай S – напівгрупа. Для довільних $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$, $A \subseteq S$ і $s \in S$ позначимо

$$\begin{aligned}S_{a_1^{-1}a_2} &= \left\{(t, a_1^{-1}a_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon t \in S\right\}, \\ A_{a_1^{-1}a_2} &= \left\{(t, a_1^{-1}a_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon t \in A \subseteq S\right\}, \\ P_\lambda^s &= \left\{(s, b_1^{-1}b_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda \setminus \{0_{P_\lambda}\}\right\} \cup \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

Твердження 4. 1. *Множина $S_{a_1^{-1}a_2}$ з індукованою з $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ операцією ізоморфна напівгрупі S тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$.*

2. *Множина P_λ^s з індукованою з $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ операцією ізоморфна поліциклічному моноїду P_λ тоді і тільки тоді, коли s – ідемпотент напівгрупи S.*

Доведення. 1. Якщо $a_1 \neq a_2$, то з твердження 2 випливає, що $S_{a_1^{-1}a_2}$ не є піднапівгрупою напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

У випадку $a_1 = a_2$ визначимо відображення $f \colon S_{a_1^{-1}a_2} \to S$ за формулою $f((s, a_1^{-1}a_2)) = s$. Очевидно, що відображення f є бієктивним. Доведемо, що воно зберігає операцію. Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, a_1^{-1}a_2)$ – довільні елементи з $S_{a_1^{-1}a_2}$. Тоді

$$f((s, a_1^{-1}a_2) * (t, a_1^{-1}a_2)) = f((st, a_1^{-1}a_2)) = st = f((s, a_1^{-1}a_2)) \cdot f((t, a_1^{-1}a_2)).$$

Отже, f є ізоморфізмом.

2. Якщо s не є ідемпотентом напівгрупи S, то

$$(s, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (ss, 1_{P_\lambda}) \notin P_\lambda^s,$$

а отже, P_λ^s не є піднапівгрупою напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

У випадку, коли s – ідемпотент напівгрупи S, то визначимо відображення $f\colon P_\lambda^s \to P_\lambda$ за формулами $f((s, a_1^{-1}a_2)) = a_1^{-1}a_2$ і $f(\mathbf{0}) = 0_{P_\lambda}$. Очевидно, що так означене відображення f є бієктивним. Доведемо, що воно зберігає операцію. Нехай $(s, a_1^{-1}a_2), (s, b_1^{-1}b_2) \in P_\lambda^s$. Розглянемо можливі випадки.

a) Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді:

$$\begin{aligned}
f((s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2)) &= f((\theta^{|u|}(s)s, a_1^{-1}u^{-1}b_2)) = \\
&= f((1_S s, a_1^{-1}u^{-1}b_2)) = \\
&= f((s, a_1^{-1}u^{-1}b_2)) = \\
&= a_1^{-1}u^{-1}b_2 = \\
&= a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = \\
&= f((s, a_1^{-1}a_2)) * f((s, b_1^{-1}b_2)).
\end{aligned}$$

b) Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді:

$$\begin{aligned}
f((s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2)) &= f((s\theta^{|u|}(s), a_1^{-1}ub_2)) = \\
&= f((s1_S, a_1^{-1}ub_2)) = \\
&= f((s, a_1^{-1}ub_2)) = \\
&= a_1^{-1}ub_2 = \\
&= a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = \\
&= f((s, a_1^{-1}a_2)) * f((s, b_1^{-1}b_2)).
\end{aligned}$$

c) Якщо $(s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2) = \mathbf{0}$, то

$$f((s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2)) = \mathbf{0} = a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = f((s, a_1^{-1}a_2)) * f((s, b_1^{-1}b_2)).$$

□

Твердження 5. *Елемент $(t, b_1^{-1}b_2)$ є інверсним до елемента $(s, a_1^{-1}a_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $b_1 = a_2, b_2 = a_1$ і t — інверсний елемент до s в напівгрупі S.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай елемент $(t, b_1^{-1}b_2)$ є інверсним до елемента $(s, a_1^{-1}a_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $b_1 = ua_2$ і $a_1 = vb_2$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (\theta^{|v|}(\theta^{|u|}(s)t)s, (vua_1)^{-1}a_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $a_1 = vua_1$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

2. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_1 = ub_2$ і $a_2 = vb_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) &= (\theta^{|u|}(t)s, (ub_1)^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = \\ &= (\theta^{|u|}(t)s\theta^{|v|}(t), (ub_1)^{-1}vb_2) = \\ &= (t, b_1^{-1}b_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $b_1 = ub_1$ і $b_2 = vb_2$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

3. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $b_1 = ua_2$ і $b_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (\theta^{|u|}(s)t\theta^{|v|}(s), (ua_1)^{-1}va_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $a_1 = ua_1$ і $a_2 = va_2$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

4. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = ub_1$ і $b_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (s\theta^{|u|}(t)\theta^{|v|}(s), a_1^{-1}uva_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $a_2 = vua_2$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

Отже, якщо елемент $(t, b_1^{-1}b_2)$ є інверсним до елемента $(s, a_1^{-1}a_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$. Тому

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (s, a_1^{-1}a_2) * (t, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (sts, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}(t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) &= (t, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) * (t, a_2^{-1}a_1) = \\ &= (tst, a_2^{-1}a_1) = \\ &= (t, a_2^{-1}a_1).\end{aligned}$$

З першої рівності випливає, що $s = sts$, а з другої випливає, що $t = tst$. Отжн, елемент t є інверсним до елемента s у напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай s – довільний елемент напівгрупи S і s^{-1} — інверсний елемент до s у напівгрупі S. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (s^{-1}, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) = (ss^{-1}s, a_1^{-1}a_2) = (s, a_1^{-1}a_2)$$

і

$$(s^{-1}, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) * (s^{-1}, a_2^{-1}a_1) = (s^{-1}ss^{-1}, a_1^{-1}a_2) = (s^{-1}, a_2^{-1}a_1).$$

$\square$

З твердження 5 випливають такі два наслідки.

Наслідок 1. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – регулярна тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – регулярна.*

Наслідок 2. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – інверсна тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – інверсна.*

Лема 1. *Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Якщо $(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (r, c_1^{-1}c_2) \neq \mathbf{0}$, то $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$.*

Доведення. Розглянемо можливі випадки, коли $(r, c_1^{-1}c_2) \neq \mathbf{0}$.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді
$$(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}ub_1) * (t, b_1^{-1}b_2) = (s \cdot \theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2).$$
2. Існує слово $v \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = va_2$. Тоді
$$(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (t, (va_2)^{-1}b_2) = (\theta^{|v|}(s) \cdot t, (va_1)^{-1}b_2).$$

Отже, $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$. $\square$

Теорема 1. *Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді:*

1) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{L}t$ в S і $a_2 = b_2$;*
2) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{R}t$ в S і $a_1 = b_1$;*
3) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{H}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{H}t$ в S і $a_1^{-1}a_2 = b_1^{-1}b_2$;*
4) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{D}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{D}t$ в S.*

Доведення. 1. ($\Rightarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді існують елементи $(r, c_1^{-1}c_2)$ і $(q, d_1^{-1}d_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (r, c_1^{-1}c_2) * (t, b_1^{-1}b_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (q, d_1^{-1}d_2) * (s, a_1^{-1}a_2).$$

З першої рівності та леми 1 випливає, що $b_2 \in \operatorname{suff}(a_2)$, а з другої рівності та леми 1 випливає, що $a_2 \in \operatorname{suff}(b_2)$. Тому $a_2 = b_2$, а це означає, що існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_1 = ud_2$ і $b_1 = vc_2$. Отже,

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (r, c_1^{-1}c_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (\theta^{|v|}(r)t, (vc_1)^{-1}b_2)$$

і

$$(t, b_1^{-1}b_2) = (q, d_1^{-1}d_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = (\theta^{|u|}(q)s, (ud_1)^{-1}a_2).$$

З першої рівності випливає, що $s = \theta^{|v|}(r)t$, а з другої рівності випливає, що $t = \theta^{|u|}(q)s$. Отже, $s\mathscr{L}t$ в напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що $s\mathscr{L}t$ в S і $a_2 = b_2$. Тоді існують елементи r і q напівгрупи S такі, що $s = rt$ і $t = qs$. Тому

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (r, a_1^{-1}b_1) * (t, b_1^{-1}b_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (q, b_1^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2).$$

Отже, $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

2. ($\Rightarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді існують елементи $(r, c_1^{-1}c_2)$ і $(q, d_1^{-1}d_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (q, d_1^{-1}d_2).$$

З першої рівності та леми 1 випливає, що $b_1 \in \operatorname{suff}(a_1)$, а з другої рівності та леми 1 випливає, що $a_1 \in \operatorname{suff}(b_1)$. Тому $a_1 = b_1$, а це означає, що існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = ud_1$ і $b_2 = vc_1$. Отож, отримуємо, що

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = (t\theta^{|v|}(r), b_1^{-1}vc_2)$$

і

$$(t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (q, d_1^{-1}d_2) = (s\theta^{|u|}(q), a_1^{-1}ud_2).$$

З першої рівності випливає, що $s = t\theta^{|v|}(r)$, а з другої рівності випливає, що $t = s\theta^{|u|}(q)$. Отже, $s\mathscr{R}t$ в напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що $s\mathscr{L}t$ в S і $a_1 = b_1$. Тоді існують елементи r і q напівгрупи S такі, що $s = tr$ і $t = sq$. Тому

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2) * (r, b_2^{-1}b_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (q, a_2^{-1}a_2).$$

Отже, $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

3. Випливає з тверджень 1 і 2.

4. ($\Rightarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{D}(t, b_1^{-1}b_2)$ у напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді існує елемент $(r, c_1^{-1}c_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(r, c_1^{-1}c_2)$ і $(r, c_1^{-1}c_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$. За твердженнями 1 і 2 отримаємо, що $s\mathscr{L}r$ і $r\mathscr{R}t$ в S, а отже, $s\mathscr{D}t$ у напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що $s\mathscr{D}t$ в S. Тоді існує елемент r напівгрупи S такий, що $s\mathscr{L}r$ і $r\mathscr{R}t$. Тому $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(r, b_1^{-1}a_2)$ і $(r, b_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$. Отже, $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{D}(t, b_1^{-1}b_2)$ у напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. $\square$

З теореми 1 і наслідку 2 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – комбінаторна тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – комбінаторна.*

Наслідок 4. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – 0-біпроста тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – біпроста.*

Твердження 6. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-простою для довільної напівгрупи S.*

Доведення. Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і u – непорожнє слово вільного моноїда λ^*. Тоді

$$\begin{aligned} ((\theta^{|u|}(t))^{-1}, a_1^{-1}ub_1) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, (ub_2)^{-1}a_2) = \\ = ((\theta^{|u|}(t))^{-1} \cdot \theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (s, (ub_2)^{-1}a_2) = \\ = (1_S, a_1^{-1}ub_2) * (s, (ub_2)^{-1}a_2) = \\ = (s, a_1^{-1}a_2), \end{aligned}$$

звідки випливає, що напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-простою. □

Твердження 7. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ — конгруенц-проста тоді і тільки тоді, коли S – тривіальна напівгрупа.*

Доведення. Якщо S – одноелементна множина, то напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ ізоморфна λ-поліциклічному моноїду P_λ. Оскільки λ-поліциклічний моноїд є конгруенц-простою напівгрупою (див. наприклад [4, теорема 2.5]), то у цьому випадку напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є конгруенц-простою.

Нехай напівгрупа S не є одноелементною множиною. Тоді відношення

$$\mathfrak{C} = \left\{((x, a_1^{-1}a_2), (y, a_1^{-1}a_2)) \colon x, y \in S, a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda\right\} \cup \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$

є нетривіальною конгруенцією на $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, причому, очевидно, що фактор-напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)/\mathfrak{C}$ ізоморфна λ-поліциклічному моноїду P_λ. □

Твердження 8. *Інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-E-унітарною тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S є інверсною E-унітарною та $\theta^{-1}(1_S) = E(S)$.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – інверсна, то з наслідку 2 випливає, що напівгрупа S є також інверсною. Нехай s – елемент напівгрупи S і e – ідемпотенти напівгрупи S такі, що $es \in E(S)$. Тоді $(e, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (es, 1_{P_\lambda})$. Оскільки $(e, 1_{P_\lambda})$ і $(ex, 1_{P_\lambda})$ – ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ та інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-E-унітарною, то $(x, 1_{P_\lambda}) \in E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$, а отже, s є ідемпотентом напівгрупи S. Тому інверсна напівгрупа S є E-унітарною.

Нехай s – елемент напівгрупи S такий, що $\theta(s) = 1_S$ і a – слово в λ^* таке, що $|a| = 1$. Тоді

$$(1_S, a^{-1}a) * (s, 1_{P_\lambda}) = (\theta(s), a^{-1}a) = (1_S, a^{-1}a).$$

Оскільки $(1_S, a^{-1}a)$ – ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ й інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-E-унітарною, то елемент $(s, a^{-1}a)$ міститься в $E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$, а отже, s – ідемпотент напівгрупи S.

$(\Leftarrow)$ Нехай $(e, a^{-1}a)$ – ненульовий ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і $(s, b_1^{-1}b_2)$ – елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що

$$(e, a^{-1}a) * (s, b_1^{-1}b_2) \in E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua$, то

$$(e, a^{-1}a) * (s, b_1^{-1}b_2) = (\theta^{|u|}(e) \cdot s, (ua)^{-1}b_2) = (s, b_1^{-1}b_2).$$

Оскільки $(s, b_1^{-1}b_2)$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то з твердження 2 випливає, що $b_1 = b_2$ і s є ідемпотентом напівгрупи S. Отже, $(s, b_1^{-1}b_2) \in E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$.

2. Якщо існує слово $v \in \lambda^*$ таке, що $a = vb_1$, то

$$(e, a^{-1}a) * (s, b_1^{-1}b_2) = (e \cdot \theta^{|v|}(s), a^{-1}vb_2).$$

Оскільки $(e \cdot \theta^{|v|}(s), a^{-1}vb_2)$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то $vb_1 = a = vb_2$ і $\theta^{|v|}(s)$ є ідемпотентом напівгрупи S. Враховуючи попереднє і те, що $\theta^{-1}(1_S) = E(S)$ отримуємо, що $b_1 = b_2$ і $s \in E(S)$. Отже, $(s, b_1^{-1}b_2)$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

Тому інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – 0-E-унітарна. □

Твердження 9. *Ненульовий елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ належить центру $Z(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$ тоді і тільки тоді, коли $s \in Z(S)$, $s = \theta(s)$ і $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ – ненульовий елемент з центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2a_1) = (s, a_1^{-1}a_2) * (1_S, a_1) = (1_S, a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) = (s, a_2)$$

і

$$(s, a_1^{-1}) = (s, a_1^{-1}a_2) * (1_S, a_2^{-1}) = (1_S, a_2^{-1}) * (s, a_1^{-1}a_2) = (s, (a_1a_2)^{-1}a_2).$$

З першої рівності випливає, що $a_1 = \varepsilon$, а з другої випливає, що $b = \varepsilon$. Тому $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.

Нехай $(s, 1_{P_\lambda})$ – ненульовий елемент з центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і t – довільний елемент напівгрупи S. Тоді

$$(s \cdot t, 1_{P_\lambda}) = (s, 1_{P_\lambda}) * (t, 1_{P_\lambda}) = (t, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (t \cdot s, 1_{P_\lambda}).$$

Тому $s \cdot t = t \cdot s$, а отже, s належить центру напівгрупи S.

Нехай $(s, 1_{P_\lambda})$ – ненульовий елемент з центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і a – слово з λ^* таке, що $|a| = 1$. Тоді

$$(s, a) = (s, 1_{P_\lambda}) * (1_S, a) = (1_S, a) * (s, 1_{P_\lambda}) = (\theta(s), a).$$

Звідси випливає, що $s = \theta(s)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $(t, a_1^{-1}a_2)$ – довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і s – елемент з центру напівгрупи S такий, що $s = \theta(s)$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, 1_{P_\lambda}) * (t, a_1^{-1}a_2) &= (\theta^{|a_1|}(s) \cdot t, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (s \cdot t, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (t \cdot s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (t \cdot \theta^{|a_2|}(s), a_1^{-1}a_2) = \\ &= (t, a_1^{-1}a_2) * (s, 1_{P_\lambda}).\end{aligned}$$

Тому $(s, 1_{P_\lambda})$ належить центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. □

Твердження 10. *Елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ з напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ належить групі одиниць $H(1_{\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)})$ тоді і тільки тоді, коли $s \in H(1_S)$ і $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) З леми 1 випливає таке: якщо елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ належить групі одиниць $H(1_{\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)})$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.

Нехай елемент $(s, 1_{P_\lambda})$ належить групі одиниць $H(1_{\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)})$. Тоді існує елемент $(t, 1_{P_\lambda})$ групи одиниць напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(st, 1_{P_\lambda}) = (s, 1_{P_\lambda}) * (t, 1_{P_\lambda}) = (t, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (ts, 1_{P_\lambda}) = (1_S, 1_{P_\lambda}).$$

Тому s є елементом групи одиниць напівгрупи S.

($\Leftarrow$) Нехай s – елемент групи одиниць напівгрупи S. Тоді

$$\begin{aligned}(s, 1_{P_\lambda}) * (s^{-1}, 1_{P_\lambda}) &= (s \cdot s^{-1}, 1_{P_\lambda}) = \\ &= (s^{-1} \cdot s, 1_{P_\lambda}) = \\ &= (s^{-1}, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = \\ &= (1_S, 1_{P_\lambda}).\end{aligned}$$

Отже, $(s, 1_{P_\lambda})$ є елементом групи одиниць напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. □

Твердження 11. *Множини $\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon a * x = b\}$ і $\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon x * a = b\}$ – скінченні для будь-яких ненульових елементів $a, b \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли множини $\{x \in S \colon sx = t\}$, $\{x \in S \colon xs = t\}$ і $\theta^{-1}(s)$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо множина $\{x \in S \colon sx = t\}$ – нескінченна для деяких $s, t \in S$, то множина $\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon (s, 1_{P_\lambda}) * x = (t, 1_{P_\lambda})\}$ – нескінченна. Якщо ж множина $\{x \in S \colon xs = t\}$ – нескінченна для деяких $s, t \in S$, то множина

$$\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon x * (s, 1_{P_\lambda}) = (t, 1_{P_\lambda})\}$$

– нескінченна. Отже, множини $\{x \in S \colon sx = t\}$ і $\{x \in S \colon xs = t\}$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$.

Припустимо, що множина $\theta^{-1}(t)$ – нескінченна для деякого елемента $t \in S$. Тоді множина

$$\{(x, 1_{P_\lambda}) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon (1_S, a) * (x, 1_{P_\lambda}) = (t, a)\}$$

є нескінченною для довільного слова $a \in \lambda^*$.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2), (t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Доведемо, що множина

$$\left\{(x, y_1^{-1}y_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon (s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (t, b_1^{-1}b_2)\right\}$$

є скінченною. З твердження 2.7 [4] випливає, що існує скінченна кількість елементів $y_1^{-1}y_2$ λ-поліциклічного моноїда P_λ таких, що $a_1^{-1}a_2 \cdot y_1^{-1}y_2 = b_1^{-1}b_2$. Нехай $c_1^{-1}c_2$ – один з цих елементів. Розглянемо можливі випадки.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (\theta^{|u|}(s)x, a_1^{-1}u^{-1}y_2) = (t, b_1^{-1}b_2).$$

Оскільки множини $\{x \in S \colon sx = t\}$ і $\{x \in S \colon xs = t\}$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$, то існує скінченна кількість елементів x напівгрупи S таких, що $\theta^{|u|}(s)x = t$.

2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (s\theta^{|u|}(x), a_1^{-1}uy_2) = (t, b_1^{-1}b_2).$$

Оскільки множини $\{x \in S\colon sx = t\}$, $\{x \in S\colon xs = t\}$ і $\theta^{-1}(s)$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$, то існує скінченна кількість елементів x напівгрупи S таких, що $s\theta^{|u|}(x) = t$.

Позаяк скінченне об'єднання скінченних множин є скінченною множиною, то множина

$$\left\{(x, y_1^{-1}y_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (t, b_1^{-1}b_2)\right\}$$

скінченна. Аналогічно доводиться, що множина

$$\left\{(x, y_1^{-1}y_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (x, y_1^{-1}y_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2)\right\}$$

скінченна. □

З означення напівгрупової операції на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і твердження 2.7 [4] випливає такий наслідок

Наслідок 5. *Для довільних $a, a_1, b, b_1 \in \lambda^*$, $s, t \in S$ кожна з множин*

$$A = \left\{(t, u^{-1}v) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (s, a^{-1}b) * (t, u^{-1}v) \in S_{a_1^{-1}b_1}\right\},$$

чи

$$B = \left\{(t, u^{-1}v) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (t, u^{-1}v) * (s, a^{-1}b) \in S_{a_1^{-1}b_1}\right\}$$

перетинає не більше, ніж скінченну кількість підмножин вигляду $S_{c^{-1}d}$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

Твердження 12. *Нехай S, T – довільні напівгрупи та $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ – конгруенції на напівгрупах S і T, відповідно. Якщо $f\colon S \to T$ – ізоморфізм такий, що $s\mathfrak{C}_1 t$ тоді і тільки тоді, коли $f(s)\mathfrak{C}_1 f(t)$ для довільних $s, t \in S$, то відображення $\overline{f}\colon S/\mathfrak{C}_1 \to T/\mathfrak{C}_2$, означене $\overline{f}([s]_{\mathfrak{C}_1}) = [f(s)]_{\mathfrak{C}_2}$, є ізоморфізмом.*

Доведення. Очевидно, що відображення $\overline{f}$ визначено коректно та є бієктивним. Доведемо, що $\overline{f}$ зберігає операцію. Нехай $[a]_{\mathfrak{C}_1}, [b]_{\mathfrak{C}_1} \in S/\mathfrak{C}_1$. Оскільки $\mathfrak{C}_1$ – конгруенція на напівгрупі S, то

$$\overline{f}([a]_{\mathfrak{C}_1} \cdot [b]_{\mathfrak{C}_1}) = \overline{f}([ab]_{\mathfrak{C}_1}) = [f(ab)]_{\mathfrak{C}_2} = [f(a) \cdot f(b)]_{\mathfrak{C}_2} = [f(a)]_{\mathfrak{C}_2} \cdot [f(b)]_{\mathfrak{C}_2},$$

звідки випливає наше твердження. □

Твердження 13. *Нехай S і T — моноїди та $\theta\colon S \to H_S(1_T)$ і $\phi\colon T \to H_T(1_T)$ — гомоморфізми. Якщо $f\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \to \mathscr{P}_\lambda(\phi, T)$ – ізоморфізм, то напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T та існує автоморфізм f_p поліциклічного моноїда P_λ такий, що $f(S_{a_1^{-1}a_2}) = T_{f_p(a_1^{-1}a_2)}$.*

Доведення. Оскільки

$$S_{1_{P_\lambda}} = \{a \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon a * b \neq \mathbf{0} \text{ і } a * b \neq \mathbf{0} \text{ для довільного } b \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\}$$

і

$$T_{1_{P_\lambda}} = \{a \in \mathscr{P}_\lambda(\phi, T)\colon a * b \neq \mathbf{0} \text{ і } a * b \neq \mathbf{0} \text{ для довільного } b \in \mathscr{P}_\lambda(\phi, T)\},$$

то $f(S_{1_{P_\lambda}}) = T_{1_{P_\lambda}}$. Отже, за твердженням 4 напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T.

Визначимо конгруенцію $\mathfrak{C}_1$ на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ так: $(s, a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t, b_1^{-1}b_2)$, якщо $a_1^{-1}a_2 = b_1^{-1}b_2$ і $\mathbf{0}\mathfrak{C}_1\mathbf{0}$, та аналогічно: $(s, a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t, b_1^{-1}b_2)$, якщо $a_1^{-1}a_2 = b_1^{-1}b_2$

і $\mathbf{0}\mathfrak{C}_1\mathbf{0}$ – конгруенцію $\mathfrak{C}_2$ на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$. Доведемо, що $(s,a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t,b_1^{-1}b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $f((s,a_1^{-1}a_2))\mathfrak{C}_2 f((t,b_1^{-1}b_2))$. Зафіксуємо $(s,a^{-1}),(s,a) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Тоді $(1_S,a)*(s,a^{-1}) = (s,1_{P_\lambda})$ і $(s,a)*(1_S,a^{-1}) = (s,1_{P_\lambda})$. Оскільки $f((s,1_{P_\lambda})) = (t,1_{P_\lambda})$ для деякого елемента $t \in T$, то $f((s,a^{-1})) = (r,b^{-1})$ і $f((s,a)) = (q,b)$ для деяких $r,q \in T$ і $b \in \lambda^*$. Зауважимо, що слово b не залежить від вибору елемента s. Тому $f(s,a^{-1}) \in S_{b^{-1}}$ і $f(s,a) \in S_b$ для довільного елемента $s \in S$.

Нехай $(s,a_1^{-1}a_2),(t,a_1^{-1}a_2)$ – довільні елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. З теореми 1 випливає, що $(s,a_1^{-1})\mathscr{R}(s,a_1^{-1})$, $(s,a_2)\mathscr{L}(s,a_1^{-1}a_2)$, $(t,a_1^{-1})\mathscr{R}(t,a_1^{-1}a_2)$ і $(t,a_2)\mathscr{L}(t,a_1^{-1}a_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. З вище доведеного та того, що ізоморфізм зберігає $\mathscr{R}$- і $\mathscr{L}$-класи випливає, що $(s,a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t,b_1^{-1}b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $f((s,a_1^{-1}a_2))\mathfrak{C}_2 f((t,b_1^{-1}b_2))$. Отже, за твердженням 12 ізоморфізм f породжує ізоморфізм $\overline{f}\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta,S)/\mathfrak{C}_1 \to \mathscr{P}_\lambda(\phi,T)/\mathfrak{C}_1$. Оскільки кожна з напівгруп $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)/\mathfrak{C}_1$ і $\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)/\mathfrak{C}_1$ ізоморфна λ-поліциклічному моноїдові, то існує автоморфізм f_p поліциклічного моноїда P_λ такий, що $\overline{f}([(s,a_1^{-1}a_2)]_{\mathfrak{C}_1}) = \left[(s,f_p(a_1^{-1}a_2))\right]_{\mathfrak{C}_2}$. □

Якщо $f\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta,S) \to \mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$ – ізоморфізм, то через f_S^T позначимо ізоморфізм між напівгрупами S і T, який породжується ізоморфізмом $f|_{S_{1_{P_\lambda}}}$, що є звуженням ізоморфізму f на підмоноїд $S_{1_{P_\lambda}}$, який ізоморфний поліциклічному моноїдові P_λ.

З твердження 13 випливає такий наслідок:

Наслідок 6. *Нехай групи одиниць напівгруп S і T є тривіальними. Тоді напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ і $\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$ є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T.*

Теорема 2. *Нехай групи одиниць напівгруп S і T є тривіальними. Якщо $f\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta,S) \to \mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$ – ізоморфізм, то $f((s,a_1^{-1}a_2)) = (f_S^T(s), f_p(a_1^{-1}a_2))$.*

Доведення. Нехай $f((1_S,a)) = (s,b)$ і $f((1_S,a^{-1})) = (t,b^{-1})$. Тоді з рівностей

$$(1_S,a)*(1_S,a^{-1}) = (1_S,1_{P_\lambda}) \qquad \text{і} \qquad (1_S,a^{-1})*(1_S,a) = (1_S,a^{-1}a)$$

і твердження 4 випливає, що $s,t \in H(1_T)$, а отже, $s=t=1_T$. Розглянемо рівність

$$(1_S,a_1)*(s,a_1^{-1}a_2)*(1_S,a_2^{-1}) = (s,1_{P_\lambda}).$$

Оскільки $f((1_S,a_1)) = (1_T,f_p(a_1))$, $f((1_S,a_2^{-1})) = (1_T,f_p(a_2^{-1}))$, $f((s,a_1^{-1}a_2)) = (t,f_p(a_1^{-1}a_2))$ і $f((s,1_{P_\lambda})) = (f_S^T(s),1_{P_\lambda})$, то $t = f_S^T(s)$. □

3. Топологізація напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$

Твердження 14. *Якщо (S,τ_S) – гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа та $\theta\colon S \to H(1_S)$ – неперервний гомоморфізм, то $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathsf{st}})$ – гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа, де τ_{st} – топологія породжена базою*

$$\mathcal{B}_{\mathsf{st}} = \{U_{a^{-1}b}\colon U \in \mathcal{B},\ a,b \in \lambda^*\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

і $\mathcal{B}$ – база топології τ_S.

Доведення. Сім'я підмножин $\mathcal{B}_{\mathsf{st}}$ задовольняє умови (B1)–(B2) [11], а отже, вона є базою топології τ_{st} на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Очевидно, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathsf{st}})$ – гаусдорфовий простір.

Доведемо, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$ – напівтопологічна напівгрупа. Нехай s,t – довільні елементи напівгрупи S. З нарізної неперервності операції на (S,τ_S) випливає, що для довільного відкритого околу $U(st)$ елемента st в (S,τ_S) існують відкриті околи $U_1(s),U_2(t)$ елементів s,t в (S,τ_S). відповідно, такі, що $U_1(s)\cdot t\subseteq U(st)$ і $s\cdot U_2(t)\subseteq U(st)$.

