ISSN 2078-3744

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 91

Львівський національний університет імені Івана Франка
2021

V I S N Y K OF THE LVIV UNIVERSITY

В І С Н И К ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Series Mechanics and Mathematics

Серія механіко-математична

Issue 91

Випуск 91

Scientific journal

Збірник наукових праць

Published 1-2 issues per year

Виходить 1-2 рази на рік

Published since 1965

Видається з 1965 року

Ivan Franko National University of Lviv

Львівський національний університет імені Івана Франка

2021

Засновник: ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол №29/5 від 25.05.2022 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 14606-3577Р від 29.10.2008 р.

Включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватись результати дисертаційних робіт. Затверджено наказом МОН України №1188 від 24.09.2020 р.

У Віснику публікуються праці з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Visnyk contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

Адреса редколегії:
ЛНУ імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет,
вул. Університетська, 1,
79000 Львів, Україна
тел. (+38 032) 239-42-18

Editorial office address:
Ivan Franko National University of Lviv
Mechanics and Mathematics Faculty,
Universytetska Str., 1,
79000 Lviv, Ukraine
e-mail: lnu.visn.mm@gmail.com

http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf

Редактор Н. ПЛИСА | Комп'ютерний набір і верстка О. ГУТІК

Адреса редакції, видавця і виготовлювача:
Львівський національний університет
імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Формат 70x100/16.
Умовн. друк. арк. 8.9
Наклад 100 прим. Зам.

ЗМІСТ

CONTENT

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 5–27
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 5–27
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.005-027

УДК 512.53

ПРО ГРУПОВІ КОНГРУЕНЦІЇ НА НАПІВГРУПІ $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ТА ЇЇ ГОМОМОРФНІ РЕТРАКТИ У ВИПАДКУ, КОЛИ СІМ'Я $\mathscr{F}$ СКЛАДАЄТЬСЯ З НЕПОРОЖНІХ ІНДУКТИВНИХ ПІДМНОЖИН У ω

Олег ГУТІК, Микола МИХАЛЕНИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
myhalenychmc@gmail.com

Вивчаємо групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її гомоморфні ретракти у випадку, коли $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я з індуктивних непорожніх підмножин в ω. Доведено, що конгруенція $\mathfrak{C}$ на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є груповою, тоді і лише тоді, коли звуження конгруенції $\mathfrak{C}$ на піднапівгрупу в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгруп, не є відношенням рівності. Також, описуємо всі нетривіальні гомоморфні ретракти й ізоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Ключові слова: інверсна напівгрупа, біциклічна напівгрупа, індуктивна множина, групова конгруенція, гомоморфний ретракт, ізоморфізм, автоморфізм.

1. Вступ

Ми користуємося термінологією з монографій [8, 9, 16, 18]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через ω. Для довільного числа $k \in \omega$ позначимо $[k) = \{i \in \omega : i \geqslant k\}$.

Нехай $\mathscr{P}(\omega)$ — сім'я усіх підмножин у ω. Для довільних $F \in \mathscr{P}(\omega)$ і $n, m \in \omega$ приймемо

$$n - m + F = \{n - m + k : k \in F\}, \qquad \text{якщо } F \neq \varnothing$$

і $n - m + F = \varnothing$, якщо $F = \varnothing$. Будемо говорити, що непорожня підсім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є *ω-замкненою*, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathscr{F}$ для довільних $n \in \omega$ та $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

Підмножина A в ω називається *індуктивною*, якщо з $i \in A$ випливає, що $i + 1 \in A$. Очевидно, що $\varnothing$ — індуктивна множина в ω.

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10, 20M15, 18B40

Зауваження 1. (1) За лемою 6 з [2] непорожня множина $F \subseteq \omega$ є індуктивною в ω тоді і лише тоді, коли $(-1+F)\cap F = F$.
(2) Оскільки множина ω зі звичайним порядком є цілком впорядкованою, то для кожної непорожньої індуктивної множини F у ω існує невід'ємне ціле число $n_F \in \omega$ таке, що $[n_F) = F$.
(3) З (2) випливає, що перетин довільної скінченної кількості непорожніх індуктивних підмножин у ω є непорожньою індуктивною підмножиною в ω.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [18, 1]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до x*. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a та b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b)\in\mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb),(ad,bd)\in\mathfrak{K}$, для довільних $c,d\in S$. Відношення $(a,b)\in\mathfrak{K}$ ми також записуватимемо $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку говоритимемо, що *елементи a і b є $\mathfrak{K}$-еквівалентними*.

Конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *груповою*, якщо фактор-напівгрупа $S/\mathfrak{K}$ ізоморфна деякій групі G [8]. Нагадаємо [16, 18], що на кожній інверсній напівгрупі S існує *найменша* (*мінімальна*) *групова конгруенція* $\boldsymbol{\sigma}$ і вона визначається так:

$$s\boldsymbol{\sigma}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad es = et \quad \text{для деякого} \quad e\in E(S).$$

Якщо S — напівгрупа, то на її множині ідемпотентів $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \preccurlyeq f \text{ тоді і лише тоді, коли } ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так:

$$s \preccurlyeq t \text{ тоді і лише тоді, коли } s = te, \text{ для деякого ідемпотента } e\in S.$$

Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нагадаємо (див. [8, §1.12], що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема О. Андерсена [5] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічного моноїда. Різні розширення та узагальнення біциклічного моноїда вводилися раніше різними авторами [10, 11, 12, 15, 21]. Такими, зокрема, є конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості й описання інверсних біпростих і 0-біпростих ω-напівгруп [7, 19, 20, 13].

Гомоморфною ретракцією називається відображення з напівгрупи S в S, яке є одночасно ретракцією та гомоморфізмом [8, 9]. Образ напівгрупи S при її гомоморфній ретракції називається *гомоморфним ретрактом.* Тобто гомоморфний ретракт напівгрупи S — це така піднапівгрупа T в S, що існує гомоморфізм з S на T, для якого піднапівгрупа T є множиною всіх його нерухомих точок. Терміни "гомоморфні ретракції" та "гомоморфні ретракти", здається, вперше з'явились у праці Брауна [6], як один з методів дослідження структури топологічних напівґраток. Очевидно, що кожне тотожне відображення напівгрупи S є її гомоморфною ретракцією, а також, якщо e — ідемпотент в S, то стале відображення $h\colon S \to S$, $x \mapsto e$ — гомоморфна ретракція напівгрупи S. Такі гомоморфні ретракції та тотожне відображення напівгрупи S будемо називати *тривіальними*, а образи напівгрупи S стосовно них — *тривіальними* гомоморфними ретрактами.

Зауваження 2. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_{\omega} = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією

$$
\begin{aligned}
(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) &= (i_1 + i_2 - \min\{j_1, i_2\}, j_1 + j_2 - \min\{j_1, i_2\}) = \\
&= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

У праці [2] введено алгебричні розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ біциклічного моноїда для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в ω, які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченну напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи.