Нехай $(s,a_1^{-1}a_2),(t,b_1^{-1}b_2)$ – довільні елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо існує слово $u\in\lambda^*$ таке, що $b_1=ua_2$, то
$$(s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2)=(\theta^{|u|}(s)t,a_1^{-1}u^{-1}b_2).$$
Нехай $W_{a_1^{-1}u^{-1}b_2}$ — довільний відкритий окіл точки $(\theta^{|u|}(s)t,a_1^{-1}u^{-1}b_2)$ у топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$, де W – відкритий окіл точки $\theta^{|u|}(s)t$ в (S,τ_S). Тоді з нарізної неперервності напівгрупової операції в (S,τ_S) і з неперервності гомоморфізму θ випливає, що існують відкриті околи $V(s)$ і $V(t)$ точок s і t у просторі (S,τ_S), відповідно, такі, що $\theta^{|u|}(V(s))\cdot t\subseteq W$ і $\theta^{|u|}(s)\cdot V(t)\subseteq W$. Тоді
$$V(s)_{a_1^{-1}a_2}*(t,b_1^{-1}b_2)\subseteq W_{a_1^{-1}u^{-1}b_2}\qquad\text{і}\qquad (s,a_1^{-1}a_2)*V(t)_{b_1^{-1}b_2}\subseteq W_{a_1^{-1}u^{-1}b_2}.$$

2. Якщо існує слово $v\in\lambda^*$ таке, що $a_2=vb_1$, то
$$(s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2)=(s\theta^{|v|}(t),a_1^{-1}vb_2).$$
Нехай $W_{a_1^{-1}vb_2}$ — довільний відкритий окіл точки $(s\theta^{|v|}(t),a_1^{-1}vb_2)$ у топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$, де W – відкритий окіл точки $s\theta^{|v|}(t)$ в (S,τ_S). Тоді з нарізної неперервності напівгрупової операції в (S,τ_S) і з неперервності гомоморфізму θ випливає, що існують відкриті околи $V(s)$ і $V(t)$ точок s і t в (S,τ_S), відповідно, такі, що $V(s)\cdot\theta^{|v|}(t)\subseteq W$ і $s\cdot\theta^{|v|}(V(t))\subseteq W$. Тоді
$$V(s)_{a_1^{-1}a_2}*(t,b_1^{-1}b_2)\subseteq W_{a_1^{-1}vb_2}\qquad\text{і}\qquad (s,a_1^{-1}a_2)*V(t)_{b_1^{-1}b_2}\subseteq W_{a_1^{-1}vb_2}.$$

3. Якщо $(s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2)=\mathbf{0}$, то
$$V(s)_{a_1^{-1}a_2}*(t,b_1^{-1}b_2)=\{\mathbf{0}\}\qquad\text{і}\qquad (s,a_1^{-1}a_2)*V(t)b_1^{-1}b_2=\{\mathbf{0}\}$$
для довільних відкритих околів $V(s)$ і $V(t)$ точок s і t, відповідно, в (S,τ_S).

Також, маємо, що $V(s)_{a_1^{-1}a_2}*\{\mathbf{0}\}=\{\mathbf{0}\}$, $\{\mathbf{0}\}*V(s)_{a_1^{-1}a_2}=\{\mathbf{0}\}$ і $\{\mathbf{0}\}*\{\mathbf{0}\}=\{\mathbf{0}\}$ для довільного відкритого околу $V(s)$ точки s в (S,τ_S). □

Зауваження 1. (i) Оскільки топологічний простір $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$ є топологічною сумою $\omega\cdot\lambda$ копій простору (S,τ_S) та ізольованої точки $\{\mathbf{0}\}$, то напівтопологічна напівгрупа $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$ успадковує усі властивості простору (S,τ_S), що зберігаються нескінченною топологічною сумою топологічних просторів. Зокрема, метрику d_S з S на $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ можна продовжити так:
$$d_{\mathbf{st}}((s,a_1^{-1}a_2),(t,b_1^{-1}b_2))=\begin{cases} d(s,t), & \text{якщо } a_1^{-1}a_2=b_1^{-1}b_2;\\ 1, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$
Очевидно, що топологія, породжена метрикою $d_{\mathbf{st}}$ на $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$, збігається з топологією $\tau_{\mathbf{st}}$.

(ii) Твердження 14 виконується для топологічних і топологічних інверсних напівгруп.

Твердження 15. *Нехай $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільних слів $a_1,a_2,b_1,b_2,\in\lambda^*$ топологічні підпростори $S_{a_1^{-1}a_2}$ і $S_{b_1^{-1}b_2}$ є гомеоморфними, а $S_{a_1^{-1}a_1}$ та $S_{b_1^{-1}b_1}$ – топологічно ізоморфні піднапівгрупи в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Доведення. Означимо відображення $\phi^{b_1^{-1}b_2}_{a_1^{-1}a_2}\colon\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ та $\phi^{a_1^{-1}a_2}_{b_1^{-1}b_2}\colon\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ формулами

$$\phi^{b_1^{-1}b_2}_{a_1^{-1}a_2}(s)=(1_S,b_1^{-1}a_1)*s*(1_S,a_2^{-1}b_2)\qquad\text{і}\qquad\phi^{a_1^{-1}a_2}_{b_1^{-1}b_2}(s)=(1_S,a_1^{-1}b_1)*s*(1_S,b_2^{-1}a_2).$$

Відображення $\phi^{b_1^{-1}b_2}_{a_1^{-1}a_2}$ та $\phi^{a_1^{-1}a_2}_{b_1^{-1}b_2}$ є неперервними як композиції зсувів у напівтопологічній напівгрупі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$, а також виконуються рівності $\phi^{a_1^{-1}a_2}_{b_1^{-1}b_2}(\phi^{b_1^{-1}b_2}_{a_1^{-1}a_2}(s))=s$ і $\phi^{b_1^{-1}b_2}_{a_1^{-1}a_2}(\phi^{a_1^{-1}a_2}_{b_1^{-1}b_2}(t))=t$ для довільних $s\in S_{a_1^{-1}a_2}$ і $t\in S_{b_1^{-1}b_2}$, а отже, їх звуження $\phi^{b_1^{-1}b_2}_{a_1^{-1}a_2}|_{S_{a_1^{-1}a_2}}$ і $(\phi^{a_1^{-1}a_2}_{b_1^{-1}b_2})|_{S_{a_1^{-1}a_2}}$ є гомеоморфізмами підпросторів $S_{a_1^{-1}a_2}$ і $S_{b_1^{-1}b_2}$ в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. У випадку піднапівгруп $S_{a_1^{-1}a_1}$ та $S_{b_1^{-1}b_1}$, очевидно, що відображення $\phi^{b_1^{-1}b_1}_{a_1^{-1}a_1}|_{S_{a_1^{-1}a_1}}$ є ізоморфізмом. □

Лема 2. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Тоді:*

- *(i) для довільної точки (s,ε) існує її відкритий окіл $V\subseteq S_\varepsilon$;*
- *(ii) для довільного елемента $s\in S$ та довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки (s,w) такий, що $V\subseteq S_w$;*
- *(iii) для довільного елемента $s\in S$ і довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки (s,w^{-1}) такий, що $V\subseteq S_{w^{-1}}$;*
- *(iv) для довільного елемента $s\in S$ і довільних непорожніх слів $u,v\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки $(s,u^{-1}v)$, що містить лише точки вигляду $(t,x^{-1}y)$, де x — суфікс слова u, а y — суфікс слова v.*

Доведення. (i) Зафіксуємо довільну літеру $x\in\lambda$. Тоді

$$(s,\varepsilon)*(1_s,x^{-1}x)=(\theta(s),x^{-1}x)\qquad\text{і}\qquad(1_s,x^{-1}x)*(s,\varepsilon)=(\theta(s),x^{-1}x).$$

Нехай W — відкритий окіл точки $(\theta(s),x^{-1}x)$, що не містить нуля $\mathbf{0}$. З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ випливає, що існує відкритий окіл V точки (s,ε) такий, що $V*(1_s,x^{-1}x)\subseteq W$ і $(1_s,x^{-1}x)*V\subseteq W$. Оскільки $(1_s,x^{-1}x)$ — ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$, то з гаусдорфовості простору $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ випливає, що

$$A_x=(1_s,x^{-1}x)*\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\cup\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)*(1_s,x^{-1}x)$$

— замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. Звідси випливає, що, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $V\subseteq\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\setminus A_x$.

Зафіксуємо довільний елемент $(t,c^{-1}d)\in V$. Зауважимо, що

$$(t,c^{-1}d)=(t,c^{-1}d)*(1_S,d^{-1}d)\qquad\text{і}\qquad(t,c^{-1}d)=(1_S,c^{-1}c)*(t,c^{-1}d).$$

З напівгрупової операції (1) визначеної на $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ випливає, що $x\notin\operatorname{suff}(d)$ і $x\notin\operatorname{suff}(c)$. Отож, якщо $c\neq\varepsilon$ і $d\neq\varepsilon$, і врахувавши, що x — літера алфавіту λ, то отримуємо рівності

$$(1_S, d^{-1}d) * (1_S, x^{-1}x) = \mathbf{0} \qquad \text{і} \qquad (1_S, c^{-1}c) * (1_S, x^{-1}x) = \mathbf{0},$$

з яких випливає, що

$$(t, c^{-1}d) * (1_S, x^{-1}x) = (t, c^{-1}d) * (1_S, d^{-1}d) * (1_S, x^{-1}x) = (t, c^{-1}d) * \mathbf{0} = \mathbf{0} \in W$$

і

$$(1_S, x^{-1}x) * (t, c^{-1}d) = (1_S, x^{-1}x) * (1_S, c^{-1}c) * (t, c^{-1}d) = \mathbf{0} * (t, c^{-1}d) = \mathbf{0} \in W.$$

Отримали протиріччя. Отож $c = d = \varepsilon$, а отже, $V \subseteq S_\varepsilon$.

(ii) За твердженням (i) для точки (s, ε) існує її відкритий окіл $W \subseteq S_\varepsilon$. Оскільки $(s, w) * (1_S, w^{-1}) = (s, \varepsilon)$ для довільного слова $w \in \lambda^*$, то з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ випливає, що існує відкритий окіл V точки (s, w) такий, що $V * (1_S, w^{-1}) \subseteq W$. Якщо $(t, c^{-1}d) \in V$, то з рівності

$$(t, c^{-1}d) * (1_S, w^{-1}) = \begin{cases} (t, c^{-1}d_1), & \text{якщо } w \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(d) \text{ і } d = d_1 w; \\ (t, c^{-1}), & \text{якщо } d = w; \\ (\theta^{|w_1|}(t), c^{-1}w_1^{-1}), & \text{якщо } d \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(w) \text{ і } w = w_1 d; \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

та включення $W \subseteq S_\varepsilon$ отримуємо, що $c = d_1 = w_1 = \varepsilon$, а отже, $d = w$. Звідки випливає, що $V \subseteq S_w$.

Доведення твердження (iii) аналогічне до (ii).

(iv) Зафіксуємо довільний елемент $(s, u^{-1}v)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Очевидно, що виконуються рівності

$$(s, u^{-1}v) * (1_S, v^{-1}) = (s, u^{-1}) \qquad \text{і} \qquad (1_S, u) * (s, u^{-1}v) = (s, v).$$

З тверджень (ii) і (iii) випливає, що існують відкриті околи $W_{(s,u^{-1})}$ і $W_{(s,v)}$ точок (s, u^{-1}) і (s, v) в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$, відповідно, такі, що $W_{(s,u^{-1})} \subseteq S_{u^{-1}}$ і $W_{(s,v)} \subseteq S_v$. З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ випливає, що існує відкритий окіл $V_{(s,u^{-1}v)}$ точки $(s, u^{-1}v)$ такий, що

$$V_{(s,u^{-1}v)} * (1_S, v^{-1}) \subseteq W_{(s,u^{-1})} \qquad \text{і} \qquad (1_S, u) * V_{(s,u^{-1}v)} \subseteq W_{(s,v)}.$$

Зафіксуємо довільну точку $(t, x^{-1}y) \in V_{(s,u^{-1}v)}$. Тоді

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, v^{-1}) = (t_1, u^{-1}) \qquad \text{і} \qquad (1_S, u) * (t, x^{-1}y) = (t_2, v),$$

для деяких $t_1, t_2 \in S$. З кожної з цих рівностей випливає, що x є суфіксом слова u, а y є суфіксом слова v. □

Для довільних слів $u, v \in \lambda^*$ позначимо

$$\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta, S) = \left\{(s, u^{-1}a^{-1}bv) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon s \in S,\ a, b \in \lambda^*\right\}.$$

Лема 3. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді для довільних слів $u, v \in \lambda^*$ підпростір $\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta, S)$ в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ гомеоморфний простору $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Доведення. З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ випливає, що відображення

$$f\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S),\ x\mapsto(1_S,u^{-1})*x*(1_S,v)$$

і

$$h\colon \mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\ x\mapsto(1_S,u)*x*(1_S,v^{-1})$$

є неперервними. Очевидно, що $f\circ h$ і $h\circ f$ — тотожні відображення множин $\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)$ і $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$, відповідно, звідки випливає твердження леми. □

З лем 2 і 3 випливає наслідок 7.

Наслідок 7. *Нехай $u,v\in\lambda^*$ і τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Тоді:*

(*i*) *для довільної точки $(s,u^{-1}v)$ існує її відкритий окіл $V\cap\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\subseteq S_{u^{-1}v}$;*

(*ii*) *для довільного елемента $s\in S$ та довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки $(s,u^{-1}wv)$ такий, що $V\cap\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\subseteq S_{u^{-1}wv}$;*

(*iii*) *для довільного елемента $s\in S$ та довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки $(s,u^{-1}w^{-1}v)$ такий, що $V\cap\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\subseteq S_{u^{-1}w^{-1}v}$.*

Лема 4. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ така, що $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ для деяких непорожніх слів $u,v\in\lambda^*$. Тоді $S_{u^{-1}}$ і S_v — замкнені підмножини в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Доведення. Очевидно, що для довільного елемента $s\in S$ виконується рівність

$$(s,u^{-1})*(1_S,v)=(s,u^{-1}v).$$

Нехай $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що

$$(t,x^{-1}y)*(1_S,v)\in S_{u^{-1}v}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}(t,x^{-1}y)*(1_S,v)&=(t\cdot\theta^{|y|}(1_S),x^{-1}yv)=\\&=(t\cdot 1_S,x^{-1}yv)=\\&=(t,x^{-1}yv),\end{aligned}$$

а отже, $y=\varepsilon$ і $x=u$. Отож повним прообразом множини $S_{u^{-1}v}$ стосовно правого зсуву на елемент $(1_S,v)$ є множина $S_{u^{-1}}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ неперервні відображення, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{u^{-1}}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.

Аналогічно, для довільного елемента $s\in S$ виконується рівність

$$(1_S,u^{-1})*(s,v)=(s,u^{-1}v).$$

Якщо $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що

$$(1_S,u^{-1})*(t,x^{-1}y)\in S_{u^{-1}v},$$

то

$$\begin{aligned}(1_S, u^{-1}) * (t, x^{-1}y) &= (\theta^{|x|}(1_S)\cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (1_S\cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (t, u^{-1}x^{-1}y),\end{aligned}$$

а отже, $y = v$ і $x = \varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u^{-1}v}$ стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, u^{-1})$ є множина S_v. Далі знову з теореми 1.4.1 [11] випливає, що S_v — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. $\square$

Лема 5. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ така, що $S_{u^{-1}}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для деякого непорожнього слова $u \in \lambda^*$. Тоді S_ε — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Доведення. Очевидно, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(1_S, u^{-1}) * (s, \varepsilon) = (s, u^{-1}).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(1_S, u^{-1}) * (t, x^{-1}y) \in S_{u^{-1}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}(1_S, u^{-1}) * (t, x^{-1}y) &= (\theta^{|x|}(1_S)\cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (1_S\cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (t, u^{-1}x^{-1}y),\end{aligned}$$

а отже, $x = y = \varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u^{-1}}$ стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, u^{-1})$ є множина S_ε. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ неперервні відображення, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. $\square$

Лема 6. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ така, що S_v — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для деякого непорожнього слова $v \in \lambda^*$. Тоді S_ε — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Доведення. З означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ випливає, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(s, \varepsilon) * (1_S, v) = (s, v).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, v) \in S_v.$$

Тоді

$$\begin{aligned}(t, x^{-1}y) * (1_S, v) &= (t\cdot\theta^{|y|}(1_S), x^{-1}yv) = \\ &= (t\cdot 1_S, x^{-1}yv) = \\ &= (t, x^{-1}yv),\end{aligned}$$

а отже, $x = y = \varepsilon$. Отож повним прообразом множини S_v стосовно правого зсуву на елемент $(1_S, v)$ є множина S_ε. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. □

Теорема 3. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ така, що S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. Тоді $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для довільних слів $u, v \in \lambda^*$.*

Доведення. Теорему доведемо індукцією по довжині слів $u, v \in \lambda^*$.

Спочатку доведемо, що $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для довільних слів $u, v \in \lambda^*$, довжини яких не перевищують 1.

Нехай a — довільна літера алфавіту λ. З означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ випливає, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(s, a) * (1_S, a^{-1}) = (s \cdot 1_S, \varepsilon) = (s, \varepsilon).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що $(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) \in S_\varepsilon$. Тоді

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) = \begin{cases} (\theta(t)), x^{-1}a^{-1}), & \text{якщо } y = \varepsilon; & (1_1) \\ (t, x^{-1}), & \text{якщо } y = a; & (1_2) \\ (t, x^{-1}y_1), & \text{якщо } y = y_1 a \text{ та } y_1 \neq \varepsilon; & (1_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (1_4) \end{cases}$$

Очевидно, що випадки (1_1), (1_3) та (1_4) неможливі, а отже, виконується випадок (1_2). Отож отримаємо, що $x = \varepsilon$ і $y = a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_ε стосовно правого зсуву на елемент $(1_S, a^{-1})$ є множина S_a. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_a — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Далі, для довільної літери b алфавіту λ, з означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ випливає, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(1_S, b) * (s, b^{-1}) = (1_S \cdot s, \varepsilon) = (s, \varepsilon).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) \in S_\varepsilon.$$

Тоді

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) = \begin{cases} (\theta(t)), by), & \text{якщо } x = \varepsilon; & (2_1) \\ (t, y), & \text{якщо } x = b; & (2_2) \\ (t, x_1^{-1}y), & \text{якщо } x = x_1 b \text{ та } x_1 \neq \varepsilon; & (2_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (2_4) \end{cases}$$

Очевидно, що випадки (2_1), (2_3) та (2_4) неможливі, а отже, виконується випадок (2_2). Отож маємо, що $x = b$ і $y = \varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_ε стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, b)$ є множина $S_{b^{-1}}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{b^{-1}}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Нехай a та b — довільні літери алфавіту λ. З означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ випливає, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(1_S, b) * (s, b^{-1}a) = (s, a).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) \in S_a.$$

Розглянемо два випадки $a = b$ й $a \neq b$. Припустимо, що $a = b$. Тоді

$$(1_S, a) * (t, x^{-1}y) = \begin{cases} (\theta(t)), ay), & \text{якщо } x = \varepsilon; & (3_1) \\ (t, y), & \text{якщо } x = a; & (3_2) \\ (t, x_1^{-1}y), & \text{якщо } x = x_1 a \text{ та } x_1 \neq \varepsilon; & (3_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (3_4) \end{cases}$$

Очевидно, що випадки (3_3) та (3_4) неможливі, а отже, виконуються випадки (3_1) та (3_2). У випадку (3_1) матимемо, що $x = y = \varepsilon$ та у випадку (3_2) маємо, що $x = y = a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_a стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, a)$ є множина $S_{a^{-1}a} \cup S_\varepsilon$. З неперервності зсувів у $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ та теореми 1.4.1 [11] випливає, що $S_{a^{-1}a} \cup S_\varepsilon$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. За лемою 2$(i)$, S_ε — відкрита підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$, а отже, $S_{a^{-1}a}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Припустимо, що $a \neq b$. Тоді

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) = \begin{cases} (\theta(t)), by), & \text{якщо } x = \varepsilon; & (4_1) \\ (t, y), & \text{якщо } x = b; & (4_2) \\ (t, x_1^{-1}y), & \text{якщо } x = x_1 b \text{ та } x_1 \neq \varepsilon; & (4_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (4_4) \end{cases}$$

Очевидно, що випадки (4_1), (4_3) та (4_4) неможливі, а отже, виконується випадок (4_2). Отож маємо, що $x = b$ і $y = a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_a стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, b)$ є множина $S_{b^{-1}a}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{b^{-1}a}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Тепер доведемо крок індукції: з того, що $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для довільних слів $u, v \in \lambda^*$ довжини $< k$ випливає, що $S_{w^{-1}z}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для довільних слів $w, z \in \lambda^*$ довжини $\leqslant k$.

Нехай $u \in \lambda^*$ — слово довжини k і $v \in \lambda^*$ — слово довжини $< k$. Нехай $b \in \lambda$ — остання літера слова u, тобто $u = u_1 b$ для деякого слова $u_1 \in \lambda^*$ довжини $k-1$. Тоді

$$(1_S, b) * (s, u^{-1}v) = (1_S, b) * (s, b^{-1}u_1^{-1}v) = (s, u_1^{-1}v).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) \in S_{u_1^{-1}v}.$$

Тоді

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) = \begin{cases} (\theta(t)), by), & \text{якщо } x = \varepsilon; & (5_1) \\ (t, y), & \text{якщо } x = b; & (5_2) \\ (t, x_1^{-1}y), & \text{якщо } x = x_1 b \text{ та } x_1 \neq \varepsilon; & (5_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (5_4) \end{cases}$$

Оскільки слово $u_1 \in \lambda^*$ має довжину $k-1$, то випадки (5_1), (5_2) і (5_4) неможливі, а отже, виконується випадок (5_3). Отож маємо, що $x = u_1 b$ і $y = v$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u_1^{-1}v}$ стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, b)$ є множина $S_{u^{-1}v}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Нехай $u \in \lambda^*$ — слово довжини $\leqslant k$ і $v \in \lambda^*$ — слово довжини k. Нехай $a \in \lambda$ — остання літера слова v, тобто $v = v_1 a$ для деякого слова $v_1 \in \lambda^*$ довжини $k-1$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, u^{-1}v) * (1_S, a^{-1}) &= (s, u^{-1}v_1 a) * (1_S, a^{-1}) = \\ &= (s \cdot 1_S, u^{-1}v_1) = \\ &= (s, u^{-1}v_1).\end{aligned}$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) \in S_{u^{-1}v_1}.$$

Тоді

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) = \begin{cases} (\theta(t)), x^{-1}a^{-1}), & \text{якщо } y = \varepsilon; & (6_1) \\ (t, x^{-1}), & \text{якщо } y = a; & (6_2) \\ (t, x^{-1}y_1), & \text{якщо } y = y_1 a \ \text{ та } \ y_1 \neq \varepsilon; & (6_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (6_4) \end{cases}$$

Оскільки слово $v_1 \in \lambda^*$ має довжину $k-1$, то випадки (6_1), (6_2) та (6_4) неможливі, а отже, виконується випадок (6_3). Отож маємо, що $x = u$ і $y = v_1 a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u^{-1}v_1}$ стосовно правого зсуву на елемент $(1_S, a^{-1})$ є множина $S_{u^{-1}v}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. Це завершує доведення кроку індукції, а отже, виконується твердження теореми. $\square$

Нехай (S, τ_S) — напівтопологічний моноїд і $\theta\colon S \to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм з S у його групу одиниць $H_S(1)$. Будемо говорити, що напівтопологічний моноїд $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda})$ є *топологічним λ-поліциклічним розширенням Брука-Рейлі* моноїда (S, τ_S) із визначеним гомоморфізмом θ в класі напівтопологічних напівгруп $\mathfrak{STS}$, якщо відображення $\Upsilon\colon (S, \tau_S) \to (\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda})$, означене за формулою $\Upsilon\colon s \mapsto (s, \varepsilon)$, є тополого-алгебричним вкладенням і $(S, \tau_S), (\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda}) \in \mathfrak{STS}$. Якщо напівтопологічна напівгрупа (S, τ_S) не містить одиниці, то приєднавши одиницю 1_S до (S, τ_S) як ізольовану точку та означивши гомоморфізм $\theta\colon S \to H_S(1), s \mapsto 1$, ми аналогічно, як і в [1], отримуємо *топологічне λ-поліциклічне розширенням Брука* моноїда (S, τ_S). Зауважимо, що з твердження 15 випливає, що топологічний ізоморфізм вкладення $\Upsilon\colon (S, \tau_S) \to (\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda})$ можна визначати й за формулою $\Upsilon\colon s \mapsto (s, w^{-1}w)$, де w — довільне слово вільного моноїда λ^*.

З твердження 14 випливає, що для довільної напівтопологічної напівгрупи (S, τ_S) існує топологічне λ-поліциклічне розширення Брука-Рейлі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ напівгрупи (S, τ_S) із визначеним гомоморфізмом θ в класі напівтопологічних напівгруп таке, що для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ і нуль $\mathbf{0}$ є ізольованою точкою цього простору. Тому природно виникає таке запитання: *за яких умов на напівтопологічну напівгрупу (S,τ_S) усі топологічні λ-поліциклічні розширення Брука-Рейлі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ напівгрупи (S,τ_S) мають одну, чи обидві з цих вище перелічених властивостей?*

На завершенні ми даємо часткову відповідь на запитання: за яких умов підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в довільному топологічному λ-розширенні Брука-Рейлі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ напівтопологічної напівгрупи (S,τ_S)?

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття.

Напівтопологічна напівгрупа S називається H-замкненою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп $\mathfrak{STS}$, якщо $S\in\mathfrak{STS}$ і кожна напівтопологічна напівгрупа $T\in\mathfrak{STS}$, що містить напівгрупу S, містить напівгрупу S як замкнений підпростір [13].

Теорема 4. *Нехай (S,τ_S) — гаусдорфовий напівтопологічний моноїд, $\theta\colon S\to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм і $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ — топологічне λ-поліциклічне розширення Брука-Рейлі напівгрупи (S,τ_S) в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Якщо (S,τ_S) містить лівий (правий, двобічний) ідеал, який є H-замкненою напівгрупою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп, то для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Доведення. За теоремою 3 нам достатньо довести, що S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$, оскільки в цьому випадку з леми 2 випливає, що всі множини вигляду $S_{u^{-1}v}$ відкриті в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.

Припустимо, що напівгрупа (S,τ_S) містить лівий ідеал I, що є H-замкненою напівгрупою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Тоді

$$I_\varepsilon=\{(s,\varepsilon)\colon s\in I\}$$

є замкненою піднапівгрупою в напівтопологічній напівгрупі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. Зафіксуємо довільний елемент $(s_0,\varepsilon)\in I_\varepsilon$. Очевидно, що $(t,\varepsilon)*(s_0,\varepsilon)\in I_\varepsilon$ для довільного елемента $t\in S$. Нехай $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що $(t,x^{-1}y)*(s_0,\varepsilon)\in S_\varepsilon$. Тоді

$$(t,x^{-1}y)*(s_0,\varepsilon)=\begin{cases} (ts_0,\varepsilon), & \text{якщо } x=y=\varepsilon; & (7_1)\\ (ts_0,x^{-1}), & \text{якщо } x\neq\varepsilon \text{ і } y=\varepsilon; & (7_2)\\ (t\theta^{|y|}(s),x^{-1}y), & \text{якщо } x\neq\varepsilon \text{ і } y\neq\varepsilon. & (7_3)\end{cases}$$

Очевидно, що випадки (7_2) та (7_3) неможливі, а отже, виконується випадок (7_1). Отож маємо, що $x=y=\varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини I_ε стосовно лівого зсуву на елемент (s_0,ε) є множина S_ε. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. Далі скористаємося теоремою 3.

Доведення у випадку правого, чи двобічного ідеалу, аналогічне. □

З теореми 4 випливає наслідок 8.

Наслідок 8. *Нехай (S,τ_S) — гаусдорфовий напівтопологічний моноїд, $\theta\colon S\to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм і $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ — топологічне λ-поліциклічне* *розширення Брука-Рейлі напівгрупи (S, τ_S) в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Якщо (S, τ_S) містить компактний лівий (правий, двобічний) ідеал, то для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Теорема 5. *Нехай (S, τ_S) — гаусдорфовий топологічний інверсний моноїд, $\theta\colon S \to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм і $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ — топологічне λ-поліциклічне розширення Брука-Рейлі напівгрупи (S, τ_S) в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. Якщо напівгрупа S містить мінімальний ідемпотент, то для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Доведення. Оскільки в топологічній інверсній напівгрупі S інверсія та напівгрупова операція неперервні, то кожна максимальна підгрупа в S, а отже, і кожен $\mathscr{H}$-клас, є замкненою підмножиною в S [10]. Звідси випливає, якщо e_0 — мінімальний ідемпотент напівгрупи S, то максимальна підгрупа $H(e_0, \varepsilon)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, що містить ідемпотент (e_0, ε), є замкненою підмножиною в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. Далі доведення аналогічне до теореми 4. □

Зауваження 2. Напівгрупа Брука–Рейлі $\mathscr{B}(S, \theta)$ над моноїдом S (див. [20, підрозділ II.5]) є, очевидно, піднапівгрупою в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Зауважимо, що з теорем 3 і 4 випливають основні результати, отримані в працях [1, 2, 15] для топологічних розширень Брука–Рейлі топологічних і напівтопологічних напівгруп.

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради.

Список використаної літератури

1. О. В. Гутик, *Вложение топологических полугрупп*, Мат. Студії **3** (1994), 10–14.
2. О. В. Гутік, *Про ослаблення топології прямої суми на напівгрупі Брака*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **47** (1997), 17–21.
3. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
4. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discr. Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
5. R. J. Bruck, *A survey of binary systems*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, VII, Ergebn. Math. **20** (1958), 185S.
6. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
7. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
8. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
9. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
10. C. Eberhart and J. Selden, *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 115–126. DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0252547-6
11. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

12. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. Ser. 2 **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
13. O. Gutik, *On closures in semitopological inverse semigroups with continuous inversion*, Algebra Discrete Math. **18** (2014), no. 1, 59–85.
14. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse ω-semigroups*, Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008
15. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Bruck-Reilly extension of a semitopological semigroups*, Прикладні проблеми механіки і математики **7** (2009), 66–72.
16. P. Khylynskyi and O. Gutik, On Bruck-Reilly λ-extensions of semigroups, The XII International Algebraic Conference in Ukraine, July 02–06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. Abstracts. Vinnytsia, 2019, P. 51.
17. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, Singapore: World Scientific, 1998.
18. M. V. Lawson, *The structure of 0-E-unitary inverse semigroups I: the monoid case*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **42** (1999), no. 3, 497–520. DOI: 10.1017/S0013091500020484
19. M. Nivat and J.-F. Perrot, *Une generalisation du monoide bicyclique*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **271** (1970), 824–827.
20. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
21. N. R. Reilly, *Bisimple ω-semigroups*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–169. DOI: 10.1017/S2040618500035346
22. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. DOI: 10.1007/BFb0073675
23. T. Saitô, *Proper ordered inverse semigroups*, Pac. J. Math. **15** (1965), no. 2, 649–666. DOI: 10.2140/pjm.1965.15.649
24. A. A. Selden, *Bisimple ω-semigroups in the locally compact setting*, Bogazici Univ. J. Sci. Math. **3** (1975), 15–77.
25. A. A. Selden, *On the closure of bisimple ω-semigroup*, Semigroup Forum **12** (1976), no. 3, 373–379. DOI: 10.1007/BF02195943
26. A. A. Selden, *The kernel of the determining endomorphism of a bisimple ω-semigroup*, Semigroup Forum **14** (1977), no. 3, 265–271. DOI: 10.1007/BF02194671
27. M. B. Szendrei, *A generalisation of McAlister's P-theorem for E-unitary regular semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) **51** (1987), no. 1–2, 229–249.
28. R. J. Warne, *A class of bisimple inverse semigroups*, Pac. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2019
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 17.11.2021

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90

POLYCYCLIC EXTENSIONS OF SEMIGROUPS

Oleg GUTIK, Pavlo KHYLYNSKYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua,
pavlo.khylynskyi@lnu.edu.ua

In the paper we introduce a notion of the Bruck-Reilly λ-polycyclic extension of a monoid S with a homomorphism θ which is an analogue of the Bruck-Reilly extension of a monoid S. We describe idempotens of the semigroup $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ and Green's relations on $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$. It is proved that $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ is a 0-simple semigroup for any semigroup S. We find necessary and sufficient conditions on a monoid S and a homomorphism θ under which the semigroup $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ is regular, inverse, 0-bisimple, combinatorial, congruence free, or inverse 0-E-unitary. Also we study topologizations of the semigroup $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$.

Key words: semigroup, polycyclic monoid, extension, semitopological semigroup, topological semigroup.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 48–56
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 48–56
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.048-056

УДК 512.536

ON FEEBLY COMPACT TOPOLOGIES ON THE SEMIGROUP $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$

Oleksandra LYSETSKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: o.yu.sobol@gmail.com

We study the Gutik-Mykhalenych semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ in the case when the family $\mathscr{F}_1$ consists of the empty set and all singleton in ω. We show that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ is isomorphic to subsemigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\curlyvee}(\omega_{\min})$ of the Brandt ω-extension of the semilattice $(\omega, \min)$ and describe all shift-continuous feebly compact T_1-topologies on the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\curlyvee}(\omega_{\min})$. In particular, we prove that every shift-continuous feebly compact T_1-topology τ on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ is compact and moreover in this case the space $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}, \tau\right)$ is homeomorphic to the one-point Alexandroff compactification of the discrete countable space $\mathfrak{D}(\omega)$.

Key words: semitopological semigroup, feebly compact, compact, Brandt ω-extension.

We shall follow the terminology of [4, 5, 6, 7, 27]. By ω we denote the first infinite cardinal.

A semigroup S is called *inverse* if for any element $x \in S$ there exists a unique $x^{-1} \in S$ such that $xx^{-1}x = x$ and $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. The element x^{-1} is called the *inverse of* $x \in S$. If S is an inverse semigroup, then the function $\operatorname{inv}\colon S \to S$ which assigns to every element x of S its inverse element x^{-1} is called the *inversion*.

If S is a semigroup, then we shall denote the subset of all idempotents in S by $E(S)$. If S is an inverse semigroup, then $E(S)$ is closed under multiplication and we shall refer to $E(S)$ as a *band* (or the *band of* S). Then the semigroup operation on S determines the following partial order $\preccurlyeq$ on $E(S)$: $e \preccurlyeq f$ if and only if $ef = fe = e$. This order is called the *natural partial order* on $E(S)$. A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents.

If S is an inverse semigroup then the semigroup operation on S determines the following partial order $\preccurlyeq$ on S: $s \preccurlyeq t$ if and only if there exists $e \in E(S)$ such that $s = te$. This order is called the *natural partial order* on S [28].

2020 Mathematics Subject Classification: 22A15, 20A15, 54D10, 54D30, 54H12

The bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q subjected only to the condition $pq = 1$. The semigroup operation on $\mathscr{C}(p,q)$ is defined as follows:

$$q^kp^l \cdot q^mp^n = q^{k+m-\min\{l,m\}}p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

It is well known that the bicyclic monoid $\mathscr{C}(p,q)$ is a bisimple (and hence simple) combinatorial E-unitary inverse semigroup and every non-trivial congruence on $\mathscr{C}(p,q)$ is a group congruence [5].

A *topological* (*semitopological*) *semigroup* is a topological space together with a continuous (separately continuous) semigroup operation. If S is a semigroup and τ is a topology on S such that (S,τ) is a topological semigroup, then we shall call τ a *semigroup topology* on S, and if τ is a topology on S such that (S,τ) is a semitopological semigroup, then we shall call τ a *shift-continuous topology* on S.

Next we shall describe the construction which is introduced by Gutik and Mykhalenych in [10].

Let $\mathscr{P}(\omega)$ be the family of all subsets of ω. For any $F \in \mathscr{P}(\omega)$ and $n,m \in \omega$ we put $n-m+F = \{n-m+k \colon k \in F\}$ if $F \neq \varnothing$ and $n-m+F = \varnothing$ otherwise. A subfamily $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ is called ω-*closed* if $F_1 \cap (-n+F_2) \in \mathscr{F}$ for all $n \in \omega$ and $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

Let $\boldsymbol{B}_{\omega}$ be the bicyclic monoid and $\mathscr{F}$ be an ω-closed subfamily of $\mathscr{P}(\omega)$. On the set $\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}$ we define the semigroup operation "$\cdot$" in the following way

$$(i_1,j_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2) = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2, j_2, (j_1-i_2+F_1)\cap F_2), & \text{if } j_1 \leqslant i_2;\\ (i_1, j_1-i_2+j_2, F_1\cap(i_2-j_1+F_2)), & \text{if } j_1 \geqslant i_2.\end{cases}$$

In [10] it is proved that if the family $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ is ω-closed then $(\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)$ is a semigroup. Moreover, if an ω-closed family $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ contains the empty set $\varnothing$ then the set $\boldsymbol{I} = \{(i,j,\varnothing) \colon i,j \in \omega\}$ is an ideal of the semigroup $(\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)$. For any ω-closed family $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ the semigroup

$$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)/\boldsymbol{I}, & \text{if } \varnothing \in \mathscr{F};\\ (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot), & \text{if } \varnothing \notin \mathscr{F}\end{cases}$$

is defined in [10]. The semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ generalizes the bicyclic monoid and the countable semigroup of matrix units. It is proven in [10] that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ is combinatorial inverse semigroup and Green's relations, the natural partial order on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ and its set of idempotents are described. The criteria of simplicity, 0-simplicity, bisimplicity, 0-bisimplicity of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ and when $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ has the identity, is isomorphic to the bicyclic semigroup or the countable semigroup of matrix units are given. In particular, in [10] it is proved that the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ is isomorphic to the semigrpoup of $\omega\times\omega$-matrix units if and only if $\mathscr{F}$ consists of a sigleton and the empty set.

We define

$$\mathscr{F}_1 = \{A \subseteq \omega \colon |A| \leqslant 1\}.$$

It is obvious that $\mathscr{F}_1$ is an ω-closed subfamily of $\mathscr{P}(\omega)$ and hence $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ is an inverse semigroup with zero. Later by $(i,j,\{k\})$ we denote a non-zero element of $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ for some $i,j,k \in \omega$ and by $\boldsymbol{0}$ the zero of $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

In this paper we study properties of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. We show that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ is isomorphic to the subsemigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ of the Brandt ω-extension of the semilattice $(\omega, \min)$ and describe all shift-continuous feebly compact T_1-topologies on the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$. In particular, we prove that every shift-continuous feebly compact T_1-topology τ on $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ is compact and moreover in this case the space $(\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min}), \tau)$ is homeomorphic to the one-point Alexandroff compactification of the discrete countable space $\mathfrak{D}(\omega)$.

Proposition 2 of [10] implies Proposition 1 which describes the natural partial order on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

Proposition 1. *Let $(i_1, j_1, \{k_1\})$ and $(i_2, j_2, \{k_2\})$ be non-zero elements of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Then $(i_1, j_1, \{k_1\}) \preccurlyeq (i_2, j_2, \{k_2\})$ if and only if*

$$k_2 - k_1 = i_1 - i_2 = j_1 - j_2 = p$$

for some $p \in \omega$.

Proposition 1 implies the structure of maximal chains in $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ with the respect to its natural partial order

Corollary 1. *Let i, j be arbitrary elements of ω. Then the following finite series*

$$\begin{array}{l}
\mathbf{0} \preccurlyeq (i, j, \{0\}); \\
\mathbf{0} \preccurlyeq (i+1, j+1, \{0\}) \preccurlyeq (i, j, \{1\}); \\
\mathbf{0} \preccurlyeq (i+2, j+2, \{0\}) \preccurlyeq (i+1, j+1, \{1\}) \preccurlyeq (i, j, \{2\}); \\
\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\mathbf{0} \preccurlyeq (i+k, j+k, \{0\}) \preccurlyeq (i+k-1, j+k-1, \{1\}) \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq (i, j, \{k\}); \\
\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

describes maximal chains in the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$.

We need the following construction from [8].

Let S be a semigroup with zero and $\lambda \geqslant 1$ be a cardinal. On the set $B_{\lambda}(S) = (\lambda \times S \times \lambda) \sqcup \{\mathscr{O}\}$ we define a semigroup operation as follows

$$(\alpha, s, \beta) \cdot (\gamma, t, \delta) = \begin{cases} (\alpha, st, \delta), & \text{if } \beta = \gamma; \\ \mathscr{O}, & \text{if } \beta \neq \gamma \end{cases}$$

and $(\alpha, s, \beta) \cdot \mathscr{O} = \mathscr{O} \cdot (\alpha, s, \beta) = \mathscr{O} \cdot \mathscr{O} = \mathscr{O}$, for all $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \lambda$ and $s, t \in S$. If S is a monoid then the semigroup $\mathscr{B}_{\lambda}(S)$ is called the *Brandt λ-extension of the semigroup S* [8]. Algebraic properties of $\mathscr{B}_{\lambda}(S)$ and its generalization Brandt λ^0-extensions $\mathscr{B}_{\lambda}^0(S)$ of semigroups are studied in [8, 13]. The structures, topologizations of the semigroups $\mathscr{B}_{\lambda}(S)$ and $\mathscr{B}_{\lambda}^0(S)$, their algebraic, categorical properties, applications and generalizations are established in [2, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 26].

By $\omega_{\min}$ we denote the set ω with the binary operation

$$xy = \min\{x, y\}, \qquad \text{for} \quad x, y \in \omega.$$

It is obvious that $\omega_{\min}$ is a semilattice.

We define a map $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$ by the formulae

$$(i, j, \{k\})\mathfrak{f} = (i+k, k, j+k) \qquad \text{and} \qquad (\mathbf{0})\mathfrak{f} = \mathscr{O}, \tag{1}$$

for $i,j,k\in\omega$.

Proposition 2. *The map* $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}\to\mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$ *is an isomorphic embedding.*

Proof. It is obvious that the map $\mathfrak{f}$ defined by formulae (1) is bijective.

Fix arbitrary $(i_1,j_1,\{k_1\}),(i_2,j_2,\{k_2\})\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Then we have that

$$
\begin{aligned}
&((i_1,j_1,\{k_1\})\cdot(i_2,j_2,\{k_2\}))\mathfrak{f}=\\
&=\left\{
\begin{array}{ll}
(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+\{k_1\})\cap\{k_2\})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1<i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1<i_2 \text{ and } j_1+k_1\neq i_2+k_2;\\
(i_1,j_2,\{k_1\}\cap\{k_2\})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1=i_2 \text{ and } k_1=k_2;\\
(\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1=i_2 \text{ and } k_1\neq k_2;\\
(i_1,j_1-i_2+j_2,\{k_1\}\cap(i_2-j_1+\{k_2\}))\mathfrak{f}, & \text{if } j_1>i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1>i_2 \text{ and } j_1+k_1\neq i_2+k_2
\end{array}
\right. =\\
&=\left\{
\begin{array}{ll}
(i_1-j_1+i_2,j_2,\{k_2\})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1<i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(i_1,j_2,\{k_1\})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1=i_2 \text{ and } k_1=k_2;\\
(i_1,j_1-i_2+j_2,\{k_1\})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1>i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(\mathbf{0})\mathfrak{f}, & \text{if } j_1+k_1\neq i_2+k_2
\end{array}
\right. =\\
&=\left\{
\begin{array}{ll}
(i_1-j_1+i_2+k_2,k_2,j_2+k_2), & \text{if } j_1<i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_2+k_1), & \text{if } j_1=i_2 \text{ and } k_1=k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_1-i_2+j_2+k_1), & \text{if } j_1>i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
\mathscr{O}, & \text{if } j_1+k_1\neq i_2+k_2
\end{array}
\right. =\\
&=\left\{
\begin{array}{ll}
(i_1+k_1,k_2,j_2+k_2), & \text{if } j_1<i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_2+k_2), & \text{if } j_1=i_2 \text{ and } k_1=k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_2+k_2), & \text{if } j_1>i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
\mathscr{O}, & \text{if } j_1+k_1\neq i_2+k_2,
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
((i_1,j_1,\{k_1\})\mathfrak{f}\cdot(i_2,j_2,\{k_2\}))\mathfrak{f}&=(i_1+k_1,k_1,j_1+k_1)\cdot(i_2+k_2,k_2,j_2+k_2)=\\
&=\left\{
\begin{array}{ll}
(i_1+k_1,\min\{k_1,k_2\},j_2+k_2), & \text{if } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
\mathscr{O}, & \text{if } j_1+k_1\neq i_2+k_2
\end{array}
\right. =\\
&=\left\{
\begin{array}{ll}
(i_1+k_1,k_2,j_2+k_2), & \text{if } k_2<k_1 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_2+k_2), & \text{if } k_2=k_1 \text{ and } k_1=k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_2+k_2), & \text{if } k_2>k_1 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
\mathscr{O}, & \text{if } j_1+k_1\neq i_2+k_2,
\end{array}
\right. =\\
&=\left\{
\begin{array}{ll}
(i_1+k_1,k_2,j_2+k_2), & \text{if } j_1<i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_2+k_2), & \text{if } j_1=i_2 \text{ and } k_1=k_2;\\
(i_1+k_1,k_1,j_2+k_2), & \text{if } j_1>i_2 \text{ and } j_1+k_1=i_2+k_2;\\
\mathscr{O}, & \text{if } j_1+k_1\neq i_2+k_2.
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

Since $\mathbf{0}$ and $\mathscr{O}$ are the zeros of the semigroups $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ and $\mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$, respectively, the above equalities imply that the map $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}\to\mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})$ is a homomorphism. This completes the proof of the proposition. □

Next we define

$$\mathscr{B}_{\omega}^{\Vdash}(\omega_{\min})=\{\mathscr{O}\}\cup\{(i,k,j)\in\mathscr{B}_{\omega}(\omega_{\min})\setminus\{\mathscr{O}\}: i,j\geqslant k\}.$$

Simple verifications show that $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ is an inverse subsemigroup of $\mathscr{B}_\omega(\omega_{\min})$.

Proposition 2 implies

Theorem 1. *The semigroup $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$ is isomorphic to $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ by the map $\mathfrak{f}$.*

For any $i,j\in\omega$ we denote

$$\omega_{\min}^{(i,j)_{\Rsh}}=\left\{(i,k,j)\colon (i,k,j)\in\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})\right\}.$$

Proposition 3. *Let τ be a shift-continuous T_1-topology on the semigroup $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$. Then every non-zero element of $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ is an isolated point in $\left(\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau\right)$.*

Proof. Fix arbitrary $i,j\in\omega$. Since $(i,0,i)\cdot(i,0,j)\cdot(j,0,j)=(i,0,j)$, the assumption of the proposition implies that for any open neighbourhood $W_{(i,0,j)}\not\ni\mathscr{O}$ of $(i,0,j)$ there exists its open neighbourhood $V_{(i,0,j)}$ in the topological space $\left(\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau\right)$ such that $(i,0,i)\cdot V_{(i,0,j)}\cdot(j,0,j)\subseteq W_{(i,0,j)}$. The definition of the semigroup operation on $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ implies that $V_{(i,0,j)}\subseteq\omega_{\min}^{(i,j)_{\Rsh}}$. Then the set $\omega_{\min}^{(i,j)_{\Rsh}}$ is an open subset of $\left(\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau\right)$ because it is the full preimage of $V_{(i,0,j)}$ under the mapping

$$\mathfrak{h}\colon\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})\to\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min}),\ x\mapsto(i,0,i)\cdot x\cdot(j,0,j).$$

By Corollary 1 the set $\omega_{\min}^{(i,j)_{\Rsh}}$ is finite, which implies the statement of the proposition. $\square$

Next we shall show that the semigroup $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ admits a compact shift-continuous Hausdorff topology.

Example 1. A topology τ_{Ac} on $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ is defined as follows:

a) all nonzero elements of $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$ are isolated points in $\left(\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau_{\mathrm{Ac}}\right)$;

b) the family

$$\mathscr{B}_{\mathrm{Ac}}(\mathscr{O})=\Big\{U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)}=\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})\setminus\left(\omega_{\min}^{(i_1,j_1)_{\Rsh}}\cup\cdots\cup\omega_{\min}^{(i_n,j_n)_{\Rsh}}\right)\colon\\ n,i_1,j_1,\ldots,i_n,j_n\in\omega\Big\}$$

is a base of the topology τ_{Ac} at the point $\mathscr{O}\in\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})$.

Corollary 1 implies that the set $\omega_{\min}^{(i,j)_{\Rsh}}$ is finite for any $i,j\in\omega$ which implies that $\left(\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ is the one-point Alexandroff compatification of the discrete space $\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})\setminus\{\mathscr{O}\}$.

Proposition 4. *$\left(\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ is a Hausdorff compact semitopological semigroup with continuous inversion.*

Proof. It is obvious that the topology τ_{Ac} is Hausdorff and compact.

Fix any $U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)}\in\mathscr{B}_{\mathrm{Ac}}(\mathscr{O})$ and $(i,k,j),(l,m,p)\in\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})\setminus\{\mathscr{O}\}$. Put

$$\boldsymbol{K}=\{i,i_1,\ldots,i_n,j,j_1,\ldots,j_n\}\qquad\text{and}\qquad U_{\boldsymbol{K}}=\mathscr{B}_\omega^{\Rsh}(\omega_{\min})\setminus\bigcup_{x,y\in\boldsymbol{K}}\omega_{\min}^{(x,y)_{\Rsh}}.$$

Then we have that $U_{\mathbf{K}}\in\mathscr{B}_{\mathrm{Ac}}(\mathscr{O})$ and the following conditions hold

$$U_{\boldsymbol{K}}\cdot\{(i,k,j)\}\subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$
$$\{(i,k,j)\}\cdot U_{\boldsymbol{K}}\subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$

$$\{\mathscr{O}\}\cdot\{(i,k,j)\}=\{(i,k,j)\}\cdot\{\mathscr{O}\}=\{\mathscr{O}\}\subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$
$$\{\mathscr{O}\}\cdot U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)}=U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)}\cdot\{\mathscr{O}\}=\{\mathscr{O}\}\subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},$$
$$\{(i,k,j)\}\cdot\{(l,m,p)\}=\{\mathscr{O}\}\subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)},\quad \text{if} \quad j\neq l,$$
$$\{(i,k,j)\}\cdot\{(l,m,p)\}=\{(i,\min\{k,m\},p)\},\quad \text{if} \quad j=l,$$
$$\left(U_{(j_1,i_1),\ldots,(j_n,i_n)}\right)^{-1}\subseteq U_{(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)}.$$

Therefore, $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau_{\mathrm{Ac}}\right)$ is a semitopological inverse semigroup with continuous inversion. □

We recall that a topological space X is said to be

- *perfectly normal* if X is normal and and every closed subset of X is a G_δ-set;
- *scattered* if X does not contain a non-empty dense-in-itself subspace;
- *hereditarily disconnected* (or *totally disconnected*) if X does not contain any connected subsets of cardinality larger than one;
- *compact* if each open cover of X has a finite subcover;
- *countably compact* if each open countable cover of X has a finite subcover;
- *H-closed* if X is a closed subspace of every Hausdorff topological space in which it contained;
- *infra H-closed* provided that any continuous image of X into any first countable Hausdorff space is closed (see [24]);
- *feebly compact* (or *lightly compact*) if each locally finite open cover of X is finite [1];
- *d-feebly compact* (or *DFCC*) if every discrete family of open subsets in X is finite (see [25]);
- *pseudocompact* if X is Tychonoff and each continuous real-valued function on X is bounded;
- *Y-compact* for some topological space Y, if $f(X)$ is compact for any continuous map $f\colon X\to Y$.

The relations between above defined compact-like spaces are presented at the diagram in [22].

Lemma 1. *Every shift-continuous T_1-topology τ on the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ is regular.*

Proof. By Proposition 3 every non-zero element of the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$ is an isolated point in $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau\right)$. This implies that every open neighbourhood $V(\mathscr{O})$ of the zero $\mathscr{O}$ is a closed subset in $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau\right)$, and hence the space $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau\right)$ is regular. □

Since in any countable T_1-space X every open subset of X is a F_σ-set, Theorem 1.5.17 from [7] and Lemma 1 imply the following corollary.

Corollary 2. *Let τ be a shift-continuous T_1-topology on the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$. Then $\left(\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min}),\tau\right)$ is a perfectly normal, scattered, hereditarily disconnected space.*

By $\mathfrak{D}(\omega)$ we denote the countable discrete space and by $\mathbb{R}$ the set of all real numbers with the usual topology.

Theorem 2. *Let τ be a shift-continuous T_1-topology on the semigroup $\mathscr{B}_{\omega}^{\Rsh}(\omega_{\min})$. Then the following statements are equivalent:*

(*i*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is compact;*
(*ii*) $\tau=\tau_{\mathrm{Ac}}$*;*
(*iii*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is H-closed;*
(*iv*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is feebly compact;*
(*v*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is infra H-closed;*
(*vi*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is d-feebly compact;*
(*vii*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is pseudocompact;*
(*viii*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is $\mathbb{R}$-compact;*
(*ix*) $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ *is $\mathfrak{D}(\omega)$-compact.*

Proof. Implications $(ii)\Rightarrow(i)\Rightarrow(iii)\Rightarrow(iv)\Rightarrow(v)\Rightarrow(viii)\Rightarrow(ix)$ and $(i)\Rightarrow(vii)\Rightarrow(iv)\Rightarrow(vi)$ are trivial (see the diagram in [22]). Lemma 1 implies implications $(vi)\Rightarrow(iv)$ and $(iii)\Rightarrow(i)$.

$(ix)\Rightarrow(i)$ Suppose to the contrary that there exists a shift-continuous T_1-topology τ on the semigroup $\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min})$ such that $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ is a $\mathfrak{D}(\omega)$-compact non-compact space. Then there exists an open cover $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ of $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ which has not a finite subcover. Let $U_{\alpha_0}\in\mathscr{U}$ such that $\mathscr{O}\in U_{\alpha_0}$. Since $\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)$ is not compact the set $\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min})\setminus U_{\alpha_0}$ is infinite. We enumerate the set $\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min})\setminus U_{\alpha_0}$, i.e., put $\{x_i\colon i\in\omega\}=\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min})\setminus U_{\alpha_0}$. We identify $\mathfrak{D}(\omega)$ with ω and define a map $\mathfrak{f}\colon\left(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}),\tau\right)\to\mathfrak{D}(\omega)$ in the following way

$$(x)\mathfrak{f}=\begin{cases} 0, & \text{if } x\in U_{\alpha_0};\\ i, & \text{if } x=x_i.\end{cases}$$

Proposition 3 implies that such defined map $\mathfrak{f}$ is continuous. Also, the image $(\mathscr{B}^{\Gamma}_{\omega}(\omega_{\min}))\mathfrak{f}$ is not a compact subset of $\mathfrak{D}(\omega)$, which contradicts the assumption. □

Theorem 2 implies

Corollary 3. *Every shift-continuous T_1-topology $\mathfrak{D}(\omega)$-compact τ on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ is compact. Moreover the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ admits the unique compact shift-continuous T_1-topology.*

Remark 1. By Proposition 4 of [10] the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ contains an isomorphic copy of the $\omega\times\omega$-matrix units. Then Theorem 5 from [16] implies that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ does not embed into a countably compact Hausdorff topological semigroup.

Acknowledgements

The author acknowledge her PhD Advisor Oleg Gutik and the referee for their comments and suggestions.

References

1. R. W. Bagley, E. H. Connell, and J. D. McKnight, Jr., *On properties characterizing pseudo-compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), no. 3, 500–506.
DOI: 10.1090/S0002-9939-1958-0097043-2
2. S. Bardyla, *An alternative look at the structure of graph inverse semigroups*, Mat. Stud. **51** (2019), no. 1, 3–11. DOI: 10.15330/ms.51.1.3-11

3. T. Berezovski, O. Gutik, and K. Pavlyk, *Brandt extensions and primitive topological inverse semigroups*, Int. J. Math. Math. Sci. **2010** (2010) Article ID 671401, 13 pages. DOI: 10.1155/2010/671401
4. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
5. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961.
6. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
7. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
8. O. V. Gutik, *On Howie semigroup*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **42** (1999), no. 4, 127–132 (in Ukrainian).
9. O. Gutik, *On the group of automorphisms of the Brandt λ^0-extension of a monoid with zero*, Proceedings of the 16th ITAT Conference Information Technologies – Applications and Theory (ITAT 2016), Tatranske Matliare, Slovakia, September 15-19, 2016. CEUR-WS, Bratislava, 2016, pp. 237–240.
10. O. Gutik and M. Mykhalenych, *On some generalization of the bicyclic monoid*, Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Mat. **90** (2020) (to appear) (in Ukrainian).
11. O. V. Gutik, and K. P. Pavlyk, *H-closed topological semigroups and topological Brandt λ-extensions*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **44** (2001), no. 3, 20–28, (in Ukrainian).
12. O. Gutik and K. Pavlyk, *Topological Brandt λ-extensions of absolutely H-closed topological inverse semigroups*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **61** (2003), 98–105.
13. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *On Brandt λ^0-extensions of semigroups with zero*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **49** (2006), no. 3, 26–40.
14. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Pseudocompact primitive topological inverse semigroups*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **56** (2013), no. 2, 7–19; **reprinted version:** J. Math. Sci. **203** (2014), no. 1, 1–15. DOI: 10.1007/s10958-014-2087-5
15. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *On pseudocompact topological Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids*, Topol. Algebra Appl. **1** (2013), 60–79. DOI: 10.2478/taa-2013-0007
16. O. Gutik, K. Pavlyk, and A. Reiter, *Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions*, Mat. Stud. **32** (2009), no. 2, 115–131.
17. O. V. Gutik, K. P. Pavlyk, and A. R. Reiter, *On topological Brandt semigroups*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **54** (2011), no. 2, 7–16 (in Ukrainian); **English version in:** J. Math. Sci. **184** (2012), no. 1, 1–11. DOI: 10.1007/s10958-012-0847-7
18. O. Gutik and O. Ravsky, *On feebly compact inverse primitive (semi)topological semigroups*, Mat. Stud. **44** (2015), no.1, 3–26.
19. O. V. Gutik and O. V. Ravsky, *Pseudocompactness, products and Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **58** (2015), no. 2, 20–37; **reprinted version:** J. Math. Sci. **223** (2017), no. 1, 18–38. DOI: 10.1007/s10958-017-3335-2
20. O. Gutik and D. Repovš, *On 0-simple countably compact topological inverse semigroups*, Semigroup Forum **75** (2007), no. 2, 464–469. DOI: 10.1007/s00233-007-0706-x
21. O. Gutik and D. Repovš, *On Brandt λ^0-extensions of monoids with zero*, Semigroup Forum **80** (2010), no. 1, 8–32. DOI: 10.1007/s00233-009-9191-8
22. O. V. Gutik and O. Yu. Sobol, *On feebly compact semitopological semilattice* $\exp_n \lambda$, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **61** (2018), no. 3, 16–23; **reprinted version:** J. Math. Sc. **254** (2021), no. 1, 3–20. DOI: 10.1007/s10958-021-05284-8
23. O. Gutik and O. Sobol, *Extensions of semigroups by symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **87** (2019), 5–36.

24. D. W. Hajek and A. R. Todd, *Compact spaces and infra H-closed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), no. 2, 479–482. DOI: 10.1090/S0002-9939-1975-0370499-3
25. M. Matveev, *A survey of star covering properties*, Topology Atlas preprint, April 15, 1998.
26. K. Pavlyk, Absolutely H-closed topological semigroups and Brandt λ-extensions, Applied Problems of Mechanics and Mathematics, **2** (2004), 61–68.
27. W. Ruppert, *Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. DOI: 10.1007/BFb0073675
28. V. V. Wagner, *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **84** (1952), 1119–1122 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 07.11.2019
доопрацьована 31.10.2020
прийнята до друку 17.11.2021

ПРО СЛАБКО КОМПАКТНІ ТОПОЛОГІЇ НА НАПІВГРУПІ $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$

Олесандра ЛИСЕЦЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: o.yu.sobol@gmail.com

Вивчається напівгрупа Гутіка–Михаленича $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}_1$ складається з порожньої множини та всіх одноточкових підмножин у ω. Ми доводимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ ізоморфна піднапівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\uparrow}(\omega_{\min})$ ω-розширенню Брандта напівґратки $(\omega, \min)$, описуємо всі трансляційно неперервні слабко компактні T_1-топології на напівгрупі $\mathscr{B}_{\omega}^{\uparrow}(\omega_{\min})$. Зокрема, доведено, що кожна трансляційно неперервна слабко компактна T_1-топологія τ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ є компактною, ба більше, у цьому випадку простір $\left(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}, \tau\right)$ гомеоморфний одноточковій компактифікації Алєксандрова дискретного зліченного простору $\mathfrak{D}(\omega)$.