Нагадаємо цю конструкцію. Нехай $\boldsymbol{B}_{\omega}$ — біциклічний моноїд і $\mathscr{F}$ — непорожня ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. На множині $\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}$ означимо бінарну операцію "$\cdot$" формулою

$$
(1)\quad (i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 > i_2. \end{cases}
$$

У [2] доведено таке твердження: якщо сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є ω-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)$ — напівгрупа.

Припустимо, що ω-замкнена сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ містить порожню множину $\varnothing$, то з означення напівгрупової операції $(\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)$ випливає, що множина $\boldsymbol{I} = \{(i, j, \varnothing) \colon i, j \in \omega\}$ є ідеалом напівгрупи $(\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)$.

Означення 1 ([2])**.** Для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ означимо

$$
\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot)/\boldsymbol{I}, & \text{якщо } \varnothing \in \mathscr{F}; \\ (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot), & \text{якщо } \varnothing \notin \mathscr{F}. \end{cases}
$$

У [2] доведено, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Ґріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її множину ідемпотентів. Також у [2] доведено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, і зазначено умови, коли напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

Зауважимо, що у [3] отримано подібні результати до [2] у випадку розширення $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в ω.

У [14, 17] досліджено алгебричну структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у випадку, коли ω-замкнена сім'я $\mathscr{F}$ складається з атомарних підмножин (одноточкових підмножин і порожньої множини) в ω. Зокрема доведено, що за виконання таких умов на сім'ю $\mathscr{F}$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна піднапівгрупі ω-розширення Брандта напівґратки $(\omega, \min)$. Також у [14, 17] досліджували топологізацію напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, близькі до компактних трансляційно неперервні топології на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та замикання напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у напівтопологічних напівгрупах.

Із зауваження 1(3) випливає таке: якщо сім'я $\mathscr{F}_0$ складається з індуктивних в ω підмножин і містить порожню множину $\varnothing$ як елемент, то для сім'ї $\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 \setminus \{\varnothing\}$ множина $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з індукованою напівгруповою операцією з $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ є піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$.

Ми вивчаємо алгебричну структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у випадку, коли ω-замкнена сім'я $\mathscr{F}$ складається з індуктивних непорожніх підмножин у ω, а саме групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її гомоморфні ретракти. Доведено, що конгруенція $\mathfrak{C}$ на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є груповою, тоді і лише тоді, коли звуження конгруенції $\mathfrak{C}$ на піднапівгрупу в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, не є відношенням рівності. Також описуємо всі нетривіальні гомоморфні ретракти та ізоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Надалі скрізь у тексті ми вважаємо, що ω-замкнена сім'я $\mathscr{F}$ складається лише з індуктивних непорожніх підмножин у ω.

2. Алгебричні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$

Твердження 1. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я підмножин у ω і $n_0 = \min\left\{\bigcup \mathscr{F}\right\}$. Тоді:*

(1) *$\mathscr{F}_0 = \{-n_0 + F \colon F \in \mathscr{F}\}$ — ω-замкнена сім'я підмножин у ω;*
(2) *напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ ізоморфні.*

Доведення. Спочатку зауважимо, оскільки множина ω зі звичайним порядком $\leqslant$ цілком впорядкована, то невід'ємне ціле число n_0 визначено коректно.

Твердження (1) очевидне.

(2) Очевидно, що відображення $\mathfrak{h} \colon (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot) \to (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}_0, \cdot)$, означене за формулою

$$\mathfrak{h}(i,j,F) = (i,j,-n_0+F),$$

бієктивне. Врахувавши, що $-n_0 + \varnothing = \varnothing$, отримуємо

$$\mathfrak{h}((i_1,j_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)) = \begin{cases} \mathfrak{h}(i_1-j_1+i_2, j_2, (j_1-i_2+F_1)\cap F_2), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ \mathfrak{h}(i_1,j_2,F_1\cap F_2), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ \mathfrak{h}(i_1, j_1-i_2+j_2, F_1\cap(i_2-j_1+F_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2, j_2, -n_0+((j_1-i_2+F_1)\cap F_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,-n_0+(F_1\cap F_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1, j_1-i_2+j_2, -n_0+(F_1\cap(i_2-j_1+F_2))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases}$$

і

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}(i_1,j_1,&F_1)\cdot\mathfrak{h}(i_2,j_2,F_2)=(i_1,j_1,-n_0+F_1)\cdot(i_2,j_2,-n_0+F_2)=\\
&=\begin{cases}
(i_1-j_1+i_2,j_2,(-n_0+j_1-i_2+F_1)\cap(-n_0+F_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\
(i_1,j_2,(-n_0+F_1)\cap(-n_0+F_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\
(i_1,j_1-i_2+j_2,(-n_0+F_1)\cap(-n_0+i_2-j_1+F_2)), & \text{якщо } j_1>i_2
\end{cases}=\\
&=\begin{cases}
(i_1-j_1+i_2,j_2,-n_0+((j_1-i_2+F_1)\cap F_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\
(i_1,j_2,-n_0+(F_1\cap F_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\
(i_1,j_1-i_2+j_2,-n_0+(F_1\cap(i_2-j_1+F_2))), & \text{якщо } j_1>i_2,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

отримуємо, що так означене відображення $\mathfrak{h}\colon(\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F},\cdot)\to(\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F}_0,\cdot)$ — гомоморфізм, а отже, воно є ізоморфізмом. Звідки випливає, що напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ ізоморфні. □

Врахувавши зауваження 1(2) і 1(3), надалі для кожної непорожньої множини $F\in\mathscr{F}$ приймемо $n_F=\min F$.

Лема 1. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я індуктивних підмножин у ω та F_1 і F_2 — такі елементи сім'ї $\mathscr{F}$, що $n_{F_1}<n_{F_2}$. Тоді для кожного натурального числа $k\in\{n_{F_1}+1,\ldots,n_{F_2}-1\}$ існує множина $F\in\mathscr{F}$ така, що $F=[k)$.*

Доведення. З припущення леми випливає, що $F_1\supsetneqq F_2$. Тоді для довільного натурального числа $k\in\{n_{F_1}+1,\ldots,n_{F_2}-1\}$ ціле число $i=n_{F_1}+n_{F_2}-k$ задовольняє умову

$$n_{F_1}+1\leqslant i\leqslant n_{F_2}-1,$$

а отже,

$$(i,i,F_1)\cdot(n_{F_1},n_{F_1},F_2)=(i,i,F_1\cap(n_{F_1}-i+F_2)).$$

Позаяк $F_2\subsetneqq F_1$ і $n_{F_1}+1\leqslant i\leqslant n_{F_2}-1$, то

$$
\begin{aligned}
\min\{F_1\cap(n_{F_1}-i+F_2)\}&=\min\{n_{F_1}-i+F_2\}=\\
&=n_{F_1}-i+n_{F_2}=\\
&=k.
\end{aligned}
$$