Ключові слова: напівтопологічна напівгрупа, слабко компактний, компактний, ω-розширенню Брандта.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 57–68
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 57–68
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.057-068

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ ПАР НЕВІДОКРЕМЛЮВАНИХ ПРОСТОРІВ

Назар ПИРЧ

Українська академія друкарства,
вул. Підголоско, 19, 79020, м. Львів
e-mail: pnazar@ukr.net

Запропоновано метод зведення ізоморфної класифікації вільних топологічних груп над цілком регулярними просторами та підгруп, породжених їхніми підпросторами, до аналогічної класифікації над тихоновськими просторами.

Ключові слова: вільна топологічна група, М-еквівалентність, узагальнений ретракт, відносна топологічна властивість.

1. Вступ

Стаття є продовженням [5], усі позначення та означення взято з цієї роботи. Концепцію вільних топологічних груп над просторами з різними аксіомами відокремленості взято з [8] і [11]. Зокрема, будемо розглядати також негаусдорфові топологічні групи. *Цілком регулярним* будемо називати простір, у якому кожна замкнена множина F і кожна точка $a \notin F$ відокремлюються неперервними дійснозначними функціями. Цілком регулярний T_0-простір будемо називати *тихоновським*.

Означення 1. Нехай X — топологічний простір. Вільною топологічною групою (в сенсі Маркова) простору X називається пара, що складається з топологічної групи $F(X)$ та неперервного відображення $\eta_X\colon X \to F(X)$ такого, що для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G існує неперервний гомоморфізм $f^*\colon F(X) \to G$ такий, що $f = f^* \circ \eta_X$.

Відображення η_X є вкладенням тоді і тільки тоді, коли простір X цілком регулярний [8]. Відображення η_X є замкненим вкладенням тоді і тільки тоді, коли простір X є тихоновським [8].

2020 Mathematics Subject Classification: 22A05

Як і у випадку M-класифікації топологічних просторів, M-класифікація пар (X, A) топологічних просторів та їхніх підпросторів зводиться до проблеми ізоморфної класифікації пар цілком регулярних просторів $(\eta_X(X), \eta_X(A))$. Ми пропонуємо методи, які у певних випадках дають змогу звести цю проблему до аналогічної задачі тихоновських просторів, що допоможе застосувати методи та результати з праць [2] та [3]. Основними результатами є теореми 3, 4 і 6. У монографії [7] міститься найдетальніше викладення теорії вільних топологічних груп.

Означення 2. Нехай X — топологічний простір з відміченою точкою p. *Вільною топологічною групою* (*в сенсі Граєва*) простору X називається пара, що складається з топологічної групи $FG(X,p)$ та неперервного відображення $\mu_X\colon X \to FG(X,p)$ такого, що $\mu_X(p) = e$, де e_G — одиниця групи $FG(X,p)$, і для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G такого, що $\mu_X(p) = e_G$, де e_G — одиниця групи G, існує неперервний гомоморфізм $f^*\colon FG(X,p) \to G$ такий, що $f = f^* \circ \mu_X$.

Міняючи в цих означеннях словосполучення "топологічна група" на словосполучення "абелева топологічна група" отримаємо означення вільної абелевої топологічної групи. Оскільки вільна топологічна група $FG(X,p)$ з точністю до топологічного ізоморфізму не залежить від точки $p \in X$ [8], іноді вживатимемо скорочене позначення $FG(X)$. Для топологічного простору X через X^+ позначимо простір, отриманий з простору X додаванням однієї ізольованої точки. Для топологічних груп G_1 та G_2 будемо вживати позначення $G_1 \simeq G_2$ для означення факту ізоморфності цих груп. Для топологічного простору X та його підпростору Y позначатимемо через $G(Y)$ підгрупу вільної групи простору X, породжену множиною твірних $\eta_X(Y)$ або, відповідно, $\mu_X(Y)$. Для топологічної групи G через e_G позначатимемо одиницю групи G. Для топологічних просторів (X, x_0) та (Y, y_0) з відміченими точками позначатимемо через $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ букет цих просторів. Оскільки цей букет з точністю до M-еквівалентності не залежить від відмічених точок, то іноді вживатимемо скорочене позначення $X \vee Y$ [5]. Для топологічного простору X через T_0X буде позначати T_0-рефлексію простору X [5].

2. Узагальнені ретракти та вільні групи в сенсі Граєва

Підпростір Y топологічного простору X називається *G-ретрактом* (*G_A-ретрактом*) простору X, якщо довільне неперервне відображення з простору Y у топологічну групу (абелеву топологічну групу) H допускає неперервне продовження на X.

Теорема 1. *Нехай Y — підпростір топологічного простору X, $a \in Y$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного неперервного відображення $f\colon Y \to H$ з простору Y у довільну топологічну групу H такого, що $f(a) = e_H$, де e_H — одиниця групи H, існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $h|_Y = f$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Нехай $s\colon Y \to H$ — довільне неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу H, $s(a) = b$. Розглянемо відображення $s_1\colon Y \to H$ означене як $s_1(x) = s(x) \cdot b^{-1}$. Оскільки відображення s_1 є неперервним, то існує неперервне відображення $S_1\colon X \to H$ таке, що $S_1|_Y = s_1$. Тоді відображення $S(x) = S_1(x) \cdot b$ є неперервним і $S|_Y = s$. $\square$

Наслідок 1. *Наступні умови еквівалентні для топологічного простору X та його непорожнього цілком регулярного підпростору Y:*

(1) *підпростір Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного $p \in Y$ існує неперервне відображення $h\colon X \to FG(Y,p)$ таке, що $h(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$;*
(3) *для деякого $p \in Y$ існує неперервне відображення $h\colon X \to FG(Y,p)$ таке, що $h(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай $f\colon Y \to FG(Y,p)$ — вкладення цілком регулярного простору Y у вільну групу $FG(Y,p)$. За означенням G-ретракту існує неперервне відображення $h\colon X \to FG(Y,p)$ таке, що $h(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $f\colon Y \to H$ — неперервне відображення, таке, що $f(p) = e_H$, $f^*\colon FG(Y,p) \to H$ — гомоморфне продовження відображення f. Розглянемо відображення $f_1 = f \circ h\colon X \to H$. Якщо $y \in Y$, то $f_1(y) = f \circ h(y) = f(y) = \mu_Y(y)$. $\square$

Наслідок 2. *Наступні умови еквівалентні для цілком регулярного простору X та його непорожнього підпростору Y:*

(1) *підпростір Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного $p \in Y$ існує неперервний гомоморфізм $g\colon FG(X,p) \to FG(Y,p)$ такий, що $g(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$;*
(3) *для деякого $p \in Y$ існує неперервний гомоморфізм $g\colon FG(X,p) \to FG(Y,p)$ такий, що $g(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.*

Доведення. Встановимо еквівалентність пункту (2) з уього наслідку та пункту (2) з наслідку 1. Справді, гомоморфізм g можна отримати як продовження відображення h відповідно до означення вільної топологічної групи у сенсі Граєва. З іншого боку, відображення h отримуємо як звуження $g|_X$. Аналогічно встановлюється еквівалентність пункту (3) з цього наслідку та пункту (3) з наслідку 1. $\square$

Наслідок 3. *Для довільного цілком регулярного простору X, для довільного $p \in X$ підпростір X є G -ретрактом в $FG(X,p)$.*

Доведення. Оскільки кожне неперервне відображення з топологічного простору X у топологічну групу H таке, що $f(p) = e_H$ неперервно продовжується на $FG(X,p)$, то відповідно до теореми 1 підпростір X є G -ретрактом в $FG(X,p)$. $\square$

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *ретральним*, якщо X є ретрактом деякої топологічної групи.

Твердження 1. *Наступні умови еквівалентні для непорожнього топологічного простору X:*

(1) *простір X є ретральним;*

(2) *простір X є ретрактом простору $FG(X,p)$ для довільного $p \in X$;*
(3) *простір X є ретрактом простору $FG(X,p)$ для деякого $p \in X$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) З наслідку 3 випливає, що підпростір X є G-ретрактом простору $FG(X,p)$. Доведемо, що з умови ретральності простору X і того факту, що X є G-ретрактом цілком регулярного простору Y випливає той факт, що X є ретрактом в Y.

Як було доведено у [9], з ретральності простору X випливає те, що X є ретрактом простору $F(X)$. Нехай $r\colon F(X) \to X$ — відповідна ретракція. Тоді існує гомоморфізм $h\colon F(Y) \to F(X)$ такий, що $h(x) = x$ для всіх $x \in X$. Композиція $r \circ h$ буде ретракцією з $F(Y)$ на X, а її звуження на Y буде ретракцією з Y на X.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1) За означенням. □

Твердження 2. *Нехай підпростір Y є G-ретрактом цілком регулярного простору X, $p \in Y$. Тоді підгрупа в $FG(X,p)$, породжена множиною $\mu_X(Y)$, є топологічно ізоморфною $FG(Y,p)$.*

Доведення. Нехай $f\colon Y \to H$ неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу H таке, що $f(p) = e_H$. Тоді існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $h|_Y = f$. Нехай $h^*\colon FG(X,p) \to H$ продовження відображення h до неперервного гомоморфізму. ПРиймемо $f^* = h^*|_{G(\mu_X(Y))}$. Для підгрупи $G(\mu_X(Y))$ виконуються всі умови вільної топологічної групи $FG(Y,p)$. За єдиністю вільної топологічної групи отримаємо, що $G(\mu_X(Y))$ є вільною топологічною групою в сенсі Граєва над простором Y. □

Теорема 2. *Нехай Y — підпростір цілком регулярного простору X, $a \in Y$. Тоді такі умови еквівалентні:*
(1) *Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного неперервного відображення $f\colon Y \to H$, з топологічного простору Y у топологічну групу H існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $f \cdot h|_Y = const$.*

Доведення. Якщо $f\colon Y \to H$ неперервне відображення, з топологічного простору Y у топологічну групу H, тоді відображення $f^{-1}\colon Y \to H$ означене як $f^{-1}(y) = f(y)^{-1}$ є неперервним. Тоді існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $h|_Y = f^{-1}$. Отже, $f \cdot h|_Y = f \cdot f^{-1}|_Y = e_H = const$. □

3. T_0-рефлексія та M-еквівалентність пар

Під *парою топологічних просторів* (X,Y) розумітимемо топологічний простір X і його підпростір Y. Пару топологічних просторів (X,X_1) назвемо *M-еквівалентною* парі топологічних просторів (Y,Y_1), якщо існує топологічний ізоморфізм $j\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $f(G(\eta_X(X_1))) = G(\eta_Y(Y_1))$. Для цілком регулярного простору X відображення η_X є вкладенням, тому для підпростору $Y \subseteq X$ будемо інколи писати Y замість $\eta_X(Y)$.

Твердження 3. *Нехай X, Y, X_1, Y_1 — цілком регулярні простори, $(X,A) \overset{M}{\sim} (Y,B)$ і нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G(A)) = G(B)$.*

Припустимо, що існують неперервні відображення $f\colon X \to X_1$, $g\colon Y \to Y_1$ і топологічний ізоморфізм $j\colon F(X_1) \to F(Y_1)$ такий, що $j \circ f^* = f^* \circ i$, де $f^*\colon F(X) \to F(X_1)$ і $g^*\colon F(Y) \to F(Y_1)$ — гомоморфізми, що продовжують відображення f і g. Тоді $(X_1, A_1) \overset{M}{\sim} (Y_1, B_1)$, де $A_1 = f(A)$ і $B_1 = g(B)$.

Доведення. Щоб довести лему, достатньо довестити, що $j(A_1) \subseteq G(B_1)$. Нехай $x \in A_1$, $v \in f^{-1}(x)$. Тоді $j(x) = g^* \circ i(v)$. Оскільки $v \in A$, то $i(v) \in G(B)$, а отже, $j(x) = g^* \circ i(v) \in G(B_1)$. Аналогічно доводиться, що $j^{-1}(B_1) \in G(A_1)$. □

Теорема 3. *Нехай підпростір A є G-ретрактом цілком регулярного простору X, підпростір B є G-ретрактом цілком регулярного простору Y, причому $FG(X/A) \simeq FG(Y/B)$. Тоді довільний топологічний ізоморфізм $i\colon F(A) \to F(B)$ може бути продовжений до топологічного ізоморфізму $j\colon F(X) \to F(Y)$.*

Доведення. В цій теоремі і надалі на множині X/A будемо розглядати R-факторну топологію [10]. Для топологічних груп G та H позначимо через $G * H$ вільний топологічний добуток груп G та H. Доведемо, що існує топологічний ізоморфізм $i_X\colon F(X) \to F(A) * FG(X/A)$ такий, що $i_X(G(A)) = F(A)$. Нехай $p \in A$, $h\colon A \to A_1$ — деякий гомеоморфізм, $h_1\colon A_1 \to A$ — відображення, обернене до h. Розглянемо простір $Z = (X, p) \vee (A_1, h(p))$. За наслідком 2 існує гомоморфна ретракція $r\colon FG(X, p) \to FG(A, p)$. За твердженням 2 підгрупа $G(A) \subseteq FG(X, p)$ є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $FG(A, p)$. Оскільки простір Z цілком регулярний, то відображення μ_Z є вкладенням, отже, будемо писати Z, A та A_1 замість $\mu_Z(Z)$, $\mu_Z(A)$ та $\mu_Z(A_1)$, відповідно. Оскільки підпростори A та A_1 є G-ретрактами в Z, то підгрупа $G(A) \subseteq FG(Z)$ топологічно ізоморфна $FG(A)$, підгрупа $G(A_1) \subseteq FG(Z)$ є топологічно ізоморфною $FG(A_1)$. Гомоморфне продовження $h^*\colon FG(A) \to FG(A_1)$ гомеоморфізму h є топологічним ізоморфізмом. Його можемо розглядати як гомоморфізм з $G(A) \subseteq FG(Z)$ у $G(A_1) \subseteq FG(Z)$. Означимо відображення $r_1\colon Z \to FG(A, p)$, прийнявши $r_1(x) = r(x)$, якщо $x \in X$ і $r_1(x) = h_1(x)$, якщо $x \in A_1$. Означимо відображення $r_2\colon Z \to FG(A_1, h(p))$, прийнявши $r_2(x) = h \circ r_1(X)$. Продовжимо відображення $r_1(x)$ та $r_2(x)$ до неперервних гомоморфізмів $R_1\colon FG(Z, p) \to FG(A, p)$, $R_2\colon FG(Z, p) \to FG(A_1, h(p))$. За побудовою, якщо $x \in A$, то $R_1(x) = x$, а якщо $x \in A_1$, то $R_2(x) = x$. Якщо ж $x \in Z$, то виконуються рівності $R_1 \circ R_2 = R_1$, $R_2 \circ R_1 = R_2$. Нехай $f_1\colon Z \to Z/A_1$, $f_2\colon Z \to Z/A$ —- R-факторні відображення, $f_1^*\colon FG(Z, p) \to FG(Z/A_1, f_1(p))$, $f_2^*\colon FG(Z, p) \to FG(Z/A, f_2(p))$ — їхні гомоморфні продовження. Відображення $i\colon Z \to F(Z)$ означене як $i(x) = R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1}$ є неперервним. Нехай $I\colon FG(Z, p) \to FG(Z, h(p))$ — гомоморфне продовження відображення i. Доведемо, що $I \circ I = 1_{FG(Z,p)}$, тобто гомоморфізм I є топологічним ізоморфізмом. Для цього достатньо довести, що $I \circ i(x) = x$ для всіх $x \in Z$. Справді,

$$I \circ i(x) = R_1(R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1})^{-1} \cdot (R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1}) \cdot R_2(R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1})^{-1} =$$

$$= R_1 \circ R_2(x) \cdot R_1(x)^{-1} \cdot R_1 \circ R_1(x) \cdot R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1} \cdot R_2 \circ R_2(x) \cdot R_2(x)^{-1} \cdot R_2 \circ R_1(x) = x.$$

За побудовою $I(A) \subseteq G(A_1)$, $I(A_1) \subseteq G(A)$.

Доведемо, що існує топологічний ізоморфізм

$$u\colon FG(Z/A_1, f_1(p)) \to FG(Z/A, f_2(p)),$$

який робить діаграму

$$\begin{tikzcd} FG(Z,p) \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "f_1^*"'] & & FG(Z,p) \arrow[d, "f_2^*"] \\ FG(Z/A_1, f_1(p)) \arrow[rr, "u"'] & & FG(Z/A, f_2(p)) \end{tikzcd}$$

комутативною.

Нехай $x \in Z/A_1$, $y \in f_1^{-1}(x)$. Приймемо $u_1(x) = f_2^* \circ i(x)$. Доведемо, що відображення u_1 означене коректно. Справді, нехай $y_1, y_2 \in Z$ такі, що $f(y_1) = f(y_2)$ і $y_1 \neq y_2$. Тоді $y_1, y_2 \in A_1$, а тому $i(y_1), i(y_2) \in A$ і $f_2(y_1) = f_2(y_2)$, $u_1(y_1) = u_1(y_2)$. Продовжимо відображення u_1 до гомоморфізму $u\colon FG(Z/A_1, f_1(p)) \to FG(Z/A, f_2(p))$. З того, що відображення f_1 та f_2 є R-факторними, випливає, що гомоморфізми f_1^* та f_2^* відкриті відображення [10] (результат Окунєва і його доведення, доведені для тихоновських просторів, без жодних модифікацій переносяться на випадок цілком регулярних просторів), а тому ізоморфізм u є топологічним. Оскільки $I(A) \subseteq G(A_1)$, то $u(f_1(A)) \subseteq G(f_2(A)))$. Отже, існує топологічний ізоморфізм $u\colon FG(X) \to FG(X/A \vee A)$, такий, що $u(G(A)) = G(A)$. З означення вільної групи та вільного добутку топологічних груп випливає, що для довільних топологічних просторів X та Y існує топологічний ізоморфізм $w\colon FG(X \vee Y) \to FG(X) * FG(Y)$ такий, що $w(G(X)) = FG(X)$. Зокрема, існує топологічний ізоморфізм $w_1\colon FG(X/A \vee A) \to FG(X/A) * FG(A)$ такий, що $w_1(G(A)) = FG(A)$. Тоді композиція $u_1 = w_1 \circ w\colon FG(X) \to FG(X/A) * FG(A)$ має ту властивість, що $u_1(G(A)) = FG(A)$. Нехай $w_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — тотожний автоморфізм дискретної групи цілих чисел $\mathbb{Z}$. Розглянемо вільний добуток ізоморфізмів u_1 та w_2: $w_3 = u_1 * w_2\colon FG(X) * \mathbb{Z} \to FG(X/A) * FG(A) * \mathbb{Z}$. Оскільки $F(X) \simeq FG(X) * \mathbb{Z}$, то ізоморфізм w_3 можна розглядати як ізоморфізм $w_3\colon F(X) \simeq FG(X/A) * F(A)$. За побудовою $w_3(G(A)) = G(A)$. Аналогічно доводиться, що існує топологічний ізоморфізм $i_Y\colon F(Y) \to F(B) * FG(Y/B)$ такий, що $i_Y(G(B)) = F(B)$. Нехай тепер $s_1\colon F(A) \to F(B)$, $s_2\colon FG(X/A) \to FG(Y/B)$ — топологічні ізоморфізми, тоді гомоморфізм $s_1 * s_2\colon F(A) * FG(X/A) \to F(B) * FG(Y/B)$ є топологічним ізоморфізмом. Гомоморфізм $j = i_Y^{-1} \circ (s_1 * s_2) \circ i_X$ є композицією топологічних ізоморфізмів, а отже, є топологічним ізоморфізмом. Іншими словами, ізоморфізм j отримаємо, як композицію послідовності ізоморфізмів

$$F(X) \xrightarrow{i_X} F(A) * FG(X/A) \xrightarrow{s_1 * s_2} F(Y) * FG(Y/B) \xrightarrow{i_Y^{-1}} F(Y).$$

Крім того,

$$j(G(A)) = i_Y^{-1} \circ (s_1 * s_2) \circ i_X(G(A)) = i_Y^{-1} \circ (s_1 * s_2)(F(A)) = i_Y^{-1}(F(B)) = G(B).$$

□

Теорема 4 доводиться аналогічно до теореми 3, якщо врахувати, що для вільних абелевих груп умови $A(X) \simeq A(Y)$ і $AG(X) \simeq AG(Y)$ збігаються [4].

Теорема 4. *Нехай підпростір A є G_A-ретрактом цілком регулярного простору X, підпростір B є G_A-ретрактом цілком регулярного простору Y, причому $(X/A) \overset{A}{\sim} (Y/B)$. Тоді довільний топологічний ізоморфізм $i\colon A(A) \to A(B)$ може бути продовжений до топологічного ізоморфізму $j\colon A(X) \to A(Y)$.*

Теорема 5. *Для просторів X і Y такі умови еквівалентні:*

(1) *для довільних точок $a \in X$, $b \in Y$ існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(a) = b$;*
(2) *вільні топологічні групи в сенсі Граєва просторів $FG(X, a)$ та $FG(Y, b)$ топологічно ізоморфні.*

Доведення. Доведемо імплікацію (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(a) = b$. Тотожне відображення $X \to X$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_x\colon F(X) \to FG(X, a)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору X з одиницею в точці a. Так само, тотожне відображення $f_y\colon F(Y) \to FG(Y, b)$ продовжується до неперервного гомоморфізму у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору Y з одиницею в точці b. Неперервне відображення $s_x\colon X \to FG(Y, b)$, означене як $s_x = f_y \circ i|_X$, має таку властивість, що $s_x(a) = b$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $i_x\colon FG(X, a) \to FG(Y, b)$. Так само неперервне відображення $s_y\colon Y \to FG(X, b)$, означене як $s_y = f_x \circ i_Y^{-1}$, має таку властивість, що $s_y(b) = a$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $i_y\colon FG(Y, b) \to FG(X, a)$. Маємо, що

$$j_y \circ j_x = f_x \circ i \circ i^{-1}(x) = x$$

для всіх $x \in X$. Аналогічно

$$j_x \circ j_y = f_y \circ i^{-1} \circ i(y) = y$$

для всіх $y \in Y$. Отже, j — топологічний ізоморфізм вільних граєвських груп $FG(X, a)$ і $FG(Y, b)$.

Доведення імплікації (2) $\Rightarrow$ (1) можна отримати, застосувавши теорему 3 для підпросторів $A = \{a\} \subseteq X$ та $B = \{b\} \subseteq Y$. $\square$

Топологічні простори простори X та Y, які задовольняють умови теореми 5 будемо називати M^*-еквівалентними.

Твердження 4. *Нехай X_1, X_2 — цілком регулярні простори, $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ — їхні G-ретракти. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *пари (X_1, K_1) і (X_2, K_2) є M-еквівалентними;*
(2) *$K_1 \overset{M}{\sim} K_2$ і $FG(X_1/K_1) \simeq FG(X_2/K_2)$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Враховуючи твердження 2, матимемо

$$F(K_1) \simeq G(K_1) \simeq G(K_2) \simeq F(K_2).$$

Якщо $(X_1/K_1) \overset{M}{\sim} (X_2/K_2)$, то R-факторні відображення $p_1\colon X_1 \to X_1/K_1$, $p_2\colon X_2 \to X_2/K_2$, є M-еквівалентними, а тому за твердженням 3 пари $((X_1/K_1), p_1(K_1))$ та $((X_2/K_2), p_2(K_2))$ є M-еквівалентними, звідки за теоремою 5 отримаємо, що $FG(X_1/K_1) \simeq FG(X_2/K_2)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Випливає з теореми 3. $\square$

Аналогічно доводиться таке твердження.

Твердження 5. *Нехай X_1, X_2 — цілком регулярні простори, $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ — їхні G-ретракти. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *пари* (X_1, K_1) *і* (X_2, K_2) *є* A*-еквівалентними;*
(2) $K_1 \overset{A}{\sim} K_2$ *і* $(X_1/K_1) \overset{A}{\sim} (X_2/K_2)$.

Нехай X — топологічний простір. Означимо на X відношення еквівалентності, прийнявши, $a \sim b$, якщо a і b не відокремлюються відкритими в X множинами. Фактор-простір $X/\sim$ позначимо через T_0X. Через $T_X\colon X \to T_0X$ позначимо відповідне фактор-відображення. Відображення T_X має праве обернене, а простір T_0X вкладається в X як ретракт. Вибравши в кожному класі еквівалентності по одній точці, отримаємо підпростір Y в X, який є гомеоморфним T_0X. Фактор-простір X/Y антидискретний, його потужність не залежить від вибраних точок. Цю потужність позначатимемо $|X/T_0X|$. Для цілком регулярного простору X продовження $T_X^*\colon F(X) \to F(T_0X)$ відображення T_X до гомоморфізму вільних топологічних груп є відкритим гомоморфізмом, а його ядро збігається з нормальною підгрупою, яка є сукупністю всіх точок, котрі не відокремлюються від одиниці групи $F(X)$ відкритими множинами.

Твердження 6. *Якщо* $i\colon F(T_0X) \to F(T_0Y)$ *— ізоморфізм вільних топологічних груп,* $|X/T_0X| = |Y/T_0Y|$*. Тоді існує топологічний ізоморфізм* $i\colon F(X) \to F(Y)$ *такий, що* $j|_{F(T_0(X)} = i$.

Доведення. Випливає з теореми 3, якщо врахувати, що простори X/T_0X та Y/T_0Y є антидискретними просторами однакової потужності, тобто гомеоморфними, а отже, M^*-еквівалентними. □

Твердження 7 доведене для тихоновських просторів у [2] легко переноситься на випадок цілком регулярних просторів.

Твердження 7. *З того, що* $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ *випливає* $(X, A) \overset{A}{\sim} (Y, B)$.

4. Простори з топологією розбиття та еквівалентність наборів

Нагадаємо, що топологічний простір X має *топологію розбиття*, якщо X є прямою (дискретною) сумою своїх антидискретних просторів. На підставі того, що для просторів з топологією розбиття та пар просторів з топологіями розбиття відношення M-еквівалентності та A-еквівалентності збігаються, то будемо скорочено позначати еквівалентні простори $X \overset{f}{\sim} Y$, а еквівалентні пари $(X, A) \overset{f}{\sim} (Y, B)$.

Теорема 6. *Нехай* X *та* Y *— простори з топологією розбиття,* $A \subseteq X$*,* $B \subseteq Y$*. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$*;*
(2) $(X, A) \overset{A}{\sim} (Y, B)$*;*
(3) $(X/A) \overset{f}{\sim} (Y/B)$ *і* $A \overset{f}{\sim} B$.

Доведення. Випливає з тверджень 4 і 5 та ізоморфної класифікації топологічних просторів з топологією розбиття, яка визначена у [5], якщо врахувати, що кожен підпростір топологічного простору з топологією розбиття є його ретрактом. □

Наслідок 4. *Нехай X та Y — топологічні простори з топологіями розбиття, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ — їхні скінченні підпростори такі, що простори X/X_1 та Y/Y_1 є скінченними. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$;
(2) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $X_1 \overset{f}{\sim} Y_1$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Оскільки $X \overset{f}{\sim} X_1 \vee (X/X_1)$, $Y \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1)$, то

$$X_1 \vee (X/X_1) \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1).$$

За наслідком 7 з [5] отримаємо, що $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$. Звідси за теоремою 6 випливає, що $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$. □

Наслідок 5. *Нехай X та Y — топологічні простори з топологіями розбиття, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ — їхні підпростори такі, що простори X/X_1 і Y/Y_1 є скінченними. Тоді макі умови еквівалентні:*

(1) $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$;
(2) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Оскільки $X \overset{f}{\sim} X_1 \vee (X/X_1)$, $Y \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1)$, то

$$X_1 \vee (X/X_1) \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1).$$

За наслідком 7 з [5] отримаємо, що $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$. Звідси за теоремою 6 випливає, що $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$. □

З наслідків 4 і 5 випливає наслідок 6.

Наслідок 6. *Нехай X та Y — скінченні топологічні простори з топологіями розбиття, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$;
(2) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$;
(3) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $X_1 \overset{f}{\sim} Y_1$;
(4) $X_1 \overset{f}{\sim} Y_1$ *і* $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$.

5. Про деякі функтори та еквівалентність наборів

Твердження 8. *Нехай $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ — пари цілком регулярних просторів, причому $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$. Тоді $(T_0X, T_0A) \overset{M}{\sim} (T_0Y, T_0B)$.*

Доведення. Для M-еквівалентних просторів фактор-відображення $f_X \colon X \to T_0X$ і $f_Y \colon Y \to T_0Y$ M-еквівалентні, а тому залишається застосувати твердження 3. □

Під відносною топологічною властивістю будемо розуміти властивість, яка характеризує розміщення підпростору Y топологічного простору X у цьому просторі.

З твердження 8 випливає таке твердження.

Твердження 9. *Нехай* P *— відносна топологічна властивість така, що підпростір* A *цілком регулярного простору* X *володіє властивістю* P *в* X *тоді і тільки тоді, коли підпростір* T_0A *володіє властивістю* P *в* T_0X*. Якщо властивість* P *зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі тихоновських просторів, то* P *зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів.*

Твердження 10. *Нехай* X *— цілком регулярний простір. Підпростір* A *є всюди щільним в* X *тоді і тільки тоді, коли підпростір* T_0A *є всюди щільним у* T_0X*.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай підпростір A є всюди щільним в X. За неперервністю факторного відображення $f\colon X \to T_0X$ підпростір $T_0A = f(A)$ є всюди щільним в T_0X.

Достатність. Нехай підпростір T_0A є всюди щільним у T_0X. За наслідком 2.4.10 з [6] факторне відображення $f\colon X \to T_0X$ буде замкненим. Для кожного замкненого відображення $f\colon X \to Y$ і довільного $A \subseteq X$ виконується рівність $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Отже, $f(\overline{A}) = T_0X$. На підставі того, що всі класи еквівалентності факторного відображення $f\colon X \to T_0X$ складаються лише з точок, які не відокремлюються відкритими та замкненими множинами, то ця рівність можлива лише у випадку, коли $\overline{A} = X$. □

Як доведено у [2], властивість бути всюди щільним підпростором зберігається відношенням M-еквівалентності пар у класі тихоновських просторів.