Отож виконується рівність

$$(i,i,F_1)\cdot(n_{F_1},n_{F_1},F_2)=(i,i,[k)),$$

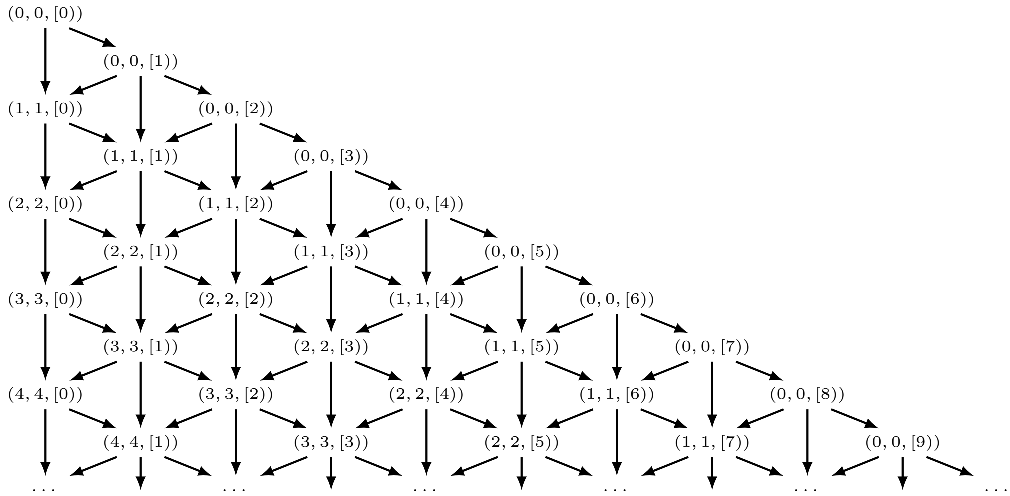
з якої випливає твердження леми. □

Зауваження 3. З твердження 1 і леми 1 випливає, якщо $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я індуктивних підмножин у ω, то надалі для спрощення викладу будемо вважати, що:

(1) $\mathscr{F}=\{[k)\colon k\in\omega\}$, у випадку нескінченної сім'ї $\mathscr{F}$;
(2) $\mathscr{F}=\{[k)\colon k=0,1,\ldots,n\}$ для деякого $n\in\omega$, у випадку скінченної сім'ї $\mathscr{F}$.

З леми 5 [2], врахувавши зауваження 3(1), отримуємо таке твердження.

Твердження 2. *Якщо $\mathscr{F}$ — нескінченна ω-замкнена сім'я індуктивних підмножин у ω, то діаграма*



описує природний частковий порядок на в'язці напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

З леми 5 [2], врахувавши зауваження 3(2), отримуємо

Твердження 3. *Якщо* $\mathscr{F} = \{[0), \ldots [k)\}$ *— скінченна* ω*-замкнена сім'я індуктивних підмножин у* ω*, то частина діаграми з твердження 2, що складається з ідемпотентів*

$$\{(i, i, [n))\colon i, j \in \omega,\ n = 0, 1, \ldots, k\}$$

напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ *та відповідних стрілок, що їх з'єднують, описує природний частковий порядок на в'язці напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

З означення напівгрупової операції на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що у випадку, коли $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я підмножин у ω та $F \in \mathscr{F}$ — непорожня індуктивна підмножина в ω, то множина

$$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{F\}} = \{(i, j, F)\colon i, j \in \omega\}$$

з індукованою напівгруповою операцією з $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка за твердженням 3 з [2] ізоморфна біциклічній напівгрупі.

Твердження 4. *Нехай* $\mathscr{F}$ *— довільна* ω*-замкнена сім'я індуктивних підмножин у* ω *та* S *— піднапівгрупа в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$*, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі* $\boldsymbol{B}_{\omega}$*. Тоді існує така підмножина* $F \in \mathscr{F}$*, що* S *— піднапівгрупа в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{F\}}$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — ізоморфізм вкладення. Тоді за твердженням 1.4.21(2) [16], $\mathfrak{h}(0,0)$ і $\mathfrak{h}(1,1)$ — ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, за лемою 2 [2], $\mathfrak{h}(0,0) = (i_1, i_1, F_1)$ і $\mathfrak{h}(1,1) = (i_2, i_2, F_2)$ для деяких $i_1, i_2 \in \omega$ і $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$. Також з нерівності $(1,1) \preccurlyeq (0,0)$ у біциклічній напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}$ випливає, що $(i_2, i_2, F_2) \preccurlyeq (i_1, i_1, F_1)$ у напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. З леми 5 [2] випливає, що $i_1 \leqslant i_2$ і $F_2 \subseteq i_2 - i_1 + F_1$. Оскільки $\mathscr{F}$ — сім'я індуктивних підмножин у ω, то існують такі числа $k_1, k_2 \in \omega$, що $F_1 = [k_1)$ і $F_2 = [k_2)$.

Аналогічно отримуємо, що $\mathfrak{h}(0,1) = (i, j, [a))$ для деяких $i, j, a \in \omega$. Позаяк $(1,0)$ — інверсний елемент до $(0,1)$ в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}$, то за твердженням 1.4.21 [16] і лемою 4 [2] матимемо

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}(1,0) &= \mathfrak{h}\left((0,1)^{-1}\right) = \\ &= (\mathfrak{h}(0,1))^{-1} = \\ &= ((i,j,[a]))^{-1} = \\ &= (j,i,[a]),\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}(i_1,i_1,[k_1]) &= \mathfrak{h}(0,0) = \\ &= \mathfrak{h}((0,1)\cdot(1,0)) = \\ &= \mathfrak{h}(0,1)\cdot\mathfrak{h}(1,0) = \\ &= (i,j,[a])\cdot(j,i,[a]) = \\ &= (i,i,[a])\end{aligned}$$

і аналогічно

$$\begin{aligned}(i_2,i_2,[k_2]) &= \mathfrak{h}(1,1) = \\ &= \mathfrak{h}((1,0)\cdot(0,1)) = \\ &= \mathfrak{h}(1,0)\cdot\mathfrak{h}(0,1) = \\ &= (j,i,[a])\cdot(i,j,[a]) = \\ &= (j,j,[a]).\end{aligned}$$

З однозначності зображення елементів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що $i=i_1$, $j=i_2$ й $a=k_1=k_2$, а отже, $\mathfrak{h}(0,1)=(i_1,i_2,[k_1])$ і $\mathfrak{h}(1,0)=(i_2,i_1,[k_1])$. З означення напівгрупової операції в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що піднапівгрупа $S=\langle(i_1,i_2,[k_1]),(i_2,i_1,[k_1])\rangle$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, породжена елементами $(i_1,i_2,[k_1])$ і $(i_2,i_1,[k_1])$, є інверсною піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k_1)\}}$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k_1)\}}$ шукана. $\square$

Теорема 1 описує групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Теорема 1. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $\mathfrak{C}$ — конгруенція на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *$\mathfrak{C}$ — групова конгруенція на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$;*
(2) *існує піднапівгрупа S в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними;*
(3) *для довільної піднапівгрупи T в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, два різні елементи напівгрупи T є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. Імплікації (1)⇒(3) і (3)⇒(2) очевидні.