Наслідок 7. *Властивість бути всюди щільним простором зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів.*

Твердження 11. *Нехай* X *— цілком регулярний простір. Підпростір* A *функціонально обмежений в* X *тоді і тільки тоді, коли підпростір* T_0A *є функціонально обмеженим у* T_0X*.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай $q\colon X \to T_0X$ — факторне відображення. Оскільки множина дійсних чисел з топологією, породженою евклідовою метрикою є T_0-простором, то для довільної неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ існує неперервне відображення $f_1\colon T_0X \to \mathbb{R}$ таке, що $f = f_1 \circ q$. Нехай A — функціонально обмежена в X. Оскільки множина $T_0(A) = q(A)$ є функціонально обмеженою в T_0X, то множина $f(a) = f_1(T_0A)$ є обмеженою.

Достатність. Нехай множина A функціонально обмежена в X. Тоді для довільної неперервної дійснозначної функції $f_1\colon T_0X \to \mathbb{R}$ множина $f_1(T_0A) = f(A)$ є обмеженою. □

Наслідок 8. *Властивість бути функціонально обмеженим підпростором зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів.*

Доведення. У [3] доведено, що властивість бути функціонально обмеженим простором зберігається відношенням M-еквівалентності пар у класі тихоновських просторів, тому з тверджень 8 і 11 випливає, що властивість бути функціонально обмеженим простором зберігається відношенням M-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів. □

Оскільки для довільного топологічного простору X вільна топологічна група $F(X)$ природно ізоморфна вільній групі $F(\eta_X(X))$ цілком регулярного простору $\eta_X(X)$, то результати цієї праці дають змогу звести класифікацію пар топологічних просторів (X, Y) до класифікації пар $(\eta_X(X), \eta_X(Y))$ цілком регулярних просторів, а потім і пар $(T_0(\eta_X(X)), T_0(\eta_X(Y)))$ тихоновських просторів.

Автор висловлює щиру подяку рецензенту за цінні поради.

Список використаної літератури

1. О. Г. Окунев, *M-эквивалентность произведений*, Тр. Моск. Мат. общ. **56** (1995), 192–205.
2. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар*, Прикладні проблеми математики і механіки **2** (2004), 74–79.
3. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар і відображень*, Мат. методи фіз.-мех. поля **49** (2006), no. 2, 21–26.
4. Н. М. Пирч, *Конструкції, що зберігають M-еквівалентність*, Вісник НУ "Львівська Політехніка", фіз.-мат. науки **625** (2008), 48–53.
5. Н. М. Пирч, *Про ізоморфну класифікацію вільних топологічних групп нетихоновських просторів*, Прикладні проблеми математики і механіки **17** (2019), 27–37.
6. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Москва, Мир, 1986, 751 с.
7. A. V. Arhangel'skii and M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781 p.
8. T. H. Fay, E. T. Ordman, B. V. Smith Thomas, *The free topological groups over rationals*, General Topology Appl. **10** (1979), no. 1, 33–47. DOI: 10.1016/0016-660X(79)90027-8
9. P. M. Gartside, E. A. Reznichenko, and O. V. Sipacheva, *Mal'tsev and retral spaces*, Topology Appl. **80** (1997), no. 1–2, 115–129. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00166-6
10. O. G. Okunev, *A method for constructing examples of M-equivalent spaces*, Topology Appl. **36** (1990), no. 2, 157–171. DOI: 10.1016/0166-8641(90)90006-N
11. B. V. Smith Thomas, *The free topological groups*, General Topology Appl. **4** (1974), no. 1, 51–72. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90005-1

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 17.11.2021

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE PAIRS OF NONTYCHONOFF SPACES

Nazar PYRCH

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020, Lviv, Ukraine
e-mail: pnazar@ukr.net

In the paper we proposed the method for reducing the problem of isomorphic classification free topological groups on completely regular spaces and subgroups generated by their subspaces to same problem on Tychonoff spaces

Key words: free topological group, M-equivalence, generalized retracts, hereditary topological property.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 69–75
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 69–75
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.069-075

УДК 514.7

INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS OF A SYMMETRIC RIEMANNIAN SPACE OF THE FIRST CLASS

Illia BILOKOBYLSKYI, Alina KRUTOHOLOVA, Serhii POKAS

Odessa I. I. Mechnikov National University,
Dvoryans'ka Str, 2, 65000, Odessa, Ukraine
e-mails: indalamar4200@gmail.com, v_pokas@onu.edu.ua

The study of infinitesimal transformations in Riemannian spaces is of interest both theoretically and as an application. If a certain field is specified in the space V_n with the metric ds^2, which admits an r-parametric group of motions G_r, then this field has r conservation laws. The distribution of relativistic gas according to the Maxwell-Boltzmann law is characterized by a vector $\xi^i(x)$, which is a Killing vector (if the gas consists of particles of nonzero rest mass) or an infinitely small conformal transformation vector (if the gas consists of particles of zero rest mass). ([5], [6]) In this article, infinitesimal motions in symmetric Riemannian spaces of the first class V_n were studied. For $n = 4$ the basis of the Lie group G_8 of examined transformations is explicitly found and the structure of this group is given.

Key words: second approximation space, infinitesimal transformations, Lie group.

1. Preliminary information

P. A. Shirokov ([2, 7]) found all irreducible symmetric Riemannian spaces $V_n(x; g(x))$ of the first class. The metric tensor $g_{ij}(x)$ of such spaces in a Riemannian coordinate system with origin at a point $M_0(x^h = 0)$ has the following form:

$$g_{ij}(x) = \underset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{3}\left(\underset{\circ}{h}_{i\alpha}\underset{\circ}{h}_{j\beta} - \underset{\circ}{h}_{ij}\underset{\circ}{h}_{\alpha\beta}\right)x^\alpha x^\beta, \tag{1}$$

2020 Mathematics Subject Classification: 53C25 where

$$\left(\underset{\circ}{g}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\left(\underset{\circ}{h}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & e_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & e_m & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

E_m is the unit matrix, $(e_i = \pm 1,\ i = 1, 2, ..., m)$.

In (2) and (3), $\underset{\circ}{g}_{ij}$ and $\underset{\circ}{h}_{ij}$, in the terminology of P. A. Shirokov, are values of the components of the first and second fundamental tensors at the beginning of the Riemannian coordinate system.

For an arbitrary Riemannian space $V_n(x; g(x))$ S. M. Pokas ([3, 4]) introduced the concept of a second approximation space $\widetilde{V}_n^2(y; \widetilde{g}(y))$:

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{3} \underset{\circ}{R}_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta, \tag{4}$$

where $\underset{\circ}{g}_{ij} = g_{ij}(M_0), \underset{\circ}{R}_{i\alpha\beta j} = R_{i\alpha\beta j}(M_0)$, and $M_0 \in V_n$ is an arbitrary point of the initial space V_n.

Comparison of (1) and (4) shows that the symmetric Riemannian space of the first class V_n is isometric to the space of the second approximation $\widetilde{V}_n^2$. Therefore, the Lie group of the infinitesimal transformations $\widetilde{G}_r$ of the space $\widetilde{V}_n^2$ is isomorphic to the Lie group of the infinitesimal transformations G_r of the symmetric Riemannian space of the first class V_n.

In this article, we will use the results of the study of infinitesimal motions in Riemannian space of the second approximation $\widetilde{V}_n^2$. The following statement was proved ([3]).

Proposition 1. *Forexistence of an analytic Killing vector $\widetilde{\xi}^h(y)$ in the Riemannian space of the second approximation $\widetilde{V}_n^2(y; \widetilde{g}(y))$, in the following form:*

$$\widetilde{\xi}^h(y) = a^h_{\cdot} + a^h_{\cdot l}\, y^l + a^h_{\cdot l_1 l_2}\, y^{l_1} y^{l_2} + \ldots + a^h_{\cdot l_1 \ldots l_p}\, y^{l_1} \cdot \ldots \cdot y^{l_p} + \ldots \tag{5}$$

where $\underset{p}{a}^h = a^h_{\cdot l_1 \ldots l_p} y^{l_1} \ldots y^{l_p}$, $a^h_{\cdot}, a^h_{\cdot l_1}, a^h_{\cdot l_1 l_2}, \ldots, a^h_{\cdot l_1 \ldots l_k}$ *are some constants, the following conditions are necessary and sufficient:*

$$\underset{2p}{a}^h_{\cdot} = \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^\alpha t^{(p)h}_{\alpha} \tag{6}$$

$$\underset{2p+1}{a}{}^{h}_{\cdot} = 0 \tag{7}$$

$$a^{\alpha}_{\cdot(i}\, \underset{\circ}{g}_{j)\alpha} = 0 \tag{8}$$

$$a^{\alpha}_{\cdot(i}\, \underset{\circ}{R}_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a^{\alpha}{}_{\cdot(l_1}\, \underset{\circ}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{9}$$

$$\underset{2p-1}{a}{}^{\alpha}_{\cdot(i} t^{h}_{j)\alpha} + \underset{2p}{a}{}^{\alpha}_{\cdot} \mu_{\alpha ij} = 0 \tag{10}$$

$(p = 1, 2, \ldots)$.

In the conditions (6)–(10), the following notation is introduced:

$$t^h_k = \frac{1}{3}\, \underset{\circ}{R}{}^{h}_{\cdot l_1 l_2 k}\, y^{l_1} y^{l_2}, \quad \mu_{kij} = \frac{1}{3}\, \underset{\circ}{R}_{k(ij)l}\, y^l,$$

$$t^{(p)h}_k = t^h_{\alpha_1} t^{\alpha_1}_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot t^{\alpha_p}_k, \quad (p = 2, 3, \ldots)$$

$$\underset{2p+1}{a}{}^{h}_{\cdot i} = \frac{1}{2p+2} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\underset{2p+2}{a}{}^{h}_{\cdot} \right)$$

Considering the fact that the matrix of the tensor $\underset{\circ}{h}_{ij}$ in (3) is nilpotent, the relations (5)–(10) take the following form:

$$\xi^p(x) = a^p_{\cdot} + a^p_{\cdot l}\, x^l + \frac{1}{3} a^{\alpha}_{\cdot} \left(\underset{\circ}{h}_{l_1\alpha}\, \underset{\circ}{h}{}^{p}_{l_2} - \underset{\circ}{h}_{l_1 l_2}\, \underset{\circ}{h}{}^{p}_{\alpha} \right) x^{l_1} x^{l_2} \tag{11}$$

$$a^{\alpha}_{\cdot}{}_{(i}\, \underset{\circ}{g}_{j)\alpha} = 0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} & a^{\alpha}_{\cdot\, i} \left(\underset{\circ}{h}_{jl_1}\, \underset{\circ}{h}_{l_2\alpha} + \underset{\circ}{h}_{jl_2}\, \underset{\circ}{h}_{l_1\alpha} - 2\, \underset{\circ}{h}_{l_1 l_2}\, \underset{\circ}{h}_{j\alpha} \right) + \\ & + a^{\alpha}_{\cdot\, j} \left(\underset{\circ}{h}_{il_1}\, \underset{\circ}{h}_{l_2\alpha} + \underset{\circ}{h}_{il_2}\, \underset{\circ}{h}_{l_1\alpha} - 2\, \underset{\circ}{h}_{l_1 l_2}\, \underset{\circ}{h}_{i\alpha} \right) + \\ & + a^{\alpha}_{\cdot\, l_1} \left(\underset{\circ}{h}_{il_2}\, \underset{\circ}{h}_{j\alpha} + \underset{\circ}{h}_{jl_2}\, \underset{\circ}{h}_{i\alpha} - -2\, \underset{\circ}{h}_{ij}\, \underset{\circ}{h}_{l_2\alpha} \right) + \\ & + a^{\alpha}_{\cdot\, l_2} \left(\underset{\circ}{h}_{il_1}\, \underset{\circ}{h}_{j\alpha} + \underset{\circ}{h}_{jl_1}\, \underset{\circ}{h}_{i\alpha} - 2\, \underset{\circ}{h}_{ij}\, \underset{\circ}{h}_{l_1\alpha} \right) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Thus the statement is proved.

Proposition 2. *An analytic Killing vector exists in a symmetric Riemannian space of the first class V_n if and only if its components have the form (11), where $a^h_{\cdot}$ are arbitrary constants, and $a^h_{\cdot l}$ satisfy the algebraic equations (12) and (13).*

Remark 1. From (11)–(13) we arrive at the well-known result ([1]) that the maximal order r of Lie groups of motions in Riemannian space V_n satisfies the inequality:

$$r \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Infinitesimal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class V_4

Let us consider the case $n = 4$, then the matrices $\left\| \underset{\circ}{g}_{ij} \right\|$ and $\left\| \underset{\circ}{h}_{ij} \right\|$ have the form:

$$\left\| \underset{\circ}{g}_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$\left\| \underset{\circ}{h}_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(e_i = \pm 1,\ i = 1, 2)$.

Giving values from 1 to 4 to the indices i and j in the equations (12),we obtain conditions for the constants $a^i_{\cdot j}$:

$$\begin{aligned} & a^3_{\cdot 1} = a^4_{\cdot 2} = a^1_{\cdot 3} = a^2_{\cdot 4} = 0, \\ & a^4_{\cdot 1} = -a^3_{\cdot 2}, \\ & a^3_{\cdot 3} = -a^1_{\cdot 1}, \\ & a^3_{\cdot 4} = -a^2_{\cdot 1}, \\ & a^4_{\cdot 3} = -a^1_{\cdot 2}, \\ & a^4_{\cdot 4} = -a^2_{\cdot 2}, \\ & a^2_{\cdot 3} = -a^1_{\cdot 4} \end{aligned}$$

Exploring equations (13), we get the final form of the matrix $\|a^i_{\cdot j}\|$:

$$\|a^i_{\cdot j}\| = \left\| \begin{matrix} a^1_{\cdot 1} & a^1_{\cdot 2} & 0 & 0 \\ a^2_{\cdot 1} & -a^1_{\cdot 1} & 0 & 0 \\ 0 & a^3_{\cdot 2} & -a^1_{\cdot 1} & -a^2_{\cdot 1} \\ -a^3_{\cdot 2} & 0 & -a^1_{\cdot 2} & a^1_{\cdot 1} \end{matrix} \right\|.$$

Thus, there are exactly 4 independent arbitrary constants among $a^i_{\cdot j} : a^1_{\cdot 1}, a^1_{\cdot 2}, a^2_{\cdot 1}, a^3_{\cdot 2}$. Considering that among $a^h_{\cdot}$ there are also 4 independent constants (a^1, a^2, a^3, a^4), the following statement is true:

Proposition 3. *In the symmetric Riemannian space V_4 of the first class there exist at least 8 linearly independent Killing vectors with constant coefficients*

The vectors $\xi^h_{|p}(x)$, where $p = 1, \dots, 8$, included in the basis of the group G_r, have the following form:

$$
\begin{aligned}
&\xi^h_{1|}(x) = \delta^h_1 - \frac{1}{3}\epsilon_1\epsilon_2\left[(x^2)^2\delta^h_3 - x^1x^2\delta^h_4\right],\\
&\xi^h_{2|}(x) = \delta^h_2 - \frac{1}{3}\epsilon_1\epsilon_2\left[x^1x^2\delta^h_3 - (x^1)^2\delta^h_4\right],\\
&\xi^h_{3|}(x) = \delta^h_3,\\
&\xi^h_{4|}(x) = \delta^h_4,\\
&\xi^h_{5|}(x) = x^1\delta^h_1 - x^2\delta^h_2 - x^3\delta^3_h + x^4\delta^h_4,\\
&\xi^h_{6|}(x) = x^2\delta^h_1 - x^3\delta^h_4,\\
&\xi^h_{7|}(x) = x^1\delta^h_2 - x^4\delta^h_3,\\
&\xi^h_{8|}(x) = x^2\delta^h_3 - x^1\delta^h_4.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Let us calculate the commutators of two operators ([8, 9]) whose components are the vectors $\xi^h_{p|}(x)$:

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = -\epsilon_1\epsilon_2\ X_8,\\
&[X_1, X_3] = 0,\\
&[X_2, X_3] = 0,\\
&[X_1, X_4] = 0,\\
&[X_2, X_4] = 0,\\
&[X_3, X_4] = 0,\\
&[X_1, X_5] = -X_1,\\
&[X_2, X_5] = X_2,\\
&[X_3, X_5] = X_5,\\
&[X_4, X_5] = -X_4,\\
&[X_1, X_6] = 0,\\
&[X_2, X_6] = -X_1,\\
&[X_3, X_6] = X_4,\\
&[X_4, X_6] = 0,\\
&[X_5, X_6] = 2X_6,\\
&[X_1, X_7] = -X_2,\\
&[X_2, X_7] = 0,\\
&[X_3, X_7] = 0,\\
&[X_4, X_7] = X_3,\\
&[X_5, X_7] = -2X_7,\\
&[X_6, X_7] = X_5,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$\begin{aligned}
[X_1, X_8] &= X_4, \\
[X_2, X_8] &= -X_3, \\
[X_3, X_8] &= 0, \\
[X_4, X_8] &= 0, \\
[X_5, X_8] &= -2X_8, \\
[X_6, X_8] &= 0, \\
[X_7, X_8] &= 0.
\end{aligned}$$

Since commutators of any two operators, whose components are vectors $\xi^h_{p|}(x)$, are linearly expressed through the same operators, we come to the theorem:

Proposition 4. *The symmetric Riemannian space of the first class V_4 admits a Lie group of motions G_8 with basis (15) and structure (16).*

References

1. I. P. Egorov, *Motions in spaces of affine connection*, Kazan Univ. Press, Kazan, 1965 (in Russian).
2. A. Z. Petrov, *New nethods in the general theory of relativity*, Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
3. S. M. Pokas, *Motions in Second Approximation spaces*, The VII All-union Conference on Modern Problems of Geometry. Abstracts. Minsk, 1979, P. 154 (in Russian).
4. S. M. Pokas and A. V. Krutoholova, *The geometry of Riemannian space of the second approximation*, Proc. Int. Geom. Cent. **8** (2015), no. 3–4, 53–59 (in Russian). DOI: 10.15673/tmgc.v8i3-4.1607
5. N. A. Chernikov, *Flux vector and mass tensor of a relativistic ideal gas*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962), no. 2, 314–317 (in Russian); **English version in:** Sov. Phys., Dokl. **7** (1962), 414–416.
6. N. A. Chernikov, *Relativistic Maxwell-Boltzmann distribution and the integral form of the conservation laws*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962), no. 3, 544–547 (in Russian); **English version in:** Sov. Phys., Dokl. **7** (1962), 428–430.
7. P. A. Shirokov, *Selected geometry works*, Kazan, 1966 (in Russian).
8. Л. П. Эйзенхарт, *Непрерывные группы преобразований*, Гос. изд. иностргнной литературы, Москва, 1947; **English version:** L. P. Eisenhart, *Continuous groups of transformations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1933.
9. Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, Гос. изд. иностргнной литературы, Москва, 1948; **English version:** L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1926.

Стаття: надійшла до редколегії 07.11.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 17.11.2021

НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИМЕТРИЧНОГО РІМАНОВОГО ПРОСТОРУ ПЕРШОГО КЛАСУ

Ілля БІЛОКОБИЛЬСЬКИЙ, Аліна КРУТОГОЛОВА, Сергій ПОКАСЬ

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, 65000, Одеса
e-mails: indalamar4200@gmail.com, v_pokas@onu.edu.ua

Дослідження нескінченно малих перетворень у ріманових просторах становлять теоретичний і практичний інтерес. Якщо вказано певне поле у просторі V_n з метрикою ds^2 допускає r-параметричну групу рухів G_r, то це поле має r законів збереження. Поширення релятивістського газу за законом Максвелла-Больцмана характеризується вектором ξ і (x), що є вектором Кіллінга (якщо газ складається з частинок з ненульовою масою спокою) або нескінченно малим вектором конформного перетворення (якщо газ складається з частинок з нульовою масою спокою) ([5], [6]). Досліджено нескінченно малі рухи в симетричних ріманових просторах першого класу V_n. Для $n = 4$ в явному вигляді знайдено базис групи Лі G_8 розглянутих перетворень і наведена структура цієї групи.

Ключові слова: простір другого наближення, нескінченно малі перетворення, група Лі.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 76–83
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 76–83
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.076-083

УДК 515.12

ON SPACES OF $*$-MEASURES ON ULTRAMETRIC SPACES

Khrystyna SUKHORUKOVA, Mykhailo ZARICHNYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: zarichnyi@yahoo.com

The notion of $*$-measure on a compact Hausdorff space is introduced and investigated in a previous publication of the first named author. In the present note we consider the set of all $*$-measures of compact support on an ultrametric space. An ultrametrization of this set is provided, which determines a functor in the category of ultrametric spaces and non-expanding maps. We prove that this functor is locally non-expanding and preserves the class of complete ultrametric spaces.

Key words: ultrametric space, non-expanding map, $*$-measure.

1. Introduction

A metric d on a set X is called an ultrametric if it satisfies the strong triangle inequality:

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\},\ \ x,y,z \in X.$$

The ultrametric spaces were first introduced by Hausdorff in 1934. They find numerous applications not only in mathematics but also in another disciplines, e.g. biology, physics [2,14], computer science [6], logic programming and artificial intelligence [9], linguistics [10].

In [15] an ultrametric is defined on the set of probability measures of compact support on an ultrametric space. It is shown that this construction determines a locally nonexpansive functor in the category of ultrametric spaces and nonexpanding maps, and this functor “makes a useful building block for the definition of metric domains for probabilistic program constructs.”

Some categorical properties of this construction are established in [3]. In particular, it is proved therein that the probability measure functor determines a monad on the category of ultrametric spaces and nonexpanding maps.

2020 Mathematics Subject Classification: 28A33, 46E27

The notion of $*$-measure is introduced by the first-named author [13]. The aim of the present note is to define an ultrametric on the set of of $*$-measures of compact support defined on ultrametric spaces. We prove that the obtained construction determines a functor on the category of ultrametric spaces and non-expanding maps. Also, we show that this construction preserves completeness of ultrametric spaces.

2. Results

By $\mathbb{I}$ we denote the unit segment $[0,1]$. Recall that a triangular norm (a t-norm) is a continuous function $(a,b)\mapsto a*b\colon \mathbb{I}\times\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ satisfying the conditions

(1) $*$ is associative;
(2) $*$ is commutative;
(3) $*$ is monotone, i.e. $a\le a'$ and $b\le b'$ both imply $a*b\le a'*b'$ for all $a,a',b,b'\in\mathbb{I}$;
(4) 1 is a unit.

See. e.g., [4] for the details. The following are examples of t-norms: $\cdot$ (multiplication), min, $(a,b)\mapsto \max\{a+b-1,0\}$ (Łukasiewicz t-norm).

Let us recall the notion of $*$-measure (see [13] for details). Given topological spaces X,Y, by $C(X,Y)$ we denote the set of continuous functions from X to Y. By $\vee$ we denote the operation of maximum of numbers as well as pointwise maximum of real-valued functions.

Definition 1. Let $*$ be a t-norm. A functional $\mu\colon C(X,\mathbb{I})\to\mathbb{I}$ is called a $*$-*measure* on a compact Hausdorff space X if the following is satisfied:

(1) $\mu(c_X)=c$, where c_X denotes the constant function on X taking value c;
(2) $\mu(\lambda*\varphi)=\lambda*\mu(\varphi)$;
(3) $\mu(\varphi\vee\psi)=\mu(\varphi)\vee\mu(\psi)$.

The set of all $*$-measures on X is denoted by $M^*(X)$. It is known [13] that the set $M^*(X)$ is compact being endowed with the weak* topology. This construction determines a functor in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces and continuous maps. This functor satisfies some natural properties. In particular, the notion of support is defined for any element $\mu\in M^*(X)$. By the definition, the support of μ is the minimal (with respect to the inclusion) closed subset A of X satisfying the following condition: for every $\varphi,\psi\in C(X,\mathbb{I})$,

$$\varphi|A=\psi|A \implies \mu(\varphi)=\mu(\psi).$$

Given an ultrametric space (X,d) and $r>0$, denote by $\mathcal{F}_r(X)$ the set of all functions from X to $\mathbb{I}$ constant on all balls of radius r. We keep the notation $M^*(X)$ for the set of all $*$-measures on some Hausdorff compactification $bX\supset X$ whose support is a compact subset of X. Note that this is nothing but Chigogidze's extension of the normal functors [1].

Given $\mu,\nu\in M^*(X)$, we let

$$\tilde d(\mu,\nu)=\inf\{r>0|\mu(\varphi)=\nu(\varphi)\text{ for all }\varphi\in\mathcal{F}_r\}.$$

Theorem 1. *The function $\tilde d$ is an ultrametric on $M^*(X)$.*

Proof. First we show that the function $\tilde{d}$ is well defined. Since the sets $\mathrm{supp}(\mu)$, $\mathrm{supp}(\nu)$ are compact, they are bounded. The latter means that there exist $r > 0$ and x_0 such that $\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu) \subset B_r(x_0)$.

Consider the set $\mathcal{F}_r(X)$. Let $\varphi \in \mathcal{F}_r(X)$, then $\varphi|B_r(x_0) \equiv c$ is constant and $\mu(\varphi) = c = \nu(\varphi)$, for some $c \in \mathbb{I}$. It follows that the set of which we consider the infimum is nonempty and therefore the formal definition makes sense.

By the definition $\tilde{d}(\mu,\nu) \geqslant 0$. Furthermore, $\tilde{d}(\mu,\mu) = 0$.

Now let $\tilde{d}(\mu,\nu) = 0$. We have to show that $\mu = \nu$.

Note that for every $r > 0$ and for every $\varphi \in \mathcal{F}_r$ we have $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$. We need to show that $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$ for all $\varphi \in C(X,\mathbb{I})$.

Suppose the contrary, i.e. that there exists $\varphi \in C(X,\mathbb{I})$ such that $\mu(\varphi) \neq \nu(\varphi)$. Note that each $\mu \in M^*(X)$ is a continuous map with respect to the sup-metric on $C(X,\mathbb{I})$ for any zero-dimensional space X (see [13]).

Since each ultrametric space is a zero-dimensional space [16], we see that if $\varphi_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ with respect to the sup-metric, then $\mu(\varphi_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\varphi)$.

Construct a sequence of functions $\varphi_i \in \mathcal{F}_{r_i}(X)$ converging to φ. Since $supp\mu \cup supp\nu$ is a zero-dimensional compactum, we can choose for each $i \in \mathcal{N}$ a number $r_i > 0$ and a function $\varphi_i \in \mathcal{F}_{r_i}(X)$ such that $\|\varphi - \varphi_r\| \leqslant \varepsilon$. Therefore, choosing $\varepsilon = \frac{1}{2^i}$ we get a desired sequence (φ_i). Then

$$\mu(\varphi) = \lim_{i\to\infty} \mu(\varphi_i) = \lim_{i\to\infty} \nu(\varphi_i) = \nu(\varphi).$$

The symmetry of the functions $\tilde{d}$ obviously follows from the definition: $\tilde{d}(\mu,\nu) = \tilde{d}(\nu,\mu)$ for all $\mu,\nu \in M^*(X)$.

Now we need to prove the strong triangle inequality. Let $\mu,\nu,\tau \in M^*(X)$ and $\tilde{d}(\mu,\nu) = a, \tilde{d}(\nu,\tau) = b$. Without loss of generality, we may assume that $a \leqslant b$. Then, for every $\varepsilon > 0$ and every $\varphi \in \mathcal{F}_{a+\varepsilon}(X)$, $\psi \in \mathcal{F}_{b+\varepsilon}(X)$, we have $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$ and $\nu(\psi) = \tau(\psi)$. And then, for every $\varphi \in \mathcal{F}_{b+\varepsilon}(X)$, we have $\mu(\varphi) = \nu(\varphi) = \tau(\varphi)$. Hence, $\tilde{d}(\mu,\tau) \leqslant b + \varepsilon$ and letting $\varepsilon \to 0$, we see that $\tilde{d}(\mu,\tau) \leqslant b$.

We denote by **Ultr** the category of ultrametric spaces and non-expanding maps. Let $(X,d),(Y,d)$ be ultrametric spaces. Let $f\colon X \to Y$ be a non-expanding map.

Define $M^*(f)\colon M^*(X) \to M^*(Y)$ by the formula:

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f),$$

$\mu \in M^*(X), \varphi \in C(X,\mathbb{I})$.

Proposition 1. *The map $M^*(f)$ is non-expanding.*

Proof. Let $\mu,\nu \in M^*(X)$ and $\tilde{d}(\mu,\nu) < r$.

Note that, since f is non-expanding, given $\varphi \in \mathcal{F}_r(Y)$, one has $\varphi f \in \mathcal{F}_r(X)$.

Then

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f) = \nu(\varphi f) = M^*(f)(\nu)(\varphi).$$

Therefore, $\tilde{\rho}(M^*(f)(\mu), M^*(f)(\nu)) < r$ and we see that the map $M^*(f)$ is non-expanding.

Actually, we obtain a functor in the category **Ultr**. We keep the notation M^* for this functor.

A functor F in the category **Ultr** is called locally non-expanding, if

$$\tilde\rho(F(f), F(g)) = \rho(f, g)$$

(see [15]).

Proposition 2. *The functor M^* is locally non-expanding.*

Proof. Let $r > 0$ and $\rho(f, g) < r$.

Then for all $x \in X$, $\rho(f(x), g(x)) < r$ and then $g(x) \in B_r(f(x))$.

Let $\mu \in M^*(X)$. We need to show that $\tilde\rho(M^*(f)(\mu), M^*(g)(\mu)) < r$.

Let $\varphi \in B_r(Y)$, that is we need to check the equality

$$M^*(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f) = \mu(\varphi g) = M^*(g)(\mu)(\varphi).$$

Let $x \in X$, then $\rho(f(x), g(x)) < r$ and since φ is a constant function on the balls of radius r it follows that $g(x) \in B_r(f(x))$. This means that $\varphi f(x) = \varphi g(x)$ and therefore $\mu(\varphi f) = \mu(\varphi g)$.

On the other hand, let $x \in X$ and $\delta_x \in M^*(X)$. We have that

$$\tilde\rho(M^*(f)(\delta_x), M^*(g)(\delta_x)) = \tilde\rho(M^*(f)(\varphi)(x), M^*(g)(\varphi)(x)) \geqslant \rho(f(x), g(x)).$$

And this proves the fact that the functor M^* is locally non-expanding.