Доведемо імплікацію (2)⇒(1). Нехай S — піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи в S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.

Припустимо, що відображення $\mathfrak{i}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}\to S$ визначає ізоморфізм біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}$ на напівгрупу S. Оскільки конгруенція $\mathfrak{C}$ на S не є рівністю, то існують різні елементи $x,y\in S$ такі, що $x\mathfrak{C}y$. Припустимо, що $x=\mathfrak{i}(n_1,n_2)$ і $y=\mathfrak{i}(m_1,m_2)$ для деяких $n_1,n_2,m_1,m_2\in\omega$. Тоді $n_1\neq m_1$ або $n_1\neq m_2$.

З ізоморфності напівгруп $\boldsymbol{B}_\omega$ і S випливає, що S — інверсна напівгрупа. Тоді за твердженням 1.3.21 [16] отримуємо, що

$$\begin{aligned}
xx^{-1} &= \mathfrak{i}(n_1,n_2)\cdot(\mathfrak{i}(n_1,n_2))^{-1} =\\
&= \mathfrak{i}(n_1,n_2)\cdot(\mathfrak{i}(n_1,n_2)^{-1}) =\\
&= \mathfrak{i}(n_1,n_2)\cdot\mathfrak{i}(n_2,n_1) =\\
&= \mathfrak{i}((n_1,n_2)\cdot(n_2,n_1)) =\\
&= \mathfrak{i}(n_1,n_1),\\
x^{-1}x &= (\mathfrak{i}(n_1,n_2))^{-1}\cdot\mathfrak{i}(n_1,n_1) =\\
&= (\mathfrak{i}(n_1,n_2)^{-1})\cdot\mathfrak{i}(n_1,n_1) =\\
&= \mathfrak{i}(n_2,n_1)\cdot\mathfrak{i}(n_1,n_1) =\\
&= \mathfrak{i}((n_2,n_1)\cdot(n_1,n_2)) =\\
&= \mathfrak{i}(n_2,n_2),
\end{aligned}$$

і аналогічно

$$\begin{aligned}
yy^{-1} &= \mathfrak{i}((m_1,m_1)),\\
y^{-1}y &= \mathfrak{i}((m_2,m_2)).
\end{aligned}$$

З твердження 2.3.4(1) [16] випливає, що $xx^{-1}\mathfrak{C}yy^{-1}$ і $x^{-1}x\mathfrak{C}y^{-1}y$. Якщо $n_1\neq m_1$, то з ізоморфності напівгруп $\boldsymbol{B}_\omega$ і S випливає, що $xx^{-1}\neq yy^{-1}$, і аналогічно, якщо $n_2\neq m_2$, то $x^{-1}x\neq y^{-1}y$.

За твердженням 4 існує множина $F_0\in\mathscr{F}$ така, що S — піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_0\}}$. Оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_0\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то за наслідком 1.32 з [8] усі ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_0\}}$ $\mathfrak{C}$-еквівалентні. Тоді з описання природного часткового порядку на напівґратці ідемпотентів напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ в твердженні 2 випливає, що для довільної множини $F\in\mathscr{F}$ існують різні ідемпотенти $(i,i,F),(j,j,F)$ піднапівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F\}}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ такі, що

$$(i_0,i_0,F_0)\preccurlyeq(i,i,F)\preccurlyeq(j,j,F)\preccurlyeq(j_0,j_0,F_0) \tag{2}$$

для деяких $i_0,j_0\in\omega$.

Знову, скориставшись тим, що за твердженням 3 [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, отримуємо, що для довільної множини $F_1\in\mathscr{F}$ усі ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_1\}}$ $\mathfrak{C}$-еквівалентні, а з нерівності (2) випливає, що всі ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ $\mathfrak{C}$-еквівалентні. □

Зауважимо, що аналогічне твердження до теореми 1 справджується і для напівгрупи часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ (див. [4, теорема 9]).

З прикладу 1 випливає, що на напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ існують негрупові конгруенції.

Приклад 1. Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Означимо відображення $\mathfrak{h}\colon\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_\omega$ за формулою

$$\mathfrak{h}(i,j,F)=(i,j),\qquad i,j\in\omega,\quad F\in\mathscr{F}.$$

З означення напівгрупових операцій на напівгрупах $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}$ випливає, що так означене відображення $\mathfrak{h}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом. Отож конгруенція $\mathfrak{h}^{\sharp}$ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, породжена гомоморфізмом $\mathfrak{h}$, не є груповою.

3. Гомоморфні ретракти та ізоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$

Приклад 2. Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Зафіксуємо довільну множину $F \in \mathscr{F}$. Означимо відображення $\mathfrak{h}_F\colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ за формулою

$$\mathfrak{h}_F(i,j) = (i,j,F), \qquad i,j \in \omega.$$

З означення напівгрупових операцій на напівгрупах $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}$ випливає, що так означене відображення $\mathfrak{h}_F$ є гомоморфізмом.

Оскільки композиція гомоморфізмів напівгруп є гомоморфізмом, то з визначення гомоморфізмів $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}$ і $\mathfrak{h}_F\colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ (див. приклади 1 і 2, відповідно), випливає, що їхня композиція $\mathfrak{h}_F \circ \mathfrak{h}$ є гомоморфною ретракцією напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, тобто виконується таке твердження:

Твердження 5. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $F \in \mathscr{F}$. Тоді піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{F\}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Приклад 3. Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Зафіксуємо довільну множину $[k) \in \mathscr{F}$. Означимо відображення $\mathfrak{h}_k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ за формулою

$$\mathfrak{h}_k(i,j,[a)) = \begin{cases} (i,j,[k)), & \text{якщо } a \leqslant k; \\ (i,j,[a)), & \text{якщо } a > k, \end{cases} \qquad i,j \in \omega, \quad [a) \in \mathscr{F}.$$

Лема 2. *Якщо $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $[k) \in \mathscr{F}$, то $\mathfrak{h}_k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — гомоморфізм.*

Доведення. Нехай $(i_1,j_1,[a_1))$ і $(i_2,j_2,[a_2))$ — довільні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Розглянемо можливі випадки.

(1) Нехай $a_1, a_2 \leqslant k$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2))) = \\
&\qquad = \begin{cases} \mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2, j_2, (j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ \mathfrak{h}_k(i_1, j_1-i_2+j_2, [a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2, j_2, [k)), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1-i_2+j_2, [k)), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

і

$$\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2)) = (i_1,j_1,[k))\cdot(i_2,j_2,[k)) =$$
$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[k))\cap[k)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[k)\cap[k)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)\cap(i_2-j_1+[k))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases}$$

(2) Припустимо, що $a_1>k$ і $a_2\leqslant k$. Тоді маємо, що

$$\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2))) =$$
$$= \begin{cases} \mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k;\\ (i_1,j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases}$$

і

$$\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2)) = (i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[k)) =$$
$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[k)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_1)\cap[k)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[k))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k;\\ (i_1,j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2. \end{cases}$$

(3) Якщо $a_1\leqslant k$ і $a_2>k$, то

$$\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2))) =$$
$$= \begin{cases} \mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k \end{cases}$$

і

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2)) = (i_1,j_1,[k))\cdot(i_2,j_2,[a_2)) = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[k))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[k)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(4) Припустимо, що $a_1,a_2>k$. Тоді маємо, що

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2))) = \\
&\qquad = \begin{cases} \mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant a_2;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>a_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2\geqslant a_1;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2<a_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

і

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2)) = (i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2)) = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2 \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant a_2;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>a_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2\geqslant a_1;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2<a_1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отож відображення $\mathfrak{h}_k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є гомоморфізмом. □

Позаяк

$$\mathfrak{h}_k(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}) = \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}\geqslant k} = \Big\{(i,j,[a))\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\colon [a)\in\mathscr{F} \ \text{ і } \ a\geqslant k\Big\}$$

— інверсна піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка є множиною нерухомих точок гомоморфізму $\mathfrak{h}_k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, то справджується таке твердження.

Твердження 6. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $[k)\in\mathscr{F}$ для деякого числа $k\in\omega$. Тоді піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}\geqslant k}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Нехай $\mathscr{F}=\{[0),[1),\ldots,[k)\}$ — сім'я підмножин у ω, де $k\geqslant 1$. Для довільного натурального числа $n<k$ означимо

$$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}}=\Big\{(i,j,[a))\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\colon [a)\in\mathscr{F}\ \text{ i }\ a\leqslant n\Big\}.$$

Очевидно, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}}$ — інверсна піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

З твердження 5 випливає, що для сім'ї $\mathscr{F}=\{[0),[1)\}$ піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[0)\}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Однак з подальших тверджень випливає, що для довільного натурального числа $k\geqslant 2$ піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}}$ не є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ для довільного натурального числа $n<k$.

Теорема 2. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $\omega\in\mathscr{F}$. Тоді:*

(1) *якщо сім'я $\mathscr{F}$ — нескінченна, то для довільного натурального числа k напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ не є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$;*

(2) *якщо сім'я $\mathscr{F}$ — скінченна та $\bigcap\mathscr{F}=[t)$ для деякого натурального числа $t\geqslant 2$, то для довільного натурального числа $k<t$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ не є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Доведення. Припустимо протилежне: хоча б в одному з випадків (1), чи (2) напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Позаяк звуження напівгрупового гомоморфізму $h\colon S\to S$ на піднапівгрупу $T\subseteq S$ є знову гомоморфізмом, то, припустивши, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, який породжується деяким гомоморфізмом $\mathfrak{h}\colon\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, отримуємо, що піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}$, який породжується деякою гомоморфною ретракцією $\mathfrak{h}^k\colon\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$.

З визначення природного часткового порядку на в'язці $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ (див. твердження 2 і 3) випливає, що

$$(1,1,[k))\preccurlyeq(0,0,[k+1))\preccurlyeq(0,0,[k)).$$

Позаяк гомоморфізм інверсних напівгруп зберігає природний частковий порядок на їх в'язках у бік образу (див. [16, твердження 1.4.21(6)]), то

$$(1,1,[k))\preccurlyeq\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1))\preccurlyeq(0,0,[k)). \tag{3}$$

З нерівностей (3) і визначення природного часткового порядку на $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ (див. твердження 2 і 3) випливає, що виконується лише один з випадків:

(1) $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1))=(0,0,[k))$;
(2) $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1))=(1,1,[k))$;
(3) $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1))=(1,1,[k-1))$.

Припустимо, що виконується випадок (1): $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1))=(0,0,[k))$. З твердження 4 випливає, що $\mathfrak{h}^k(i,j,[k+1))\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k)\}}$ для всіх $i,j\in\omega$, оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Також з тверджень 2 і 3 випливає, що $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))\preccurlyeq(1,1,[k))$.

За твердженням 1.4.21(2) з [16], $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1])$ — ідемпотент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, як гомоморфний образ ідемпотента $(1,1,[k+1])$. Позаяк

$$(0,0,[k+1]) = (0,1,[k+1]) \cdot (1,0,[k+1]),$$

то за твердженням 1.4.21(1) [16] маємо, що

$$\begin{aligned}
(0,0,[k]) &= \mathfrak{h}^k(0,0,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1]) \cdot (1,0,[k+1])) = \\
&= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1}) = \\
&= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1},
\end{aligned}$$

і, прийнявши $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = (m,n,[k])$ для деяких $m,n \in \omega$, за лемою 4 з [2] отримуємо, що

$$\begin{aligned}
(m,n,[k]) \cdot (m,n,[k])^{-1} &= (m,n,[k]) \cdot (n,m,[k]) = \\
&= (m,m,[k]) = \\
&= (0,0,[k]),
\end{aligned}$$

а отже, $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = (0,n,[k])$ для деякого натурального числа n. Аналогічно

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1]) &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1]) \cdot (0,1,[k+1])) = \\
&= \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1])) \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1}) \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\
&= (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1} \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\
&= (0,n,[k])^{-1} \cdot (0,n,[k]) = \\
&= (n,0,[k]) \cdot (0,n,[k]) = \\
&= (n,n,[k]).
\end{aligned}$$

Припустимо, що $n \geqslant 2$. Тоді з

$$\begin{aligned}
(3,3,[k]) &\preccurlyeq (2,2,[k+1]) = \\
&= (2,0,[k+1]) \cdot (0,2,[k+1]) = \\
&= (1,0,[k+1])^2 \cdot (0,1,[k+1])^2
\end{aligned}$$

випливає, що

$$\begin{aligned}
(3,3,[k]) &= \mathfrak{h}^k(3,3,[k]) \preccurlyeq \\
&\preccurlyeq \mathfrak{h}^k(2,2,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1])^2 \cdot (0,1,[k+1])^2) = \\
&= (\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1]))^2 \cdot (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^2 =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n,0,[k))^2 \cdot (0,n,[k))^2 = \\
&= (2n,0,[k)) \cdot (0,2n,[k)) = \\
&= (2n,2n,[k)),
\end{aligned}
$$

а це суперечить визначенню природного часткового порядку на напівґратці $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ (див. твердження 2 і 3). Отож отримуємо, що $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = (0,1,[k))$ і за твердженням 1.4.21(1) з [16], $\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)) = (1,0,[k))$. Тоді з означення напівгрупової операції на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що

$$\mathfrak{h}^k(p,q,[k+1)) = (p,q,[k)),$$

для всіх $p,q \in \omega$.