Recall that the hyperspace $\exp X$ of a metric space X is the set of all nonempty compact subsets of X endowed with the Hausdorff metric

$$d_H(A, C) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B_r(C),\ C \subset B_r(A)\},\ A, C \in \exp X.$$

For any $\mu \in M^*X$ its support is a nonempty compact subset of X, i.e., an element of the hyperspace $\exp X$.

It is well-known that the Hausdorff metric on the hyperspace of an ultrametric space is also an ultrametric space. Moreover, exp is a functor on the category **Ultr**.

Proposition 3. *The support map $s = s_X : M^*(X) \to \exp X$ is non-expanding.*

Proof. Let $\mu, \nu \in M^*(X)$ and $\tilde d(\mu, \nu) < r$.

Suppose that $d_H(s(\mu), s(\nu)) > r$, then $M^*(f)(\mu) = M^*(f)(\nu)$ and $f(s(\mu)) \neq f(s(\nu))$, where $f : X \to f(X)$ is the quotient map with respect to the decomposition of X into disjoint balls of radius r.

Without loss of generality one may assume that $f(s(\mu)) \setminus f(s(\nu)) \neq \emptyset$.

By the definition of support, there exist $\varphi, \psi \in C(f(X), \mathbb{I})$ such that $\varphi|f(s(\mu)) = \psi|f(s(\nu))$ and $M^*(f)(\mu)(\varphi) \neq M^*(f)(\nu)(\psi)$. This clearly contradicts to the choice of r.

Note that $s = (s_X)$ is a natural transformation of the functor M^* to the hyperspace functor exp.

Proposition 4. *Let (X, d) be an ultrametric space. Then the map $\delta : X \to M^*(X)$, $\delta(x) = \delta_x$, is an isometric embedding.*

Proof. We need to show that the equality $d(x, y) = \tilde d(\delta_x, \delta_y)$ is satisfied for all $x, y \in X$.

By the definition,

$$\tilde d(\delta_x, \delta_y) = \inf\{r > 0 \mid \delta_x(\varphi) = \delta_y(\varphi), \forall\varphi \in \mathcal{F}_r\}$$

and $\delta_x(\varphi) = \varphi(x), \delta_y(\varphi) = \varphi(y)$.

Let $d(x,y) < r$, then $x, y \in B_r(X)$ and $\varphi(x) = \varphi(y)$ for every $\varphi \in \mathcal{F}_r$. Therefore $\tilde{d}(\delta_x, \delta_y) \leqslant d(x,y)$.

Now let $\tilde{d}(\delta_x, \delta_y) < d(x,y)$. Then there exists $r > 0$ such that $d(x,y) > r$ and $\varphi(x) = \varphi(y)$ for every $\varphi \in \mathcal{F}_r$.

Since $d(x,y) > r$, we see that $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$. We take $\varphi \in \mathcal{F}_r$ that $\varphi|B_r(x) = 0$ and $\varphi|X \setminus B_r(x) = 1$. From that $\varphi \in \mathcal{F}_r$ it follows that $\varphi(x) = \varphi(y)$. And we got to a contradiction.

Note that $\delta = (\delta_X)$ is a natural transformation of the identity functor into the functor M^*.

We denote by $M^*_\omega(X)$ the subset of $M^*(X)$ consisting of $*$-measures of finite support, i.e., $*$-measures of the form $\mu = \bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i * \delta_{x_i}$.

Proposition 5. *The set $M^*_\omega(X)$ is dense in $M^*(X)$.*

Proof. Let $\mu \in M^*(X)$ and let $r > 0$. Let $\{B_r(x_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ be a finite disjoint cover of the set $\mathrm{supp}(\mu)$ by balls of radius r. By φ_i we denote the characteristic function of the set $B_r(x_i)$. Now let $\varphi \in \mathcal{F}_r(X)$. Without loss of generality one may assume that $\varphi \equiv 0$ on the set $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$. Then $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi(x_i) * \varphi_i$.

Let $\nu = \bigvee_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i) * \delta_{x_i}$. Note that

$$1 = \mu(1_X) = \mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i),$$

therefore $\nu \in M^*(X)$.

Now, given $\psi \in \mathcal{F}_r(X)$, one can write $\psi = \bigvee_{i=1}^{n} \psi(x_i) * \varphi$. Then

$$\nu(\psi) = \nu\left(\bigvee_{i=1}^{n} \psi(x_i) * \varphi\right) = \bigvee_{i=1}^{n} \psi(x_i) * \nu(\varphi_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \psi(x_i) * \nu(\varphi_i) = \mu(\psi).$$

Therefore, $\tilde{d}(\mu, \nu) < r$.

In the sequel, we endow the set $C(X, \mathbb{I})$ with the sup-metric.

Lemma 1. *Let X be a compact ultrametric space. The set $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{r>0} \mathcal{F}_r(X)$ is dense in $C(X, \mathbb{I})$.*

Theorem 2. *Suppose that (X, d) is a complete ultrametric space. Then the space $(M^*(X), \tilde{d})$ is also complete.*

Proof. Let (μ_i) be a Cauchy sequence in $M^*(X)$. From Proposition 3 it easily follows that the set $Y = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{supp}(\mu_i)}$ is compact. Without loss of generality, one may assume that $Y = X$.

Let $\varphi \in \mathcal{F}(Y)$. There exists $r > 0$ such that $\varphi \in \mathcal{F}_r(Y)$. There exists $N \in \mathbb{N}$ such that, for any $m, n \geq N$, $\tilde{d}(\mu_m, \mu_n) < r$. Therefore $\mu_m(\varphi) = \mu_n(\varphi)$ for any $m, n \geq N$. We let $\mu(\varphi) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu_i(\varphi) = \mu_N(\varphi)$.

Thus, we have defined a map $\mu\colon \mathcal{F}(Y) \to \mathbb{I}$. It is straightforward to verify that μ satisfies the conditions from Definition 1 if we replace $C(X, \mathbb{I})$ by $\mathcal{F}(Y)$.

Now we are going to extend μ over the set $C(Y, \mathbb{I})$.

Claim. The map $\mu\colon \mathcal{F}(Y) \to \mathbb{I}$ is uniformly continuous.

Let $\varepsilon > 0$. Since the map $*\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ is uniformly continuous, there exists $\delta > 0$ such that $|a - a'| < \delta$ and $|b - b'| < \delta$ together imply $|a * b - a' * b'| < \varepsilon$.

Let $\varphi', \varphi'' \in \mathcal{F}(Y)$. One may assume that $\varphi', \varphi'' \in \mathcal{F}_r(Y)$, for some $r > 0$. Let $\{B_r(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ be the disjoint cover of Y by balls. Let χ_i denote the characteristic function of the ball $B_r(x_i)$, $= 1, \dots, n$. Then one can write

$$\varphi' = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i' * \chi_i, \;\; \varphi'' = \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i'' * \chi_i,$$

for some $\alpha_i', \alpha_i'' \in \mathbb{I}$.

If $\|\varphi' - \varphi''\| < \delta$, then $\bigvee\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i' - \alpha_i''| < \delta$ and we obtain

$$\begin{aligned} |\mu(\varphi') - \mu(\varphi'')| &= \left|\mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i' * \chi_i\right) - \mu\left(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i'' * \chi_i\right)\right| \\ &= \left|\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i' * \mu(\chi_i) - \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i'' * \mu(\chi_i)\right| \\ &\leq \bigvee_{i=1}^{n} |\alpha_i' * \mu(\chi_i) - \alpha_i'' * \mu(\chi_i)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Let us return to the proof of the theorem. The map admits a unique continuous extension over the set $C(Y, \mathbb{I})$ (we keep the notation μ for this extension). Clearly, $\mu \in M^*(X)$ and $\mu = \lim\limits_{i\to\infty} \mu_i$.

3. Remarks

Some of the results concerning fuzzy ultrametrization of functorial constructions are considered in numerous publications. Recall that fuzzy ultrametric spaces were introduced in [7, 11].

Fuzzy ultrametrization of the sets of probability measures is considered in [12]. The case of idempotent measures is treated in [5]. We formulate the general problem of fuzzy ultrametrization of the sets of ∗-measures of compact support defined on fuzzy ultrametric spaces.

Note that the space of probability measures of compact support on a complete ultrametric space is complete as well [15].

An ultrametric space (X, d) is said to be spherically complete if every descending collection of closed balls in X has nonempty intersection.

It is not known whether the space of $*$-measures of compact support on a spherically complete ultrametric space is also spherically complete.

References

1. A. Chigogidze, *On extension of normal functors*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. (1984), no. 6, 23–26 (Russian).
2. B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, and I.V. Volovich, *On p-adic mathematical physics*, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. **1** (2009), no. 1, 1–17. DOI: 10.1134/S2070046609010014
3. O. Hubal and M. Zarichnyi, *Idempotent probability measures on ultrametric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2008), no. 2, 1052–1060. DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.01.095
4. E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
5. C. Li and Zh. Yang, *Fuzzy ultrametrics based on idempotent probability measures*, J. Fuzzy Math. **22**, (2014), no. 2, 463–476.
6. F. Murtagh, *On ultrametricity, data coding, and computation*, Journal of Classiffication **21**, (2004), no. 2, 167–184. DOI: 10.1007/s00357-004-0015-y
7. D. Miheţ, *Fuzzy ψ-contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets Syst. **159** (2008), no. 6, 739–744. DOI: 10.1016/j.fss.2007.07.006
8. R. Rammal, G. Touluse, and M. A. Virasoro, *Ultrametricity for physicists*, Rev. Mod. Phys. **58** (1986), no. 4, 765–788. DOI: 10.1103/RevModPhys.58.765
9. S. Priess-Crampe and P. Ribenboim, *Ultrametric spaces and logic programming*, J. Log. Program. **42**, no. 2, (2000), 59–70. DOI: 10.1016/S0743-1066(99)00002-3
10. M. D. Roberts, *Ultrametric distance in syntax*, Prague Bull. Math. Linguist. **103**, (2015), 111–130. DOI: 10.1515/pralin-2015-0006
11. S. Romaguera, A. Sapena, and P. Tiradoi, *The Banach fixed point theorem in fuzzy quasi-metric spaces with application to the domain of words*, Topology Appl. **154** (2007), no. 10, 2196–2203. DOI: 10.1016/j.topol.2006.09.018
12. A. Savchenko and M. Zarichnyi, *Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces*, Azerb. J. Math. **1** (2011), no. 1, 114–121.
13. Kh. Sukhorukova, *Spaces of non-additive measures generated by triangular norms*, Proc. Intern. Geometry Center, (submitted).
14. M. O. Vlad, *Fractal time, ultrametric topology and fast relation*, Phys. Lett., A **189** (1994), no. 4, 299–303. DOI: 10.1016/0375-9601(94)90099-X
15. J. I. den Hartog and E.P. de Vink, *Building metric structures with the Meas-functor*, Liber Amicorum Jaco de Bakker, CWI, Amsterdam, (2002), pp. 93–108.
16. N. Bourbaki, *General topology*, Chapters 5–10, Berlin, Springer, 1998.

Стаття: надійшла до редколегії 03.10.2020
доопрацьована 03.11.2020
прийнята до друку 17.11.2021

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90

ПРО ПРОСТОРИ $*$-МІР НА УЛЬТРАМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

Христина СУХОРУКОВА, Михайло ЗАРІЧНИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: zarichnyi@yahoo.com

Поняття $*$-міри на компактному гаусдорфовому просторі запроваджено і досліджено першим автором. Ми розглядаємо множину всіх $*$-мір з компактними носіями на ультраметричному просторі. Наведено ультраметризацію цієї множини, яка визначає функтор на категорії ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень. Доведено, що цей функтор локально нерозтягуючий і зберігає клас повних ультраметричних просторів.

Ключові слова: ультраметричний простір, нерозтягуюче відображення, $*$-міра.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 84–91
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 84–91
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.084-091

УДК 517.537

ON THE UNIVALENCE RADII OF SUCCESSIVE GELFOND-LEONT'EV-SĂLĂGEAN AND GELFOND-LEONT'EV-RUSCHEWEYH DERIVATIVES

Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

For an analytic in the disk $\{z : |z| < 1\}$ function $f(z) = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k z^k$ and formal power series $l(z) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k z^k$ with $l_k > 0$ the operator

$$D^n_{l,[S]f(z)} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{l_1 l_{k-1}}{l_k}\right)^n f_k z^k$$

is called the Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivative and the operator

$$D^n_{l,[R]} f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{l_{k-1} l_n}{l_{n+k-1}} f_k z^k$$

is called the Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivative. By $\varrho[f]$ we denote the radius of the univalence of the function f. It is proved, for example, that for each $n \geq 1$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \left(\frac{l_2}{l_1^2}\right)^n \leq \varrho[D^n_{l,[S]} f] \leq 2 \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \left(\frac{l_2}{l_1^2}\right)^n$$

and

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \frac{l_{n+1}}{l_1 l_n} \leq \varrho[D^n_{l,[R]} f] \leq 2 \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \frac{l_{n+1}}{l_1 l_n}.$$

Key words: analytic function, Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivative, Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivative, radius of the univalence.

2020 Mathematics Subject Classification: 30D99

1. Introduction

For a formal power series

(1) $$f(z) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k, \quad z = re^{i\theta},$$

and $l(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} l_k z^k$ $(l_k > 0)$ the formal power series $D_l^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k$ is called the Gelfond-Leont'ev derivative [1]. If $l(z) = e^z$ (i.e. $l_k = 1/k!$) then $D_l^n f = f^{(n)}$ is the usual derivative.

If the function $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k$ is analytic in the disk $\{z : |z| < 1\}$ then the operator $D_{[S]}^n f$ $(n \geq 0)$ defined by

$$D_{[S]}^0 f(z) = f(z), \quad D_{[S]}^1 f(z) = D_{[S]} f(z) = z f'(z),$$

$$D_{[S]}^n f(z) = D_{[S]}(D_{[S]}^{n-1} f(z)) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n f_k z^k$$

is known as the Sălăgean derivative [2]. The operator

$$D_{[R]}^n f(z) = \frac{z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \{z^{n-1} f(z)\} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} f_k z^k$$

is called [3] the Ruscheweyh derivative.

In [4], combining the definitions of Gelfond-Leont'ev derivative with Sălăgean derivative and Ruscheweyh derivative, the operator

$$D_{l,[S]}^n f(z) = l_1 z D_l^1 (D_{l,[S]}^{n-1} f(z)) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{l_1 l_{k-1}}{l_k} \right)^n f_k z^k$$

is called the Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivative and the operator

$$D_{l,[R]}^n f(z) = z l_n D_l^n \{z^{n-1} f(z)\} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{l_{k-1} l_n}{l_{n+k-1}} f_k z^k$$

is called the Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivative. In [4] the behavior of maximal terms of successive Gelfond-Leont'ev-Sălăgen and Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivatives and in [5] the properties of Hadamard compositions of such derivatives are studied.

The radius $\varrho[f]$ of univalence of a function f is defined as follows: if $f'(0) = 0$ then we put $\varrho[f] = 0$, and if $f'(0) \neq 0$ then $\varrho[f]$ is a radius of the largest disk with the center at a point $z = 0$, in which the function f is univalent. The asymptotic behavior of the sequence of radii of the univalence of ordinary derivatives of the function f has been studied by many authors. The most significant contribution was made by S.M. Shah and S.Y. Trimble [6–8]. The asymptotic behavior of the sequence of radii of the univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives is investigated in [9–12].

Here we consider a similar problem for Gelfond-Leont'ev-Sălăgen and Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivatives. Our research is based on the following lemmas [11].

Lemma 1. *Let* $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ *and* $\varrho \in (0, +\infty)$. *If the function* α *is univalent in* $\mathbb{D}_\varrho = \{z : |z| < \varrho\}$ *then* $|\alpha_k|\varrho^{k-1} \leq k|\alpha_1|$ *for all* $k \geq 1$.

Lemma 2. *Let* $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$. *If* $\sum_{k=2}^{\infty} k|\alpha_k|\varrho^{k-1} \leq |\alpha_1|$ *for some* $\varrho \in (0, +\infty)$ *then the function* α *is univalent in* $\mathbb{D}_\varrho$.

2. Gelfond-Leont'ev-Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivatives

Here for a function (1) we will consider a more general form of the Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivative $D^n_{l,[S]}f$.

We remark that if a function f is given by a gap power series

$$f(z) = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} f_{k_j+1} z^{k_j+1}, \quad f_{k_j+1} \neq 0 \, (j \geq 0), \tag{2}$$

where $0 \leq k_j \uparrow \infty$ as $0 \leq j \to \infty$, then

$$D^{k_n}_{l,[S]} f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{l_1 l_{k_j}}{l_{k_j+1}}\right)^{k_n} f_{k_j+1} z^{k_j+1}. \tag{3}$$

Theorem 1. *If the function* f *is given by a gap power series* (2) *then for the radius of univalence of Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivative* $D^{k_n}_{l,[S]} f$ *the estimates*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|} \left(\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}\right)^{k_n/k_j} \leq \varrho[D^{k_n}_{l,[S]} f] \leq \sqrt[k_j]{(k_j+1)\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|} \left(\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}\right)^{k_n/k_j} \tag{4}$$

hold for every $j \geq 1$.

Proof. If function (3) is univalent in $\mathbb{D}_\varrho$ then by Lemma 1

$$\left|\left(\frac{l_1 l_{k_j}}{l_{k_j+1}}\right)^{k_n} f_{k_j+1}\right| \varrho^{k_j} \leq (k_j+1)\left(\frac{l_1 l_{k_0}}{l_{k_0+1}}\right)^{k_n} |f_{k_0+1}|,$$

i.e.

$$\varrho[D^{k_n}_{l,[S]} f]^{k_j} \leq (k_j+1)\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right| \left(\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}\right)^{k_n},$$

whence we obtain the right hand side of (4).

Now let $0 < x \leq (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}$. Then

$$\sum_{j=1}^{\infty} (k_j+1) x^{k_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) x^j = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 \leq 1.$$

Therefore, if

$$\varrho = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|} \left(\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}\right)^{k_n/k_j} \tag{5}$$

then

$$x = \varrho \sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_j+1}}{f_{k_0+1}}\right| \left(\frac{l_{k_j} l_{k_0+1}}{l_{k_0} l_{k_j+1}}\right)^{k_n/k_j}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

and, thus,

$$\sum_{j=1}^{\infty}(k_j+1)\left(\frac{l_{k_j} l_{k_0+1}}{l_{k_0} l_{k_j+1}}\right)^{k_n} \left|\frac{f_{k_j+1}}{f_{k_0+1}}\right| \varrho^{k_j} = \sum_{j=1}^{\infty}(k_j+1)x^{k_j} \le 1,$$

whence

$$\sum_{j=1}^{\infty}(k_j+1)\left(\frac{l_1 l_{k_j}}{l_{k_j+1}}\right)^{k_n} |f_{k_j+1}|\varrho^{k_j} \le \left(\frac{l_1 l_{k_0}}{l_{k_0+1}}\right)^{k_n} |f_{k_0+1}|.$$

Hence by Lemma 2 the function $D^{k_n}_{l,[S]f}$ is univalent in $\mathbb{D}_\varrho$ and, thus, in view of (5)

(6) $$\varrho[D^{k_n}_{l,[S]}f] \ge \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right| \left(\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}\right)^{k_n/k_j}}$$

for every $j \ge 1$, i.e. the left hand side of (4) is correct. Theorem 1 is proved. □

If series (2) has a radius of convergence $R \in (0, +\infty)$ then

$$\varliminf_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{(k_j+1)\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|} = R$$

and, since $\varliminf\limits_{j\to\infty} a_j b_j \le \varliminf\limits_{j\to\infty} a_j \overline{\lim}_{j\to\infty} b_j$, from (4) we get

$$\varrho[D^{k_n}_{l,[S]}f] \le \varliminf_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{(k_j+1)\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|} \left(\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}\right)^{k_n/k_j} \le R\left(\varlimsup_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}}\right)^{k_n}.$$

Similarly, since $\varlimsup\limits_{j\to\infty} a_j b_j \ge \varliminf\limits_{j\to\infty} a_j \overline{\lim}_{j\to\infty} b_j$, from (6) we get

$$\varrho[D^{k_n}_{l,[S]}f] \ge \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \varlimsup_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|} \left(\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}\right)^{k_n/k_j} \ge \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R\left(\varlimsup_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}}\right)^{k_n}.$$

Therefore, we obtain the following statement.

Proposition 1. *If a function f is given by the gap power series (2) with the radius of convergence $R \in (0, +\infty)$ then for the radius of univalence of Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivative $D^{k_n}_{l,[S]}f$ the estimates*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R\left(\varlimsup_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}}\right)^{k_n} \le \varrho[D^{k_n}_{l,[S]}f] \le R\left(\varlimsup_{j\to\infty} \sqrt[k_j]{\frac{l_{k_0} l_{k_j+1}}{l_{k_j} l_{k_0+1}}}\right)^{k_n}$$

hold.

Theorem 1 and Proposition 1 imply the following statement.

Corollary 1. *For the radius of univalence of Gelfond-Leont'ev-Sălăgean derivative $D^n_{l,[S]}f$ of function (1) the estimates*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt[j]{\left|\frac{f_1}{f_{j+1}}\right|}\left(\frac{l_{j+1}}{l_jl_1}\right)^{n/j}\le \varrho[D^n_{l,[S]}f]\le \sqrt[j]{(j+1)\left|\frac{f_1}{f_{j+1}}\right|}\left(\frac{l_{j+1}}{l_jl_1}\right)^{n/j} \tag{7}$$

hold for every $j\ge 1$. If, moreover, series (1) has the radius of convergence $R\in(0,+\infty)$ then

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R\left(\varliminf_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{l_{j+1}}{l_j}}\right)^n\le \varrho[D^n_{l,[S]}f]\le R\left(\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{l_{j+1}}{l_j}}\right)^n.$$

We remark also that for $j=1$ from (7) we get

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\left|\frac{f_1}{f_2}\right|\left(\frac{l_2}{l_1^2}\right)^n\le \varrho[D^n_{l,[S]}f]\le 2\left|\frac{f_1}{f_2}\right|\left(\frac{l_2}{l_1^2}\right)^n.$$

3. Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivatives

Here for a function (1) we will consider also a slightly more general form of the Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivative

$$D^n_{l,[R]}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l_{k-1}l_n}{l_{n+k-1}}f_kz^k.$$

We remark that if a function f is given by a gap power series (2) then

$$D^{k_n}_{l,[R]}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{l_{k_n}l_{k_j}}{l_{k_j+k_n}}f_{k_j+1}z^{k_j+1}. \tag{8}$$

Theorem 2. *If a function f is given by a gap power series (2) then for the radius of univalence of Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivative $D^{k_n}_{l,[R]}f$ the estimates*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|\frac{l_{k_0}l_{k_j+k_n}}{l_{k_j}l_{k_0+k_n}}}\le \varrho[D^{k_n}_{l,[R]}f]\le \sqrt[k_j]{(k_j+1)\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|\frac{l_{k_0}l_{k_j+k_n}}{l_{k_j}l_{k_0+k_n}}} \tag{9}$$

hold for every $j\ge 1$.

Proof. If the function (8) is univalent in $\mathbb{D}_\varrho$ then by Lemma 1

$$\left|\frac{l_{k_n}l_{k_j}}{l_{k_j+k_n}}f_{k_j+1}\right|\varrho^{k_j}\le (k_j+1)\frac{l_{k_n}l_{k_0}}{l_{k_0+k_n}}|f_{k_0+1}|,$$

i.e.

$$\varrho[D^{k_n}_{l,[R]}f]^{k_j}\le (k_j+1)\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|\frac{l_{k_j+k_n}l_{k_0}}{l_{k_0+k_n}l_{k_j}},$$

whence we obtain the right hand side of (9).

Now we put

$$\varrho=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|\frac{l_{k_0}l_{k_j+k_n}}{l_{k_j}l_{k_0+k_n}}}. \tag{10}$$

Then as in the proof of Theorem 1 we obtain

$$\sum_{j=1}^{\infty}(k_j+1)\frac{l_{k_n}l_{k_j}}{l_{k_j+k_n}}|f_{k_j+1}|\varrho^{k_j}\le\frac{l_{k_n}l_{k_0}}{l_{k_0+k_n}}|f_{k_0+1}|.$$

Hence by Lemma 2 the function $D^{k_n}_{l,[R]f}$ is univalent in $\mathbb{D}_\varrho$ and, thus, in view of (10)

$$\varrho[D^{k_n}_{l,[R]f}]\ge\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt[k_j]{\left|\frac{f_{k_0+1}}{f_{k_j+1}}\right|\frac{l_{k_0}l_{k_j+k_n}}{l_{k_j}l_{k_0+k_n}}}\tag{11}$$

for every $j\ge1$, i.e. the left hand side of (9) is correct. Theorem 2 is proved. □

Using (9), (11) and repeating the proof of Proposition 1 we come to the next statement.

Proposition 2. *If a function f is given by the gap power series (2) with the radius of convergence $R\in(0,+\infty)$ then for the radius of univalence of Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivative $D^{k_n}_{l,[R]}f$ the following estimates we have*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[k_j]{\frac{l_{k_0}l_{k_j+k_n}}{l_{k_j}l_{k_0+k_n}}}\le\varrho[D^{k_n}_{l,[R]}f]\le R\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[k_j]{\frac{l_{k_0}l_{k_j+k_n}}{l_{k_j}l_{k_0+k_n}}}.$$

Theorem 2 and Proposition 2 imply the following statement.

Corollary 2. *For the radius of univalence of Gelfond-Leont'ev–Ruscheweyh derivative $D^n_{l,[R]}f$ of a function (1) the estimates*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt[j]{\left|\frac{f_1}{f_{j+1}}\right|\frac{l_{j+n}}{l_jl_n}}\le\varrho[D^n_{l,[R]}f]\le\sqrt[j]{(j+1)\left|\frac{f_1}{f_{j+1}}\right|\frac{l_{j+n}}{l_jl_n}}\tag{12}$$

hold for every $j\ge1$. If, moreover, series (1) has the radius of convergence $R\in(0,+\infty)$ then

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{l_{j+n}}{l_jl_n}}\le\varrho[D^n_{l,[S]}f]\le R\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[j]{\frac{l_{j+n}}{l_jl_n}}.$$

For $j=1$ from (12) we get

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\left|\frac{f_1}{f_2}\right|\frac{l_{n+1}}{l_1l_n}\le\varrho[D^n_{l,[R]}f]\le2\left|\frac{f_1}{f_2}\right|\frac{l_{n+1}}{l_1l_n}.$$

Choosing a function l in one or another way , we obtain the corresponding estimates for the radius of univalence.

Example 1. Let $l_k=\exp\{ak^2\}$. Then $\dfrac{l_{j+1}}{l_j}=\exp\{2aj+1\}$ and $\dfrac{l_{j+n}}{l_jl_n}=\exp\{2ajn\}$. Therefore, if series (1) has the radius of convergence $R\in(0,+\infty)$ then by Corollaries 1 and 2

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}Re^{2an}\le\varrho[D^n_{l,[S]}f],\ \varrho[D^n_{l,[R]}f]\le Re^{2an}.$$

Example 2. If $l_k = q^k$ then $\dfrac{l_{j+1}}{l_j} = q$ and $\dfrac{l_{j+n}}{l_j l_n} = 1$. Therefore, if series (1) has the radius of convergence $R \in (0, +\infty)$ then

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R \le \varrho[D^n_{l,[S]} f],\ \varrho[D^n_{l,[R]} f] \le R. \tag{13}$$

Example 3. If $l_k = \dfrac{1}{k!}$ then $\dfrac{l_{j+1}}{l_j} = \dfrac{1}{j+1}$ and $\dfrac{l_{j+n}}{l_j l_n} = \dfrac{j!n!}{(j+n)!}$. Therefore, if series (1) has the radius of convergence $R \in (0, +\infty)$ then estimates (13) hold.

References

1. A. O. Gel'fond and A. F. Leont'ev, *On a generalization of Fourier series*, Mat. Sb. (N.S.), **29**(**71**) (1951), no. 3, 477–500 (in Russian).
2. G. St. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, In: C. A. Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu, I. Suciu (eds), Complex Analysis – Fifth Romanian-Finnish Seminar. Lecture Notes in Mathematics, vol **1013**. Springer, Berlin, Heidelberg. 1983, pp. 362–372. DOI: 10.1007/BFb0066543
3. St. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), no. 1, 109–115. DOI: 10.1090/S0002-9939-1975-0367176-1
4. M. M. Sheremeta, *On the maximal terms of successive Gelfond-Leont'ev-Sălăgean and Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivatives of a function analytic in the unit disc*, Mat. Stud. **37** (2012), no. 1, 58–64.
5. M. M. Sheremeta, *Hadamard composition of Gelfond-Leont'ev-Sălăgean and Gelfond-Leont'ev-Ruscheweyh derivatives of functions analytic in the unit disc*, Mat. Stud. **54** (2020), no. 2, 115–134. DOI: 10.30970/ms.54.2.115-134
6. S. M. Shah and S. Y. Trimble, *Univalent functions with univalent derivatives, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 313–320. DOI: 10.2307/1995283
7. S. M. Shah and S. Y. Trimble, *Univalence of derivatives of functions defined by gap power series*, J. London. Math. Soc. (2) **9** (1975), no. 3, 501–512. DOI: 10.1112/jlms/s2-9.3.501
8. S. M. Shah and S. Y. Trimble, *Univalence of derivatives of functions defined by gap power series, II*, J. Math. Anal. Appl. **56** (1976), no. 1, 28–40. DOI: 10.1016/0022-247X(76)90005-6
9. G. P. Kapoor, O. P. Juneja, and J. Patel, *Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of analytic functions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Répub. Soc. Roum., Nouv. Sér. **33** (1989), no. 1, 25–34.
10. G. P. Kapoor and J. Patel, *Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of functions defined by gap power series*, Rend. Mat. Appl., VII. Ser. **6** (1986), no. 4, 491–502.
11. M. M. Шеремета, *Про радіуси однолистості похідних Гельфонда-Леонтьева*, Укр. мат. ж. **47** (1995), no. 3, 390–399; **English version:** M. M. Sheremeta, *On the univalence radii of Gelfond-Leont'ev derivatives*, Ukr. Math. J. **47** (1995), no. 3, 454–464 DOI: 10.1007/BF01056307
12. O. Volokh and M. Sheremeta, *On the univalence radii of Gelfond-Leont'ev derivatives of gap power series*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math. **68** (2008), 59–67 (in Ukrainian).

Стаття: надійшла до редколегії 03.10.2020
прийнята до друку 17.11.2021

ПРО РАДІУСИ ОДНОЛИСТОСТІ ПОСЛІДОВНИХ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА-САЛАГЕНА І ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА-РУШЕВЕЯ

Мирослав Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

Для аналітичної в крузі $\{z : |z| < 1\}$ функції $f(z) = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k z^k$ і формального степеневого ряду $l(z) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k z^k$ з $l_k > 0$ оператор $D^n_{l,[S]} f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{l_1 l_{k-1}}{l_k}\right)^n f_k z^k$ називається похідною Гельфонда-Леонтьєва-Салагена, а оператор $D^n_{l,[R]} f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{l_{k-1} l_n}{l_{n+k-1}} f_k z^k$ називається похідною Гельфонда-Леонтьєва-Рушевея. Через $\varrho[f]$ позначимо радіус однолистості функції f. Доведено, наприклад, що для кожного $n \geq 1$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \left(\frac{l_2}{l_1^2}\right)^n \leq \varrho[D^n_{l,[S]} f] \leq 2 \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \left(\frac{l_2}{l_1^2}\right)^n$$

і

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \frac{l_{n+1}}{l_1 l_n} \leq \varrho[D^n_{l,[R]} f] \leq 2 \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \frac{l_{n+1}}{l_1 l_n}.$$

Ключові слова: аналітична функція, похідна Гельфонда-Леонтьєва-Салагена, похідна Гельфонда-Леонтьєва-Рушевея, радіус однолистості.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 92–104
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 92–104
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.092-104

УДК 517.926.4+517.546.1

CLOSE-TO-CONVEXITY OF POLYNOMIAL SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS OF THE SECOND DEGREE

Myroslav SHEREMETA, Yuriy TRUKHAN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: m.m.sheremeta@gmail.com,
yurkotrukhan@gmail.com

An analytic univalent in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ function f is said to be convex if $f(\mathbb{D})$ is a convex domain and is said to be close-to-convex if there exists a convex in $\mathbb{D}$ function Φ such that $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. We indicate conditions on real parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 and α_0, α_1, α_2 of the differential equation

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2,$$

under which this equation has a polynomial solution

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} f_n z^n \ (\deg f = p \geq 2)$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$ together with all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$.

Key words: linear non-homogeneous differential equation of the second order, polynomial coefficient, polynomial solution, close-to-convex function.

1. Introduction and auxiliary results

An analytic univalent in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ function

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

is said to be convex if $f(\mathbb{D})$ is a convex domain. It is well known [1, p. 203] (see also [2, p. 8]) that the condition $\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ is necessary and sufficient for the convexity of f. A function f is said to be close-to-convex in $\mathbb{D}$ (W. Kaplan [3], see also [1, p. 583], [2, p. 11]) if there exists a convex in $\mathbb{D}$ function Φ such that

2020 Mathematics Subject Classification: 34M05, 30B10, 30C45

$\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Any close-to-convex function f has a characteristic property that the complement G of the domain $f(\mathbb{D})$ can be filled with rays which start from ∂G and lie in G. Every close-to-convex in $\mathbb{D}$ function f is univalent in $\mathbb{D}$ and, therefore, $f'(0) \neq 0$. Hence it follows that any function f is close-to-convex in $\mathbb{D}$ if and only if the function $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n$ is close-to-convex in $\mathbb{D}$, where $g_n = f_n/f_1$.

S. M. Shah [4] indicated conditions on real parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 of the differential equation

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0, \tag{2}$$

under which there exists an entire transcendental solution (1) such that f and all its derivatives are close-to-convex in $\mathbb{D}$. The investigations are continued in the papers [5–10], but in all of these papers the case of polynomial solutions of (2) was not investigated. In the papers [11–14] properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree are investigated. Some results from these papers are published also in monograph [2].

Here we consider a differential equation

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \tag{3}$$

with real parameters and study the existence and closeness-to-convexity of its polynomial solutions.

At first we remark that a function (1) is a solution of the differential equation (3) if and only if

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)f_n z^n + \beta_0 \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)f_{n-1}z^n + \gamma_0 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}z^n +$$
$$+\beta_1 \sum_{n=1}^{\infty} n f_n z^n + \gamma_1 \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}z^n + \gamma_2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2,$$

i. e.

$$\gamma_2 f_0 = \alpha_2, \quad (\beta_1 + \gamma_2)f_1 + \gamma_1 f_0 = \alpha_1, \quad (2 + 2\beta_1 + \gamma_2)f_2 + (\beta_0 + \gamma_1)f_1 + \gamma_0 f_0 = \alpha_0 \tag{4}$$

and for $n \geq 3$

$$(n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2)f_n + (\beta_0(n-1) + \gamma_1)f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = 0. \tag{5}$$

Clearly, by some condition differential equation (3) may have a linear solution, which obviously is convex function in $\mathbb{D}$. We are going to investigate a solutions of degree ≥ 2. In this case the following statement is true.

Lemma 1. *In order that the polynomial*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} f_n z^n, \quad \deg f = p \geq 2, \tag{6}$$

be a solution of the differential equation (3), *it is necessary that* $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$.

Proof. Indeed, for $n = p + 2$ from (5) we get

$$((p + 2)(p + \beta_1 + 1) + \gamma_2)f_{p+2} + ((p + 1)\beta_0 + \gamma_1)f_{p+1} + \gamma_0 f_p = 0.$$

If f has the form (6) then $f_{p+2} = f_{p+1} = 0$ and $f_p \neq 0$. Therefore, $\gamma_0 = 0$ and from (5) for $n = p + 1$ we obtain

$$((p + 1)(p + \beta_1) + \gamma_2)f_{p+1} + (p\beta_0 + \gamma_1)f_p = 0.$$

Since $f_{p+1} = 0$ and $f_p \neq 0$, it follows that $p\beta_0 + \gamma_1 = 0$. Lemma 1 is proved. □

By the condition $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$ from (4) and (5) we get

$$\gamma_2 f_0 = \alpha_2, \quad (\beta_1 + \gamma_2)f_1 = \alpha_1 + p\beta_0 f_0, \quad (2 + 2\beta_1 + \gamma_2)f_2 = \alpha_0 + (p - 1)\beta_0 f_1 \tag{7}$$

and for $3 \leq n \leq p$

$$(n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2)f_n = (p - n + 1)\beta_0 f_{n-1}. \tag{8}$$

We remark that the condition $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$ is not sufficient in order that a solution of differential equation (3) has the form (6). Indeed, although in view of (8) we have

$$((p + 3)(p + \beta_1 + 2) + \gamma_2)f_{p+3} = 0,$$

it does not follow from here that $f_{p+3} = 0$, since $(p + 3)(p + \beta_1 + 2) + \gamma_2$ can be equal to zero. Therefore, further we assume that

$$n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \neq 0, \quad 3 \leq n \leq p.$$

This condition allows us to rewrite the equality (8) in the form

$$f_n = \frac{(p - n + 1)\beta_0}{n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2} f_{n-1}, \quad n \geq 3, \tag{9}$$

whence it follows that $f_p = 0$, if $\beta_0 = 0$. Therefore, further we assume also that $\beta_0 \neq 0$.

To study the closeness-to-convexity of the polynomial (6), we will use the following criterion of Alexander [15, 16] (see also [2, p. 11]).

Lemma 2. *If*

$$1 \geq 2g_2 \geq 3g_3 \geq \cdots \geq pg_p > 0$$

then the polynomial $g(z) = \sum_{n=0}^{p} g_n z^n$ *is close-to-convex in* $\mathbb{D}$.

In view of (4) and (5) it is clear that the existence of a close-to-convex solution (6) of differential equation (3) depends on the equality to zero of the parameter γ_2. Therefore, we will consider two cases $\gamma_2 \neq 0$ and $\gamma_2 = 0$.

2. Closeness-to-convexity provided $\gamma_2 \neq 0$

From the first equality of (7) it follows that $f_0 = \alpha_2/\gamma_2$, and the second equality of (7) implies

$$(\beta_1 + \gamma_2)f_1 = \alpha_1 + p\beta_0\alpha_2/\gamma_2.$$

Since the condition $f_1 \neq 0$ is necessary for a closeness-to-convexity of f, from the last equality it follows that either $\beta_1 + \gamma_2 \neq 0$ and $\alpha_1 + p\beta_0\alpha_2/\gamma_2 \neq 0$ or

$$\beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1 + p\beta_0\alpha_2/\gamma_2 = 0.$$

In the first case we have $f_1 = \dfrac{\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}$, and if $2+2\beta_1+\gamma_2 \neq 0$ from the third equality (7) we obtain

$$f_2 = \frac{(p-1)\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)}.$$

Using these equalities and equality (9) we prove the following theorem.

Theorem 1. *Let $p \geq 3$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$, $\beta_1 + \gamma_2 \neq 0$, $\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2 \neq 0$ and*

$$0 < \frac{(p-1)\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{(\gamma_2\alpha_1 + p\beta_0\alpha_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)} \leq \frac{1}{2}. \tag{10}$$

If for all $3 \leq n \leq p$

$$0 < \frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} \leq \frac{n-1}{n} \tag{11}$$

then differential equation (3) has a close-to-convex in $\mathbb{D}$ polynomial solution

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} z + \\ + \frac{(p-1)\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n \end{aligned} \tag{12}$$

where the coefficients f_n satisfy (9).

If $\beta_0 > 0$, $2+\beta_1 > 0$ and either $\gamma_2 > 0$ and $(p-2)\beta_0 \leq 2+\beta_1$ or $-3(2+\beta_1) < \gamma_2 < 0$ and $3(p-2)\beta_0 \leq 3(2+\beta_1)+\gamma_2$ then differential equation (3) has a polynomial solution (12) close-to-convex in $\mathbb{D}$ together with all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$.

Proof. Let $g(z) = z + \sum_{n=2}^{p} g_n z^n$, where $g_n = f_n/f_1$. In view of (9), (10) and (11) $f_2/f_1 > 0$ and $f_n/f_1 > 0$ for all $3 \leq n \leq p$, i. e. $g_n > 0$ for all $2 \leq n \leq p$. From (10) it follows also that $2g_2 \leq 1$, and (9) and (11) imply $ng_n \leq (n-1)g_{n-1}$ for all $3 \leq n \leq p$. Therefore, by Lemma 2 the function g and, thus, the function f are close-to-convex in $\mathbb{D}$. The first part of Theorem 1 is proved.

Now suppose that the condition

$$0 < \frac{(p-(n+j)+1)\beta_0}{(n+j)(n+j+\beta_1-1)+\gamma_2} \leq \frac{n-1}{n+j} \tag{13}$$

holds for some $1 \leq j \leq p-2$ and all $2 \leq n \leq p-j$ and show that the derivative $f^{(j)}$ of function (12) is close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Indeed, for $1 \leq j \leq p-2$ the derivative

$$f^{(j)}(z) = j!f_j + (j+1)!f_{j+1}z + \sum_{n=2}^{p-j}(n+1)(n+2)\ldots(n+j)f_{n+j}z^n.$$

is close-to-convex in $\mathbb{D}$ if and only if the function

$$g_j(z) = z + \sum_{n=2}^{p-j} g_{n,j} z^n, \quad g_{n,j} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+j)f_{n+j}}{(j+1)!f_{j+1}},$$

is close-to-convex in $\mathbb{D}$. For the function g_j the inequality $2g_{2,j} \le 1$ is equivalent to the inequality

$$\frac{(p-j-1)\beta_0}{(j+2)(j+\beta_1+1)+\gamma_2} \le \frac{1}{j+2}$$

which follows from the condition (13) with $n=2$. If $3 \le n \le p-j$ then the inequality $ng_{n,j} \le (n-1)g_{n-1,j}$ is equivalent to condition (13). Therefore, by Lemma 2 the function g_j and, thus, the function $f^{(j)}$ are close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Now suppose that $\beta_0 > 0$, $2+\beta_1 > 0$ and $\gamma_2 > 0$. Then condition (11) holds for all $3 \le n \le p$ if $\frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)} \le \frac{n-1}{n}$, i. e. $\frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1-1)} \le 1$. Since the left part of the last inequality decreases, this inequality holds if $\frac{(p-2)\beta_0}{2(2+\beta_1)} \le 1$, i. e. $(p-2)\beta_0 \le 2+\beta_1$. Similarly, condition (13) holds for all $1 \le j \le p-2$ and $2 \le n \le p-j$ if $\frac{(p-(n+j)+1)\beta_0}{(n-1)(n+j+\beta_1-1)} \le 1$ and the last inequality is true if $\frac{(p-2)\beta_0}{2+\beta_1} \le 1$, i. e. $(p-2)\beta_0 \le 2(2+\beta_1)$.

Finally, let $\beta_0 > 0$, $2+\beta_1 > 0$ and $\gamma_2 < 0$. Then for all $3 \le n \le p$

$$\frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} = \frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1-|\gamma_2|/n)} \le \frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1-|\gamma_2|/3)}.$$

Therefore, (11) holds for all $3 \le n \le p$ if

$$\frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1-1-|\gamma_2|/3)} \le 1,$$

whence as above it follows that (11) holds for all $3 \le n \le p$ if $\frac{(p-2)\beta_0}{2(2+\beta_1+\gamma_2/3)} \le 1$, i. e. $-3(2+\beta_1) < \gamma_2 < 0$ and $\frac{3}{2}(p-2)\beta_0 \le 3(2+\beta_1)+\gamma_2$. Similarly we prove that condition (13) holds for all $1 \le j \le p-2$ and $2 \le n \le p-j$ if $\frac{(p-2)\beta_0}{2+\beta_1+\gamma_2/3} \le 1$, i. e. $-3(2+\beta_1) < \gamma_2$ and $3(p-2)\beta_0 \le 3(2+\beta_1)+\gamma_2$. Thus, for all $1 \le j \le p-2$ the derivative $f^{(j)}$ is close-to-convex in $\mathbb{D}$. Since the derivative $f^{(p-1)}$ is a linear function, the proof of Theorem 1 is complete. □

Now we consider the case

$$\beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1 + p\beta_0\alpha_2/\gamma_2 = 0.$$

From the second equality (7) it follows that f_1 may be arbitrary. If we choose $f_1 = 1$ then under the condition $2+\beta_1 \ne 0$ in view of the third equality (7) we get

$$f_2 = \frac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2+\beta_1}.$$

From (8) under the condition $n+\beta_1 \ne 0$ we obtain

$$f_n = \frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1)} f_{n-1}, \quad 3 \le n \le p. \tag{14}$$

Theorem 2. *Let $p \geq 3$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2 = 0$ and*

$$0 < \frac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2+\beta_1} \leq \frac{1}{2}. \tag{15}$$

If for all $3 \leq n \leq p$

$$0 < \frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1)} \leq \frac{n-1}{n} \tag{16}$$

then differential equation (3) has a close-to-convex in $\mathbb{D}$ polynomial solution

$$f(z) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + z + \frac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2+\beta_1} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n \tag{17}$$

where the coefficients f_n satisfy (14).

If $\beta_0 > 0$, $2+\beta_1 > 0$ and $3(p-2)\beta_0 \leq 2(3+\beta_1)$ then differential equation (3) has polynomial solution (17), which together with its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ are close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Proof. From (14) and (16) the inequality $f_n > 0$ follows for all n. Condition (15) implies the inequality $2f_2 \leq 1$ and condition (16) implies $nf_n \leq (n-1)f_{n-1}$ for all $3 \leq n \leq p$. Therefore, by Lemma 2 the function f is close-to-convex in $\mathbb{D}$. The first part of Theorem 2 is proved.

Now we suppose the condition

$$0 < \frac{(p-(n+j)+1)\beta_0}{(n+j-1)(n+j+\beta_1)} \leq \frac{n-1}{n+j} \tag{18}$$

holds for some $1 \leq j \leq p-2$ and all $2 \leq n \leq p-j$. The proof of the closeness-to-convexity of the derivative $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-2)$ is the same as the proof in Theorem 1. Note only that the inequality $2g_{2,j} \leq 1$ is equivalent to the inequality

$$\frac{(p-j-1)\beta_0}{j+2+\beta_1} \leq \frac{j+1}{j+2},$$

which follows from condition (18) for $n = 2$, and the inequality $ng_{n,j} \leq (n-1)g_{n-1,j}$ coincides with condition (18).

Let $\beta_0 > 0$ and $2+\beta_1 > 0$. Since the values

$$\frac{(p-n+1)\beta_0}{n+\beta_1}, \quad \frac{n}{(n-1)^2}, \quad \frac{n+j}{(n-1)(n+j-1)}$$

decrease with the increasing of n and the value

$$\frac{(2+j)(p-j-1)\beta_0}{(j+1)(j+2+\beta_1)}$$

decreases with the increasing of j, conditions (16) and (18) hold if $\dfrac{3(p-2)\beta_0}{2(3+\beta_1)} \leq 1$, i. e. $3(p-2)\beta_0 \leq 2(3+\beta_1)$. Thus, for all $1 \leq j \leq p-2$ the derivative $f^{(j)}$ is close-to-convex in $\mathbb{D}$. Since the derivative $f^{(p-1)}$ is a linear function, the proof of Theorem 2 is complete. □

3. Closeness-to-convexity provided $\gamma_2 = 0$

Now (7) implies $\alpha_2 = 0$ and, thus, f_0 may be arbitrary. If we choose $f_0 = 0$ then from (7) and (9) we get

$$\beta_1 f_1 = \alpha_1, \quad 2(1+\beta_1)f_2 = \alpha_0 + (p-1)\beta_0 f_1, \tag{19}$$

and for $3 \le n \le p$

$$f_n = \frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)} f_{n-1}. \tag{20}$$

Since for the close-to-convex function $f_1 \ne 0$, from the first equality of (19) it follows that either $\beta_1 \ne 0$ and $\alpha_1 \ne 0$ or $\beta_1 = \alpha_1 = 0$. In the first of these cases the following theorem holds.

Theorem 3. *Let $p \ge 3$, $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + p\beta_0 = 0$, $\beta_1 \ne 0, \alpha_1 \ne 0$ and*

$$0 < \frac{(p-1)\beta_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1}{\alpha_1(1+\beta_1)} \le 1 \tag{21}$$

If for all $3 \le n \le p$

$$0 < \frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1-1)} \le 1 \tag{22}$$

then differential equation (3) has a close-to-convex in $\mathbb{D}$ polynomial solution

$$f(z) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} z + \frac{(p-1)\beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0}{2\beta_1(1+\beta_1)} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n \tag{23}$$

where the coefficients f_n satisfy (20).

If $\beta_0 > 0$, $2+\beta_1 > 0$ and $(p-2)\beta_0 \le 2+\beta_1$ then differential equation (3) has a polynomial solution (23) close-to-convex in $\mathbb{D}$ together with its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \le j \le$ $\le p-1)$.

Proof. Suppose that the function g is defined as in the proof of Theorem 1. In view of (20), (21) and (22) $f_2/f_1 > 0$ and $f_n/f_1 > 0$ for all $3 \le n \le p$, i. e. $g_n > 0$ for all $2 \le n \le p$. From (21) it follows also that $2g_2 \le 1$, and (22) and (20) imply $ng_n \le (n-1)g_{n-1}$ for all $3 \le n \le p$. Therefore, by Lemma 2 the function g and, thus, the function (23) are close-to-convex in $\mathbb{D}$. The first part of Theorem 3 is proved.

Now we suppose that

$$0 < \frac{(p-(n+j)+1)\beta_0}{(n-1)(n+j+\beta_1-1)} \le 1 \tag{24}$$

holds for some $1 \le j \le p-2$ and for all $2 \le n \le p-j$. Then the proof of the close-to-convexity of the derivative $f^{(j)}$ is the same as the proof in Theorem 1. Note only the inequality $2g_{2,j} \le 1$ is equivalent to the inequality $\dfrac{(p-j-1)\beta_0}{j+1+\beta_1} \le 1$, which follows from condition (24) for $n = 2$, and the inequality $ng_{n,j} \le (n-1)g_{n-1,j}$ coincides with condition (24).

It is easy to check that if $\beta_0 > 0$, $2+\beta_1 > 0$ then condition (22) holds for all $3 \le n \le p$ if $\dfrac{(p-2)\beta_0}{2(2+\beta_1)} \le 1$, and (24) holds for all $1 \le j \le p-2$ and all $2 \le n \le p-1$ if $\dfrac{(p-2)\beta_0}{2+\beta_1} \le 1$, i.e. $(p-2)\beta_0 \le 2+\beta_1$. The proof of Theorem 3 is complete. □

In the second case the following theorem is true.

Theorem 4. *Let* $p \ge 3$, $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + p\beta_0 = \beta_1 = \alpha_1 = 0$ *and* $0 < \alpha_0 + (p-1)\beta_0 \le \le 1$. *If* $0 < (p-n+1)\beta_0 < (n-1)^2$ *for all* $3 \le n \le p$ *then differential equation* (3) *has a close-to-convex in* $\mathbb{D}$ *polynomial solution*

$$f(z) = z + \frac{(p-1)\beta_0 + \alpha_0}{2} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n \tag{25}$$

where the coefficients f_n *satisfy* (20) *with* $\beta_1 = 0$.

If $0 < (p-2)\beta_0 \le 2$ *then differential equation* (3) *has polynomial solution* (25) *close-to-convex in* $\mathbb{D}$ *together with its derivatives* $f^{(j)}$ $(1 \le j \le p-1)$.

Proof. From the conditions $0 < \alpha_0 + (p-1)\beta_0 \le 1$ and $0 < (p-n+1)\beta_0 < (n-1)^2$ for all $3 \ge n \ge p$ in view of (20) with $\beta_1 = 0$ it follows as above that all $f_n > 0$, $2f_2 \le 1$ and $nf_n \le (n-1)f_{n-1}$ for all $3 \le n \le p$. Therefore, by Lemma 2 the function (25) is close-to-convex in $\mathbb{D}$. The first part of Theorem 4 is proved.

Now we suppose that

$$0 < (p-(n+j)+1)\beta_0 \le (n-1)(n+j-1)$$

for some $1 \le j \le p-2$ and all $2 \le n \le p-j$. Then the proof of the close-to-convexity of the derivative $f^{(j)}$ is the same as the proof in Theorem 1. Note only the inequality $2g_{2,j} \le 1$ is equivalent to the inequality $\dfrac{(p-j-1)\beta_0}{j+1} \le 1$, which follows from condition

$$0 < (p-(n+j)+1)\beta_0 \le (n-1)(n+j-1)$$

for $n = 2$, and the inequality $ng_{n,j} \le (n-1)g_{n-1,j}$ coincides with this condition. Hence as in the proof of Theorem 3 we get the second part of Theorem 4. □

4. Other results

The condition $p \ge 3$ in the proved theorems is not significant. Repeating the proofs of these theorems one can show that the following analogues of these theorems are hold for $p = 2$.

Proposition 1. *Let* $\gamma_2 \ne 0$, $\gamma_0 = 2\beta_0 + \gamma_1 = 0$, $\beta_1 + \gamma_2 \ne 0$, $\alpha_1\gamma_2 + 2\beta_0\alpha_2 \ne 0$, $2 + 2\beta_1 + +\gamma_2 \ne 0$ *and*

$$0 < \frac{\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + 2\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{(\gamma_2\alpha_1 + 2\beta_0\alpha_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)} \le \frac{1}{2}.$$

Then differential equation (3) *has a polynomial solution*

$$f(z) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\alpha_1\gamma_2 + 2\beta_0\alpha_2}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} z + \frac{\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + 2\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)} z^2$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Proposition 2. *Let $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_0 = 2\beta_0 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1\gamma_2 + 2\beta_0\alpha_2 = 0$, $2+\beta_1 \neq 0$ and $0 < \dfrac{\alpha_0+\beta_0}{2+\beta_1} \leq \dfrac{1}{2}$. Then differential equation (3) has a polynomial solution*

$$f(z) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + z + \frac{\alpha_0+\beta_0}{2+\beta_1}z^2$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Proposition 3. *Let $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + 2\beta_0 = 0$, $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $1+\beta_1 \neq 0$ and $0 < \dfrac{\beta_0\alpha_1+\alpha_0\beta_1}{\alpha_1(1+\beta_1)} \leq 1$. Then differential equation (3) has a polynomial solution*

$$f(z) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}z + \frac{\beta_0\alpha_1+\beta_1\alpha_0}{2\beta_1(1+\beta_1)}z^2$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Proposition 4. *Let $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + 2\beta_0 = \beta_1 = \alpha_1 = 0$ and $0 < \alpha_0 + \beta_0 \leq 1$. Then differential equation (3) has a polynomial solution*

$$f(z) = z + \frac{\beta_0+\alpha_0}{2}z^2$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Recall that before obtaining the above results we demanded the fulfillment of conditions (9) and $\beta_0 \neq 0$. Now suppose that $\beta_0 = 0$. Then by Lemma 2 $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$, and thus, from (7) and (8) we get

$$\gamma_2 f_0 = \alpha_2, \quad (\beta_1+\gamma_2)f_1 = \alpha_1, \quad (2+2\beta_1+\gamma_2)f_2 = \alpha_0 \tag{26}$$

and for $3 \leq n \leq p$

$$(n(n+\beta_1-1)+\gamma_2)f_n = 0. \tag{27}$$

From (27) it follows that if $p(p+\beta_1-1)+\gamma_2 = 0$ then $f_p \neq 0$ may be arbitrary. Two cases are possible: 1) $n(n+\beta_1-1)+\gamma_2 \neq 0$ for all $3 \leq n \leq p$ and 2) there is $3 \leq p_1 < p$ such that $p_1(p_1+\beta_1-1)+\gamma_2 = 0$.

In the first case we have $f_{p-1} = 0$ provided $p > 3$ and it is impossible to use Alexander's criterion. In the second case we have $p_1 p = \gamma_2$ and $p_1 + p = 1-\beta_1$. Therefore, if either $p_1 > 3$ or $p > p_1 + 1$ then again we cannot apply Alexander's criterion. Thus, we can apply Alexander's criterion if either $n(n+\beta_1-1)+\gamma_2 \neq 0$ for all $3 \leq n \leq p$ and $p = 3$ or $p_1(p_1+\beta_1-1)+\gamma_2 = 0$ for some $3 \leq p_1 < p$ and $p_1 = 3$, $p = 4$.

Given the possible value of the parameter γ_2, using (26) and choosing $f_3 = 2f_2/3$, you can prove the following statement.

Proposition 5. *Let $\beta_0 = \gamma_0 = \gamma_1 = 0$, $p = 3$ and $3(2+\beta_1)+\gamma_2 = 0$. Then:*

1) *if $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 3$ and $\gamma_2 \neq 6$, $\alpha_1 \neq 0$ and $0 < \dfrac{\alpha_0(\gamma_2-3)}{\alpha_1(\gamma_2-6)} \leq \dfrac{1}{4}$ then differential equation (3) has a polynomial solution*

$$f(z) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{3\alpha_1}{2(\gamma_2-3)}z + \frac{3\alpha_0}{\gamma_2-6}z^2 + \frac{2\alpha_0}{\gamma_2-6}z^3$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$;

2) *if* $\gamma_2 = 3$, $\alpha_1 = 0$ *and* $-\frac{1}{2} \le \alpha_0 < 0$ *then differential equation* (3) *has a polynomial solution*
$$f(z) = \alpha_2/3 + z - \alpha_0 z^2 - 2\alpha_0 z^3/3$$
close-to-convex in $\mathbb{D}$*;*
3) *if* $\gamma_2 = 6$, $\alpha_0 = 0$ *and* $\alpha_1 \ne 0$ *then differential equation* (3) *has a polynomial solution*
$$f(z) = \frac{\alpha_2}{6} + \frac{\alpha_1}{2}z + \frac{\alpha_1}{4}z^2 + \frac{\alpha_1}{6}z^3$$
close-to-convex in $\mathbb{D}$*;*
4) *if* $\gamma_2 = \alpha_2 = 0$ *and* $0 < \alpha_0/\alpha_1 \le 1/2$ *then differential equation* (3) *has a polynomial solution*
$$f(z) = -\alpha_1 z/2 - \alpha_0 z^2/2 - \alpha_0 z^3/3$$
close-to-convex in $\mathbb{D}$.

In the case when $3(2+\beta_1)+\gamma_2 = 0$ and $4(3+\beta_1)+\gamma_2 = 0$ (i. e. $p_1 = 3$, $p = 4$) from (26) we get $f_0 = \alpha_2/12$, $f_1 = \alpha_1/6$, $f_2 = \alpha_0/2$, and choosing $f_3 = \alpha_0/3$, $f_4 = \alpha_0/4$ we obtain the following statement.

Proposition 6. *If* $\gamma_2 = 12$, $\beta_0 = \gamma_0 = \gamma_1 = 0$, $0 < \alpha_0/\alpha_1 < 1/6$,
$$3(2+\beta_1)+\gamma_2 = 4(3+\beta_1)+\gamma_2 = 0$$
then differential equation (3) *has a polynomial solution*
$$f(z) = \frac{\alpha_2}{12} + \frac{\alpha_1}{6}z + \frac{\alpha_0}{2}z^2 + \frac{\alpha_0}{3}z^3 + \frac{\alpha_0}{4}z^4$$
close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Finally, we remark that polynomial (6) can be close-to-convex in the case when $f_2 = \dots = f_{p-1} = 0$. Since each starlike function is close-to-convex, it follows from such a lemma.

Lemma 3. *If* $|\alpha| \le 1/p$ *then the polynomial* $f(z) = z + \alpha z^p$ *is a starlike function.*

Proof. Recall that an analytic univalent in $\mathbb{D}$ function $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ is said to be starlike if $f(\mathbb{D})$ is starlike domain with respect to the origin. It is well known [1, p. 202] (see also [2, p. 9]) that the condition $\operatorname{Re}\{zf'(z)/f(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ is necessary and sufficient for the starlikeness of f. If $f(z) = z + \alpha z^p$ then for $|\alpha| \le 1/p$ and $|z| < 1$ we have
$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{(p-1)\alpha z^{p-1}}{1+\alpha z^{p-1}}\right\} \ge 1 - \left|\frac{(p-1)\alpha z^{p-1}}{1+\alpha z^{p-1}}\right| > 1 - \frac{(p-1)|\alpha|}{1-|\alpha|} \ge 0,$$
i. e. the function $f(z) = z + \alpha z^p$ starlike and, thus, close-to-convex. Lemma 3 is proved.