Припустимо, що $i > j$. Тоді для $a = 0,1,\ldots,k$ матимемо

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= \mathfrak{h}^k(i,i,[a) \cap (j-i+[k+1))) = \\
&= \begin{cases} \mathfrak{h}^k(i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ \mathfrak{h}^k(i,i,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ (i,i,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

і

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k(i,i,[a)) \cdot \mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) &= (i,i,[a)) \cdot (j,j,[k)) = \\
&= (i,i,[a) \cap (j-i+[k))) = \\
&= \begin{cases} (i,i,j-i+[k)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k; \\ (i,i,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отож, якщо $a = j-i+k$ (а такий випадок завжди можливий, зокрема коли $a = -1+k$, тобто $i = j+1$), то отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k((i,i,[a)) \cdot (j,j,[k+1))) &= (i,i,j-i+[k+1)) = \\
&= (i,i,a-k+[k+1)) = \\
&= (i,i,[a+1))
\end{aligned}
$$

і

$$\mathfrak{h}^k(i,i,[a)) \cdot \mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) = (i,i,[a)),$$

а це суперечить тому, що відображення $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфізмом. З отриманого протиріччя випливає, що умова $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1)) = (0,0,[k))$ не виконується.

Припустимо, що виконується випадок (2)

$$\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1)) = (1,1,[k)).$$

З твердження 4 випливає, що $\mathfrak{h}^k(i,j,[k+1)) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k)\}}$ для всіх $i,j \in \omega$, оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Також з тверджень 2 і 3 випливає, що $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1)) \preccurlyeq (2,2,[k))$.

За твердженням 1.4.21(2) з [16] маємо, що $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1])$ — ідемпотент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1]) = (i,i,[k])$ для деякого натурального числа $i \geqslant 2$. Позаяк

$$(0,0,[k+1]) = (0,1,[k+1]) \cdot (1,0,[k+1]),$$

то за твердженням 1.4.21(1) [16] отримуємо, що

$$\begin{aligned}(1,1,[k)) = \mathfrak{h}^k(0,0,[k+1]) &= \\ &= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1]) \cdot (1,0,[k+1])) = \\ &= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1]) = \\ &= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1}) = \\ &= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1},\end{aligned}$$

і, прийнявши $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = (m,n,[k))$, з леми 4 [2] випливає, що

$$\begin{aligned}(m,n,[k)) \cdot (m,n,[k))^{-1} &= (m,n,[k)) \cdot (n,m,[k)) = \\ &= (m,m,[k)) = \\ &= (1,1,[k)),\end{aligned}$$

звідки отримуємо, що

$$\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = (1,n,[k)),$$

для деякого натурального числа $n \geqslant 2$. Справді, $n \neq 1$, бо в цьому випадку за теоремою 1 гомоморфізм $\mathfrak{h}^k \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ був би груповим. Також з нерівності $(1,1,[k+1]) \preccurlyeq (0,0,[k+1])$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ випливає, що не існує такого ідемпотента вигляду $(p,p,[k+1])$, де $p \geqslant 2$, що

$$\mathfrak{h}^k(p,p,[k+1]) = (0,0,[k))),$$

а отже, за твердженням 1.4.21(3) з [16] не існує елемента $(s,t,[k+1])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}$ такого, що

$$\mathfrak{h}^k(s,t,[k+1]) = (0,0,[k)).$$

Аналогічно, з рівностей

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1]) &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1]) \cdot (0,1,[k+1])) = \\ &= \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1])) \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\ &= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1}) \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\ &= (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1} \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\ &= (1,n,[k))^{-1} \cdot (1,n,[k)) = \\ &= (n,1,[k)) \cdot (1,n,[k)) = \\ &= (n,n,[k))\end{aligned}$$

отримуємо, що $n \geqslant 2$.

Припустимо, що $n \geqslant 3$. Тоді з

$$\begin{aligned}(3,3,[k)) \preccurlyeq (2,2,[k+1)) &= \\ &= (2,0,[k+1))\cdot(0,2,[k+1)) = \\ &= (1,0,[k+1))^2\cdot(0,1,[k+1))^2\end{aligned}$$

випливає, що

$$\begin{aligned}(3,3,[k)) = \mathfrak{h}^k(3,3,[k)) &\preccurlyeq \\ &\preccurlyeq \mathfrak{h}^k(2,2,[k+1)) = \\ &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1))^2\cdot(0,1,[k+1))^2) = \\ &= (\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)))^2\cdot(\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^2 = \\ &= (n,1,[k))^2\cdot(1,n,[k))^2 = \\ &= (2n-1,1,[k))\cdot(1,2n-1,[k)) = \\ &= (2n-1,2n-1,[k)),\end{aligned}$$

однак це суперечить твердженням 2 і 3, оскільки $(3,3,[k)) \not\preccurlyeq (2n-1,2n-1,[k))$ у випадку $n \geqslant 3$. Отож $n=2$, а отже, отримуємо, що $\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)) = (1,2,[k))$ і $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = (1,2,[k))$. Позаяк за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то з того, що звуження гомоморфізму $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ на піднапівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ є ін'єктивним відображенням, з означення напівгрупової операції в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і з попередніх міркувань випливає, що

$$\mathfrak{h}^k(p,q,[k+1)) = (p+1,q+1,[k)),$$

для довільних $p,q\in\omega$.

Припустимо, що $i>j$. Тоді для $a=0,1,\ldots,k$ маємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= \mathfrak{h}^k(i,i,[a)\cap(j-i+[k+1))) = \\ &= \begin{cases}\mathfrak{h}^k(i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0\leqslant a<j-i+k+1;\\ \mathfrak{h}^k(i,i,[a)), & \text{якщо } a\geqslant j-i+k+1\end{cases} = \\ &= \begin{cases}(i+1,i+1,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0\leqslant a<j-i+k+1;\\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a\geqslant j-i+k+1\end{cases}\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k(i,i,[a))\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) &= (i+1,i+1,[a))\cdot(j+1,j+1,[k)) = \\ &= (i+1,i+1,[a)\cap(j-i+[k))) = \\ &= \begin{cases}(i+1,i+1,j-i+[k)), & \text{якщо } 0\leqslant a<j-i+k;\\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a\geqslant j-i+k.\end{cases}\end{aligned}$$

Отож, якщо $a=j-i+k$ (а такий випадок завжди можливий, зокрема, коли $a=-1+k$, тобто $i=j+1$), то отримуємо, що

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= (i+1,i+1,j-i+[k+1)) = \\ &= (i+1,i+1,a-k+[k+1)) = \\ &= (i+1,i+1,[a+1))\end{aligned}$$

і

$$\mathfrak{h}^k(i,i,[a])\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1])=(i+1,i+1,[a]),$$

а це суперечить тому, що відображення $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфізмом. З отриманого протиріччя випливає, що умова $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1])=(1,1,[k])$ не може виконуватися.