Suppose that $\gamma_2 \ne 0$,
$$\alpha_2 = \alpha_0 + (p-1)\beta_0 = p(p+\beta_1-1)+\gamma_2 = 0,$$
$\beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1$ and $n(n+\beta_1-1)+\gamma_2 \ne 0$ for all $n = 1, 2, \dots, p-1$. Then in view of (7) $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 0$ and in view of (8) $f_3 = \dots = f_{p-1} = 0$. Choosing $f_p = 1/p$ and using Lemma 3 we get the following statement.

Proposition 7. *If* $\gamma_2 \neq 0$,

$$\alpha_2 = \alpha_0 + (p-1)\beta_0 = p(p+\beta_1-1) + \gamma_2 = 0$$

and $n(n+\beta_1-1)+\gamma_2 \neq 0$ *for all* $n = 1, 2, \ldots, p-1$ *then differential equation* (3) *has a polynomial solution* $f(z) = z + z^p/p$ *close-to-convex in* $\mathbb{D}$.

References

1. G. M. Golusin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, 1969.
2. M. M. Sheremeta, *Geometric properties of analytic solutions of differential equations*, Publisher I. E. Chyzhykov, Lviv, 2019.
3. W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J. **1** (1952), no. 2, 169–185. DOI: 10.1307/mmj/1028988895
4. S. M. Shah, *Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II*, J. Math. Anal. Appl. **142** (1989), no. 2, 422–430. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90011-5
5. Z. M. Sheremeta, *Close-to-convexity of entire solutions of a differential equation*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **42** (1999), no. 3, 31–35 (in Ukrainian).
6. З. М. Шеремета, *О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **36** (2000), no. 8, 1045–1050; **English version:** Z. M. Sheremeta, *The properties of entire solutions of one differential equation*, Differ. Equ. **36** (2000), no. 8, 1155–1161. DOI: 10.1007/BF02754183
7. Z. M. Sheremeta, *On entire solutions of a differential equation*, Mat. Stud. **14** (2000), no. 1, 54–58.
8. Z. M. Sheremeta, *On the close-to-convexity of entire solutions of a differential equation*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **58** (2000), 54–56 (in Ukrainian).
9. З. М. Шеремета, М. Н. Шеремета, *Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **38** (2002), no. 4, 477—481; **English version:** Z. M. Sheremeta and M. N. Sheremeta, *Closeness to convexity for entire solutions of a differential equation*, Differ. Equ. **38** (2002), no. 4, 496—501. DOI: 10.1023/A:1016355531151
10. Z. M. Sheremeta and M. M. Sheremeta, *Convexity of entire solutions of one differential equation*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **47** (2004), no. 2, 186–191 (in Ukrainian).
11. Ya. S. Mahola and M. M. Sheremeta, *Properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree*, Mat. Stud. **30** (2008), no. 2, 153–162.
12. Ya. S. Mahola and M. M. Sheremeta, *Close-to-convexity of entire solution of a linear differential equation with polynomial coefficients*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **70** (2009), 122–127 (in Ukrainian).
13. Я. С. Магола, М. М. Шеремета, *Про властивості цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами*, Мат. методи фіз.-мех. поля **53** (2010), no. 4, 62–74: **English version:** Ya. S. Magola and M. M. Sheremeta, *On properties of entire solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, J. Math. Sci. (New York) **181** (2012), no. 3, 366–382. DOI: 10.1007/s10958-012-0691-9
14. Ya. S. Mahola, *On entire solutions with two-member reccurent formula for Taylor coefficients of linear differential equation*, Mat. Stud. **36** (2011), no. 2, 133–141.
15. J. F. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. Math. (2) **17** (1915), no. 1, 12–22. DOI: 10.2307/2007212.

16. A. W. Goodman, *Univalent function*, Vol. **II**, Mariner Publishing Co., 1983.

Стаття: надійшла до редколегії 12.08.2020
доопрацьована 17.08.2020
прийнята до друку 17.11.2021

БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ МНОГОЧЛЕННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З МНОГОЧЛЕННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

Мирослав ШЕРЕМЕТА, Юрій ТРУХАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com, yurkotrukhan@gmail.com

Аналітична однолиста в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ - опукла область, і називається близькою до опуклої, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0$ $(z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f є однолистою в $\mathbb{D}$, і отже, $f'(0) \neq 0$. Тому функція f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і тільки тоді, коли функція $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n$ близька до опуклої в $\mathbb{D}$, де $g_n = f_n/f_1$. С.М. Шах визначив умови на дійсні параметри β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2, за яких диференціальне рівняння $z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z) w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2) w = 0$ має цілі розв'язки, які разом зі своїми похідними близькі до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями. Багато авторів продовжили ці дослідження. Тут розглядається неоднорідне рівняння Шаха $z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z) w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2) w = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2$ з дійсними параметрами і вивчається існування близьких до опуклих його многочленних розв'язків. Неважко довести, що для того, щоб многочлен $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{p} f_n z^n$, $(\deg f = p \geq 2)$ був розв'язком цього рівняння, необхідно, щоб $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$. Основні такі результати:
1) якщо $p \geq 3$, $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$, $\beta_1 + \gamma_2 \neq 0$, $\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2 \neq 0$, $\beta_0 > 0$, $2 + \beta_1 > 0$,

$$0 < \frac{(p-1)\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1 + \gamma_2)}{(\gamma_2\alpha_1 + p\beta_0\alpha_2)(2 + 2\beta_1 + \gamma_2)} \leq \frac{1}{2}$$

і або $\gamma_2 > 0$ та $(p-2)\beta_0 \leq 2 + \beta_1$, або $-3(2+\beta_1) < \gamma_2 < 0$ та $3(p-2)\beta_0 \leq 3(2+\beta_1) + \gamma_2$, то неоднорідне рівняння Шаха має многочленний розв'язок $f(z) = \dfrac{\alpha_2}{\gamma_2} + \dfrac{\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2}{\gamma_2(\beta_1 + \gamma_2)} z + \dfrac{(p-1)\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1 + \gamma_2)}{\gamma_2(\beta_1 + \gamma_2)(2 + 2\beta_1 + \gamma_2)} z^2 + \sum\limits_{n=3}^{p} f_n z^n$, де $f_n = \dfrac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-1}$ для $3 \leq n \leq p$, який разом з усіма своїми похідними $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$, близькими до опуклих в $\mathbb{D}$

функціями;
2) якщо $p \geq 3$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2 = 0$, $\beta_0 > 0$, $2 + \beta_1 > 0$, $3(p-2)\beta_0 \leq 2(3 + \beta_1)$ і $0 < \dfrac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2 + \beta_1} \leq \dfrac{1}{2}$, то неоднорідне рівняння Шаха має многочленний розв'язок $f(z) = \dfrac{\alpha_2}{\gamma_2} + z + \dfrac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2 + \beta_1} z^2 + \sum\limits_{n=3}^{p} f_n z^n$, де $f_n = \dfrac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1)} f_{n-1}$ для $3 \leq n \leq p$, який разом з усіма своїми похідними $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями;
3) якщо $p \geq 3$, $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + p\beta_0 = 0$, $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_0 > 0$, $2 + \beta_1 > 0$, $(p-2)\beta_0 \leq 2 + \beta_1$ і $0 < \dfrac{(p-1)\beta_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1}{\alpha_1(1+\beta_1)} \leq 1$, то неоднорідне рівняння Шаха має многочленний розв'язок $f(z) = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} z + \dfrac{(p-1)\beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0}{2\beta_1(1+\beta_1)} z^2 + \sum\limits_{n=3}^{p} f_n z^n$, де $f_n = \dfrac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)} f_{n-1}$ для $3 \leq n \leq p$, який разом з усіма своїми похідними $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями;
4) якщо $p \geq 3$, $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + p\beta_0 = \beta_1 = \alpha_1 = 0$, $(p-2)\beta_0 \leq 2$ і $0 < \alpha_0 + (p-1)\beta_0 \leq 1$, то неоднорідне рівняння Шаха має многочленний розв'язок $f(z) = z + \dfrac{(p-1)\beta_0 + \alpha_0}{2} z^2 + \sum\limits_{n=3}^{p} f_n z^n$, де $f_n = \dfrac{(p-n+1)\beta_0}{n(n-1)} f_{n-1}$ для $3 \leq n \leq p$, який разом з усіма своїми похідними $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями.

Ключові слова: лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, многочленні коефіцієнти, многочленний розв'язок, близька до опуклої функція.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 105–112
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 105–112
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.105-112

УДК 517.95

OPTIMAL AGE CONTROL OF BIO-POPULATION DYNAMICS

Volodymyr KYRYLYCH, Olha MILCHENKO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: vkyrylych@ukr.net, olga.milchenko@lnu.edu.ua

The object of this paper is the problem of optimal control of a semi-linear system of two first-order hyperbolic equations with integral constraints. Using the method of characteristics and the maximum principle the necessary conditions for optimality are obtained.

Key words: optimal control, hyperbolic system, method of characteristics, needle variation, bio-population theory

1. Introduction

Based on the classical McKendrick-von Foerster [9, 12] model of bio-population dynamics, mathematical models for the age structure of the population itself are widely used in modern conditions. Such problems also arise in studies of the reproduction and spread of epidemics, drug addiction [1]–[4], socio-economic and economic processes [7, 8, 10], etc.

In this paper we consider an optimal control problem for the competing populations dynamics [11], which is described by a system of two hyperbolic equations [5], for which the control function is subject to an integral constraint [2, 5]. To obtain a necessary condition of the optimal control, the method of characteristics and the formula for the increment of the target functional on the needle variation of the admissible control have been used.

2. Statement of the problem

In the domain $(x,t) \in \Pi = (0,l) \times (0,T)$, consider the process of population development, which evolution in space and time is described by the system of two hyperbolic

---

2020 Mathematics Subject Classification: 18A22 first-order equations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial y_1(x,t)}{\partial x} &= -\mu(x) y_1(x,t), \\ \dfrac{\partial y_2(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial y_2(x,t)}{\partial x} &= -y_1(x,t) y_2(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

where $y = (y_1, y_2) : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^2$.

For system (1) set the initial and boundary conditions:

$$y_1(x,0) = \nu_1(x), \quad y_2(x,0) = \nu_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

$$y_1(0,t) = \lambda(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$y_2(0,t) = \beta(t) \int\limits_{x_1}^{x_2} K(x) u(x) y_2(x,t) dx, \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Here $\mu(x)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$, $\beta(t)$, $K(s)$ are standard bio-population parameters [2, 5]. For example, when (4) describes the individuals fertility process, then $K(x)$ is the fraction of females in the population process. The control function here is $u = u(x)$, which sets the age distribution of the reproductive period of females ($0 < x_1 < x_2 = l$) [2].

Let us choose minimization of the functional

$$I[u] = \int\limits_0^l \varphi(y_1(x,T), y_2(x,T), x) dx. \tag{5}$$

as the target.

The problem (1)-(5) will be investigated under the following assumptions:

A1) $u, K \in C^1[x_1, x_2]$; in addition, we will assume that $u(x) \equiv 0$, $K(x) \equiv 0$, if $x \notin [x_1, x_2]$;
A2) $\nu_i \in C^1[0,l], i = 1,2$, and $\lambda \in C^1[0,T]$;
A3) $\mu \in C[0,l]$;
A4) $\varphi, \varphi'_{y_i} \in C(\overline{\Pi} \times \overline{\Pi} \times [0,l]), i = 1,2$;
A5) zero-order agreement conditions $\nu_1(0) = \lambda(0)$,

$$\nu_2(0) = \beta(0) \int\limits_{x_1}^{x_2} K(s) u(s) \nu_2(s) ds$$

are fulfilled;

A6) $\int\limits_0^l \mu(x) dx = +\infty, \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x) dx = 1.$

(the fulfillment of conditions **A6**) ensures the natural parameters of the population, e.g. the first of conditions of **A6**) guarantees the zero density of individuals in the population if their age exceeds the maximal limit l [3]).

Remark 1. Usually, in applied economic problems the function $\beta(t)$ is understood as $\beta(t) = e^{-\rho t} g(t)$, where ρ is a discount rate, g is a bounded function on $[0, T]$.

3. Generalized solution of the problem

Let $\xi = \tau + x - t$ be the characteristic equation of the system (1), i.e. the solution of the Cauchy problem $\dfrac{d\xi}{d\tau} = 1$, $\xi(t) = x$, $(x,t) \in \overline{\Pi}$. Then, integrating (1) in the corresponding boundaries along the characteristics, we obtain

$$(6) \qquad y_1(x,t) = \begin{cases} \lambda(t-x)\exp\Big(-\int\limits_0^x \mu(\sigma)d\sigma\Big), & x \leqslant t, \\ \nu_1(x-t)\exp\Big(-\int\limits_{x-t}^x \mu(\sigma)d\sigma\Big), & x > t, \end{cases}$$

$$(7) \qquad y_2(x,t) = \begin{cases} \beta(t-x)\int\limits_{x_1}^{x_2} K(r)u(r)y_2(r,t-x)dr \cdot \exp\Bigg(-\lambda(t- \\ -x)\int\limits_0^x \exp\Big(-\int\limits_0^\rho \mu(\sigma)d\sigma\Big)\Bigg)d\rho, & x \leqslant t, \\ \nu_2(x-t)\exp\Bigg(-\nu_1(x-t)\int\limits_0^t \exp\Big(-\int\limits_{x-t}^\rho \mu(\sigma)d\sigma\Big)\Bigg)d\rho, & x > t. \end{cases}$$

Definition 1. By generalized solution of the problem (1)–(4), that corresponds to the control u, we mean the vector function $y = (y_1, y_2) \in \Big(C(\overline{\Pi})\Big)^2$ whose components satisfy relations (6), (7) in $\overline{\Pi}$, if the conditions **A1**)–**A6**) are fulfilled.

Remark 2. The fulfillment of conditions **A5**) guarantees the continuity of solution of problem (1)–(5) when passing through the characteristic $x = t$, besides, the second condition of **A5**) represents an additional integral constraint on the control u.

4. The optimality condition

Consider the formula of the increment of the functional (5) $\triangle I(u) = I(\tilde{u}) - I(u)$ on admissible processes $\{u, y_1, y_2\}$ and $\{\tilde{u} = u + \triangle u, \tilde{y}_1 = y_1 + \triangle y_1, \tilde{y}_2 = y_2 + \triangle y_2\}$ [2, 6, 10]. The functions $\triangle y_i = \triangle y_i(x,t), i = 1,2$ are the solution of mixed problem

$$(8) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial \triangle y_1}{\partial t} + \frac{\partial \triangle y_1}{\partial x} = -\mu(x)\triangle y_1, \quad (x,t) \in \Pi, \\ \triangle y_1(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \triangle y_1(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \frac{\partial \triangle y_2}{\partial t} + \frac{\partial \triangle y_2}{\partial x} = -\triangle y_1 \triangle y_2, \quad (x,t) \in \Pi, \end{gathered}$$

$$\triangle y_2(0,t) = \beta(t)\int\limits_{x_1}^{x_2} K(r)\{\tilde{u}(r)\tilde{x}_2(r,t) - u(r)x_2(r,t)\}dr, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9}$$

Then, taking into account (8)–(9), we write the formula of the increment of the functional

$$\triangle I(u) = I(\tilde{u}) - I(u) = \int\limits_0^l \triangle\varphi(y_1(x,T), y_2(x,t), x)dx+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^T \left\{\psi_1(x,t)\left[\frac{\partial\triangle y_1}{\partial t}+\frac{\partial\triangle y_1}{\partial x}+\mu(x)\triangle y_1\right]+\psi_2(x,t)\left[\frac{\partial\triangle y_2}{\partial t}+\frac{\partial\triangle y_2}{\partial x}+\triangle y_1\triangle y_2\right]\right\}dtdx,$$

where $\triangle\varphi = \varphi(\tilde{y}_1(x,T), \tilde{y}_2(x,T), x) - \varphi(y_1(x,T), y_2(x,T), x)$, and $\psi_i(x,t),\ i = 1,2$, are now arbitrary smooth in $\overline{\Pi}$ functions.

Let us perform the standard transformations for such cases (using Taylor formula, integration by parts, etc.).

First of all, we develop $\triangle\varphi$ by the Taylor formula into a series, singling out the linear part, namely

$$\triangle\varphi(y_1(x,T), y_2(x,T), x) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\triangle y_1(x,T) + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\triangle y_2(x,T) + o_\varphi(|\triangle y_1|, |\triangle y_2|),$$

where $o_\varphi(\cdot,\cdot)$ stands for higher orders of smallness with respect to $\triangle y_1$ and $\triangle y_2$.

Then

$$\triangle I(u) = \int\limits_0^l \Big\{\varphi'_{y_1}(y_1(x,T), y_2(x,T), x)\triangle y_1(x,T) + \varphi'_{y_2}(y_1(x,T), y_2(x,T), x)\triangle y_2(x,T)+$$

$$+ o_\varphi(|\triangle y_1|, |\triangle y_2|)\Big\}dx - \int\limits_0^l\int\limits_0^T\Big\{\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \mu(x)\psi_1(x,t)\Big\}\triangle y_1(x,t)dtdx-$$

$$-\int\limits_0^l\int\limits_0^T\Big\{\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \psi_2(x,t)\triangle y_1(x,t)\Big\}\triangle y_2(x,t)dtdx-$$

$$-\int\limits_0^l\int\limits_0^T \beta(t)\psi_2(0,t)K(r)u(r)\triangle y_2(r,t)dtds + \int\limits_0^l \psi_1(x,T)\triangle y_1(x,T)dx+$$

$$+\int\limits_0^T \psi_1(l,T)\triangle y_1(l,T)dt + \int\limits_0^l \psi_2(s,T)\triangle y_2(x,T)dx-$$

$$-\int\limits_0^l\int\limits_0^T \beta(t)\psi_2(0,t)K(r)\triangle u(r)y_2(r,t)dtds - \int\limits_0^l\int\limits_0^T \beta(t)\psi_2(0,t)K(r)\triangle u(r)\triangle y_2(r,t)dtdr.$$

Taking into account the values for expressions of states of the system (8), (9), we can write down the relations

$$\triangle y_1(x,t) = 0, \text{ for all } (x,t) \in \overline{\Pi}, \tag{10}$$

$$\triangle y_2(x,t) = \begin{cases} \beta(t-x) \int\limits_0^l K(r)\{\tilde{u}(r)\tilde{y}_2(r,t-x) - u(r)y_2(r,t-x)\}\times \\ \times \exp\Big(-\lambda(t-x)\exp\Big(-\int\limits_0^\rho \mu(\sigma)d\sigma\Big)\Big)d\rho, & x \leqslant t, \\ 0, & x > t. \end{cases} \tag{11}$$

These transformations allow us to formulate a conjugate problem for the functions $\psi_i(x,t),\ i=1,2$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \mu(x)\psi_1(x,t), \quad (x,t) \in \Pi, \\ \psi_1(x,T) = -\frac{\partial \varphi(y_1(x,T), y_2(x,T), x)}{\partial y_1}, \quad x \in [0,l], \\ \psi_1(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\beta(t)\psi_2(0,t)K(x)u(x), \quad (x,t) \in \Pi, \\ \psi_2(x,T) = -\frac{\partial \varphi(y_1(x,T), y_2(x,T), x)}{\partial y_2}, \quad x \in [0,l], \\ \psi_2(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{13}$$

For an arbitrarily fixed control $u = u(x)$, the hyperbolic systems (12), (13) with the corresponding initial conditions at $t = T$ and boundary conditions at $x = l$ have a unique generalized solution [6]. Here, by the generalized solution for arbitrary control u we also mean $\psi_1 \in C(\overline{\Pi})$ and $\psi_2 \in C(\overline{\Pi})$, and for ψ_2 as a continuous solution of the corresponding second order Volterra integro-operator equation. Now, given (12), (13), we can rewrite the modified expression for the increment of the functional as

$$\triangle I(u) = -\int\limits_0^l K(r)\triangle u(r) \int\limits_0^T \beta(t)\psi_2(0,t)y_2(r,t)dr - \gamma, \tag{14}$$

where

$$\gamma = -\int\limits_0^l K(r)\triangle u(r) \int\limits_0^T \beta(t)\psi_2(0,t)\triangle y_2(x,t)dtdr + \int\limits_0^l o_\varphi(|\triangle y(x,T)|)dx. \tag{15}$$

The obtained ratio (14) for the increment of the functional (5) is valid for two admissible processes $\{u, y_1, y_2\}$ and $\{\tilde{u}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2\}$.

Further investigation of the problem (1)–(5) is based on the application of the nonclassical variation of admissible controls described, for example, in [2, p. 123].

Let $u = u(x)$ be an admissible control and construct its variation by rule

$$u_{\varepsilon,\delta}(x) = \left(1 + \varepsilon \frac{d\delta(x)}{dx}\right) u(x + \varepsilon\delta(x)), \tag{16}$$

where $\varepsilon \in [0, 1]$ is a parameter that characterizes the smallness of the variation, $\delta(x)$ is a continuously differentiable function that satisfies conditions

$$0 \leqslant x + \delta(x) \leqslant l, \ \ \frac{d\delta(x)}{dx} \geqslant -1, \ \ x \in [0, l], \ \ \delta(0) = \delta(l) = 0.$$

Let us emphasize some properties of variation (16). First, the control is smooth, and the range of values of the function $u_{\varepsilon,\delta}(x)$ is determined by the range of values of the control $u(x)$. Moreover, to satisfy the second condition of **A6**), by substituting $s = x + \varepsilon\delta(x)$, we obtain

$$\int_0^l u_{\varepsilon,\delta}(x)dx = \int_0^l \left(1 + \varepsilon \frac{d\delta(x)}{dx}\right) u(x + \varepsilon\delta(x))dx = \int_0^l u(s)ds.$$

Let us return to the increment of the functional (14) and make an estimate of the remainder term γ for admissible processes $\{u, y_1, y_2\}$ and $\{u_{\varepsilon,\delta} = u + \triangle u, y_{1\varepsilon} = y_1 + \triangle y_1, y_{2\varepsilon} = y_2 + \triangle y_2\}$. That is, given (16), we obtain

$$\begin{aligned} \triangle u(s) = \left(1 + \varepsilon \frac{d\delta(x)}{dx}\right) u(x + \varepsilon\delta(x)) - u(x) = \\ = u(x + \varepsilon\delta(x)) - u(x) + \varepsilon \frac{d\delta(x)}{dx} u(x + \varepsilon\delta(x)) = \\ = \varepsilon \frac{d}{dx}\Big(\delta(x)u(x)\Big) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

which indicates the increment of control as a value of order ε [2].

Given the introduced variation (16), let us rewrite (11) the increment of state $y_2(x, t)$, namely

$$\triangle y_2(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geqslant t, \\ \beta(t-x) \int\limits_0^l K(r)\{u_{\varepsilon,\delta}(r) y_{2\varepsilon}(r, t-x) - u(r) y_2(r, t-x)\} \times & \\ \times \exp\left(-\lambda(t-x)\exp\Big(-\int\limits_0^\rho \mu(\sigma)d\sigma\Big)\right)d\rho, & x < t. \end{cases}$$

Based on assumptions **A1**)–**A6**), that is, given the constraint of the initial data in $\overline{\Pi}$ and making transformations

$$\begin{aligned} & u_{\varepsilon,\delta}(x) y_{2\varepsilon}(x, t-x) - u(x) y_2(x, t-x) = \\ & \quad = u_{\varepsilon,\delta}(x) y_{2\varepsilon}(x, t-x) - u(x) y_{2\varepsilon}(x, t-x) + u(x) y_{2\varepsilon}(x, t-x) - \\ & \quad\quad - u(x) y_2(x, t-x) = \triangle u(x) y_{2\varepsilon}(x, t-x) + u(x) \triangle y_2(x, t-x), \end{aligned}$$

we obtain an estimate

$$|\triangle y_2(x,t)| \leqslant L_1 \int\limits_{x_1}^{x_2} |\triangle y_2(x,t-x)|dx + L_2 \int\limits_{x_1}^{x_2} |\triangle u(x)|dx, \tag{17}$$

where $L_i = \text{const} \geqslant 0$, $i = 1,2$, or given that $|\triangle u| \sim \varepsilon$, estimating, for example, (17) through the resolvent of the corresponding kernel, it is easy to obtain that

$$|\triangle y_2(x,t)| \sim \varepsilon \text{ for } (x,t) \in \overline{\Pi}.$$

As a result, the increment of the functional (14) can be written as

$$\triangle I(u) = I(u_{\varepsilon,\delta}) - I(u) = \tag{18}$$

$$= -\varepsilon \int\limits_{x_1}^{x_2} K(x)\frac{d}{dx}(\delta(x)u(x)) \int\limits_0^T \psi_2(0,t)\beta(t)y_2(x,t)dtdx + o(\varepsilon),$$

or

$$\triangle I(u) = -\varepsilon\Big\{\delta(x)u(x) \int\limits_0^T K(x)\psi_2(0,t)\beta(t)y_2(x,t)dt\Big|_{x_1}^{x_2} -$$

$$- \int\limits_{x_1}^{x_2} \delta(x)u(x)\frac{d}{dx} \int\limits_0^T K(x)\psi_2(0,t)\beta(t)y_2(x,t)dt\Big\} =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{x_1}^{x_2} \delta(x)u(x) \int\limits_0^T \psi_2(0,t)\beta(t)\frac{d}{dx}\Big(K(x)y_2(x,t)\Big)dt.$$

Then, based on an arbitrary choice of $\delta(x)$ and the main lemma of the calculus of variations, we obtain the necessary optimality condition.

Theorem 1. *If the process $\{y^*, u^*\}$ is optimal in problem (1)–(5), then condition*

$$u^*(x) \int\limits_0^T \psi_2^*(0,t)\beta(t)\frac{d}{dx}\Big(K(x)y_2^*(x,t)\Big)dt = 0, \quad x \in [0,l],$$

is fulfilled, where $y_2^*(x,t)$ is expressed by (7), and $\psi_2^*(x,t)$ is the generalized solution of the conjugate problem (13), at $u = u^*(x)$, $y = y^*(x,t)$.

The obtained result can serve for the construction of numerical algorithms for solving optimal control problems [2, p. 125].

References

1. C. Almeder, J. P. Caulkins, G. Feichtinger, and G. Tragler, *An age-structured single-state drug initiation model-cycles of grug epidemics and optimal prevention programs*, Socio-Economic Planning Sciences **38** (2004), no. 1, 91–109. DOI: 10.1184/R1/6471008.v1
2. A. V. Arguchintsev, *Optimal control of hyperbolic systems*, Fizmatlit Publ, Moscow, 2007 (in Russian).

3. W. L. Chan and B. Z. Guo, *Optimal birth control of population dynamics*, J. Math. Anal. Appl. **144** (1989), no. 2, 532–552. DOI: 10.1016/0022-247x(89)90350-8
4. S. Chawla and S. Lenhart, *Application of optimal control theory to bioremediation*, J. Comput. Appl. Math. 114 (2000), no. 1, 81–102. DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00290-3
5. A. L. Dawidowicz, A. Poskrobko, *Matematyczne modele dynamiki populacji zależne od wieku*, Metody matematyczne w zastosowaniach, 2014, Tom **2**, pp. 39–58.
6. Н. В. Дерев'янко, В. М. Кирилич, *Оптимальне керування гіперболічною системою напівлінійних рівнянь першого порядку з нескінченним горизонтом планування*, Укр. мат. ж. **67** (2015), no. 2, 185–201; **English version:** T. O. Derev'yanko and V. M. Kyrylych, *Problem of optimal control for a semilinear hyperbolic system of equations of the first order with infinite horizon planning*, Ukr. Math. J. **67** (2015), no. 2, 211–229. DOI: 10.1007/s11253-015-1075-3
7. G. Feichtinger, G. Tragler, and V. M. Veliov, *Optimality conditions for age-stractured control systems*, J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), no. 1, 47–68. DOI: 10.1016/j.jmaa.2003.07.001
8. N. Hritoneko and Y. Yatsenko, *Mathematical modelling in economics, ccology and the environment*, 2nd Ed., Springer Optimization and Its Applications **88**, Springer 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-9311-2
9. A. G. M'Kendrick, *Applications of mathematics to medical problems*, Proc. Edinb. Math. Soc. **40** (1926), 98–130. DOI: 10.1017/S0013091500034428
10. S. P. Sethi and G. L. Thompson, *Optimal control theory. Applications to Management Science and Economics*, 2nd ed., New York, Springer, 2005.
11. V. Volterra, *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together*, In: Chapman, R. N., Ed., Animal Ecology, New York, McGraw-Hill, 1931. pp. 409–448. DOI: 10.1086/284409
12. J. von Foerster, *Some remarks on changing populations*, In: The Kinetics of Cellular Proliferation, ed. by F. Stohlman, Jr., Grune and Stratton, New York, 1955, pp. 382—407.

Стаття: надійшла до редколегії 06.07.2020
прийнята до друку 17.11.2020

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ВІКОВОЮ ДИНАМІКОЮ БІОПОПУЛЯЦІЇ

Володимир КИРИЛИЧ, Ольга МІЛЬЧЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: vkyrylych@ukr.net, olga.milchenko@lnu.edu.ua

Об'єкт дослідження — задача оптимального керування напівлінійною системою двох гіперболічних рівнянь першого порядку з інтегральними обмеженнями. За допомогою методу характеристик і принципу максимуму одержано необхідні умови оптимальності.

Ключові слова: оптимальне керування, гіперболічна система, метод характеристик, голкова варіація, теорія біопопуляцій.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

електронний варіант статті та резюме на веб-сторінку

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 20 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)" (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2020**.

Номери формул ставити з правого боку та нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).

2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.

3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.

4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.

6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248

8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.

9. V. Bovdi, *Free subgroups in group rings*, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.

10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.

11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.