Припустимо, що виконується випадок (3):

$$\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1])=(1,1,[k-1]).$$

З твердження 4 випливає, що $\mathfrak{h}^k(i,j,[k+1])\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k-1)\}}$ для всіх $i,j\in\omega$, оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Також з тверджень 2 і 3 випливає, що виконується нерівність $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))\preccurlyeq(2,2,[k-1))$.

За твердженням 1.4.21(2) з [16] маємо, що $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))$ — ідемпотент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))=(i,i,[k-1))$ для деякого натурального числа $i\geqslant 2$. Позаяк

$$(0,0,[k+1))=(0,1,[k+1))\cdot(1,0,[k+1)),$$

то за твердженням 1.4.21(1) [16] отримаємо, що

$$\begin{aligned}(1,1,[k-1))=\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1))&=\\=\mathfrak{h}^k((0,1,[k+1))\cdot(1,0,[k+1)))&=\\=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))\cdot\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1))&=\\=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))\cdot\mathfrak{h}^k((0,1,[k+1))^{-1})&=\\=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))\cdot(\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^{-1}&,\end{aligned}$$

і, прийнявши

$$\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))=(m,n,[k-1)),$$

з леми 4 [2] випливає, що

$$\begin{aligned}(m,n,[k-1))\cdot(m,n,[k-1))^{-1}&=(m,n,[k-1))\cdot(n,m,[k-1))=\\&=(m,m,[k))=\\&=(1,1,[k-1)),\end{aligned}$$

а отже,

$$\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))=(1,n,[k-1)),$$

для деякого натурального числа $n\geqslant 2$. Справді, $n\neq 1$, оскільки в цьому випадку за теоремою 1 гомоморфізм $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ був би груповим. Також з нерівності $(1,1,[k+1))\preccurlyeq(0,0,[k+1))$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ випливає, що не існує такого ідемпотента вигляду $(p,p,[k+1))$, де $p\geqslant 2$, що

$$\mathfrak{h}^k(p,p,[k+1))=(0,0,[k-1))),$$

а отже, за твердженням 1.4.21(3) з [16] не існує елемента $(s,t,[k+1))$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}$ такого, що

$$\mathfrak{h}^k(s,t,[k+1))=(0,0,[k-1)).$$

Аналогічно, з рівностей

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1]) &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1))\cdot(0,1,[k+1))) = \\ &= \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)))\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = \\ &= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1))^{-1})\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = \\ &= (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^{-1}\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = \\ &= (1,n,[k-1))^{-1}\cdot(1,n,[k-1)) = \\ &= (n,1,[k-1))\cdot(1,n,[k-1)) = \\ &= (n,n,[k-1))\end{aligned}$$

отримуємо, що $n \geqslant 2$.

Припустимо, що $n \geqslant 3$. Тоді з

$$\begin{aligned}(6,6,[k-1)) \preccurlyeq (4,4,[k+1)) &= \\ &= (4,0,[k+1))\cdot(0,4,[k+1)) = \\ &= (1,0,[k+1))^4\cdot(0,1,[k+1))^4\end{aligned}$$

випливає, що

$$\begin{aligned}(6,6,[k-1)) &= \mathfrak{h}^k(6,6,[k-1)) \preccurlyeq \\ &\preccurlyeq \mathfrak{h}^k(4,4,[k+1)) = \\ &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1))^4\cdot(0,1,[k+1))^4) = \\ &= (\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)))^4\cdot(\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^4 = \\ &= (n,1,[k-1))^4\cdot(1,n,[k-1))^4 = \\ &= (4n-3,1,[k-1))\cdot(1,4n-3,[k-1)) = \\ &= (4n-3,4n-3,[k-1)),\end{aligned}$$

однак це суперечить твердженням 2 і 3, оскільки

$$(6,6,[k-1)) \not\preccurlyeq (4n-3,4n-3,[k-1))$$

у випадку $n \geqslant 3$. Отож $i=2$, а отже, отримуємо, що

$$\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)) = (1,2,[k-1)) \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = (2,1,[k-1)).$$

Позаяк за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то з того, що звуження гомоморфізму $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ на піднапівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ є ін'єктивним відображенням, з означення напівгрупової операції в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і з попередніх міркувань випливає, що

$$\mathfrak{h}^k(p,q,[k+1)) = (p+1,q+1,[k-1)),$$

для довільних $p,q\in\omega$.

Припустимо, що $i > j$. Тоді для $a = 0, 1, \ldots, k$ маємо

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) = \mathfrak{h}^k(i,i,[a)\cap(j-i+[k+1))) = \\
&\qquad = \begin{cases} \mathfrak{h}^k(i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ \mathfrak{h}^k(i,i,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} (i+1,i+1,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}^k(i,i,[a))\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) = (i+1,i+1,[a))\cdot(j+1,j+1,[k-1)) = \\
&\qquad = (i+1,i+1,[a)\cap(j-i+[k-1))) = \\
&\qquad = \begin{cases} (i+1,i+1,j-i+[k-1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k-1; \\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Отож, якщо $a = j - i + k$ (а такий випадок завжди можливий, зокрема, коли $a = -1 + k$, тобто $i = j + 1$), то отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= (i+1,i+1,j-i+[k+1)) = \\
&= (i+1,i+1,a-k+[k+1)) = \\
&= (i+1,i+1,[a+1))
\end{aligned}$$

і

$$\mathfrak{h}^k(i,i,[a))\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) = (i+1,i+1,[a)),$$

а це суперечить тому, що відображення $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфізмом. З отриманого протиріччя випливає, що умова $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1)) = (1,1,[k-1))$ не може виконуватися.

Таким чином, жоден з випадків (1), (2), чи (3) не виконується, а отже не існує гомоморфної ретракції $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$, звідки і випливають твердження теореми. □

З тверджень 5, 6 і теореми 2 випливає теорема 3, яка описує всі нетривіальні гомоморфні ретракти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Теорема 3. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Якщо сім'я $\mathscr{F}$ — нескінченна, то для довільного натурального числа i та для довільного $j \in \omega$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\geqslant i}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[j)\}}$ і лише вони є нетривіальними гомоморфними ретрактами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Якщо ж сім'я $\mathscr{F}$ — скінченна та $\bigcap\mathscr{F} = [k)$ для деякого натурального числа $k \geqslant 2$, то для довільного натурального числа $i \leqslant k$ та для довільного $j = 0, 1, \ldots, k$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\geqslant i}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[j)\}}$ і лише вони є нетривіальними гомоморфними ретрактами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а у випадку $\bigcap\mathscr{F} = [1)$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[0)\}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[1)\}}$ і лише вони є нетривіальними гомоморфними ретрактами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Зауваження 4. За твердженням 1 для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ індуктивних непорожніх підмножин у ω напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$, де $\mathscr{F}_0$ — ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $\omega \in \mathscr{F}_0$. Отож теорема 3 описує всі нетривіальні гомоморфні ретракти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ за модулем ізоморфізму напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$, який описаний у доведенні твердження 1.

Завершимо цю працю твердженнями, які описують ізоморфізм між напівгрупами $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ у випадку, коли $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — ω-замкнені сім'ї індуктивних непорожніх підмножин у ω.

Теорема 4. *Нехай $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — ω-замкнені сім'ї індуктивних непорожніх підмножин у ω. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ ізоморфні;*
(2) *сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ рівнопотужні;*
(3) *існує ціле число n таке, що $\mathscr{F}_1 = \{n + F : F \in \mathscr{F}_2\}$.*

Доведення. Імплікація (3)⇒(2) очевидна, а імплікація (3)⇒(1) випливає з твердження 1.

(2)⇒(3). Припустимо, що сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ рівнопотужні. Приймемо $n_1 = \min \bigcup \mathscr{F}_1$ і $n_2 = \min \bigcup \mathscr{F}_2$. Тоді $[n_1) \in \mathscr{F}_1$ і $[n_2) \in \mathscr{F}_2$. Якщо сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — скінченні, то існують максимальні цілі числа n_1^0 і n_2^0 такі, що $[n_1^0) \in \mathscr{F}_1$ і $[n_2^0) \in \mathscr{F}_2$, але $[n_1^0+1) \notin \mathscr{F}_1$ і $[n_2^0+1) \notin \mathscr{F}_2$. З леми 1 випливає, що $[i) \in \mathscr{F}_1$ і $[j) \in \mathscr{F}_2$ для довільних цілих чисел $i = n_1, \ldots, n_1^0$ і $j = n_2, \ldots, n_2^0$. Тоді з рівнопотужності сімей $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ отримуємо, що

$$|\mathscr{F}_1| = n_1^0 - n_1 + 1 = n_2^0 - n_2 + 1 = |\mathscr{F}_2|,$$

і прийнявши $n = n_1 - n_2 = n_1^0 - n_2^0$, отримуємо, що $\mathscr{F}_1 = \{n + F : F \in \mathscr{F}_2\}$.

Якщо сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — нескінченні, то з леми 1 випливає, що $[i) \in \mathscr{F}_1$ і $[j) \in \mathscr{F}_2$ для довільних цілих чисел $i \geqslant n_1$ і $j \geqslant n_2$, а отже, $\mathscr{F}_1 = \{n + F : F \in \mathscr{F}_2\}$ для $n = n_1 - n_2$.

(1)⇒(2). Припустимо, що відображення $\mathfrak{h} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ є ізоморфізмом. Приймемо $n_1 = \min \bigcup \mathscr{F}_1$ і $n_2 = \min \bigcup \mathscr{F}_2$. За теоремою 4 з [2] елементи $(0, 0, [n_1))$ і $(0, 0, [n_2))$ є одиницями напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$, відповідно. З твердження 4 випливає, що гомоморфний образ $\mathfrak{h}(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}})$ міститься в піднапівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$. Аналогічно, гомоморфний образ $\mathfrak{h}^{-1}(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}})$ стосовно оберненого відображення $\mathfrak{h}^{-1}$ до ізоморфізму $\mathfrak{h} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$, міститься в піднапівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Оскільки композиції $\mathfrak{h}^{-1} \circ \mathfrak{h}$ і $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{h}^{-1}$ є тотожними відображеннями напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$, відповідно, то їхні звуження $\left(\mathfrak{h}^{-1} \circ \mathfrak{h}\right)|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}}$ і $\left(\mathfrak{h} \circ \mathfrak{h}^{-1}\right)|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}}$ тотожні відображення напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$, відповідно, а отже, звуження $\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$ і $\mathfrak{h}^{-1}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ ізоморфізму $\mathfrak{h}$ і до нього оберненого $\mathfrak{h}^{-1}$ на напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$, відповідно, є ізоморфізмами цих напівгруп.

Очевидно, що при ізоморфізмі $h \colon S \to T$ напівгруп S і T твірні елементи напівгрупи S відображаються у твірні елементи напівгрупи T. Тоді з того, що $(0, 1)$ і $(1, 0)$ — твірні елементи біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_{\omega}$ і $(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0)$ — одиниця в $\boldsymbol{B}_{\omega}$ та $(1, 0) \cdot (0, 1) = (1, 1)$ — ідемпотент біциклічного моноїда, який відмінний від одиниці, випливає, що тотожне відображення біциклічного моноїда та лише воно є ізоморфізмом з $\boldsymbol{B}_{\omega}$ на $\boldsymbol{B}_{\omega}$. З аналогічних міркувань і теореми 4 [2] випливає, що для довільного числа $n \in \omega$ єдиний ізоморфізм $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n)\}}$ визначається за формулою

$$\mathfrak{f}(i,j) = (i,j,[n)), \qquad i,j \in \omega,$$

а отже, звуження $\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$ ізоморфізму $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ визначається за формулою

$$\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}}(i,j,[n_1)) = (i,j,[n_2)), \qquad i,j \in \omega.$$

Позаяк відображення $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ є ізоморфізмом, то з вище сказаного випливає, що його звуження $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1 \geqslant n_1+1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2 \geqslant n_2+1}$ є ізоморфізмом. Далі аналогічно, як викладено вище, індукцією доводимо, що для довільного натурального числа k такого, що $[n_1+k) \in \mathscr{F}_1$ звуження $\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}}}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2+k)\}}$ ізоморфізму $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ визначається за формулою

$$\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}}}(i,j,[n_1+k)) = (i,j,[n_2+k)), \qquad i,j \in \omega.$$

Звідси випливає, що сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ рівнопотужні. □

З доведення імплікації (1)⇒(2) теореми 4 випливає наслідок 1, який описує структуру ізоморфізмів з напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ у напівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$.

Наслідок 1. *Нехай $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — ω-замкнені сім'ї індуктивних непорожніх підмножин у ω, $n_1 = \min\bigcup\mathscr{F}_1$ і $n_2 = \min\bigcup\mathscr{F}_2$. Якщо напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ ізоморфні, то ізоморфізм $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ визначається за формулою*

$$\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}}}(i,j,[n_1+k)) = (i,j,[n_2+k)), \qquad i,j \in \omega,$$

для кожного цілого числа k такого, що $[n_1+k) \in \mathscr{F}_1$.

Нагадаємо [8], що *автоморфізмом* напівгрупи S називається довільний ізоморфізм з S на S.

Оскільки автоморфізми тривіальної напівгрупи тривіальні, тобто є тотожними відображеннями, то з наслідку 1 випливає наслідок 2.

Наслідок 2. *Для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ індуктивних підмножин у ω кожен автоморфізм напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є тривіальним відображенням, а отже, група авторморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тривіальна.*

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. В. В. Вагнер, *Обощенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
2. О. Гутік, М. Михаленич, *Про одне узагальнення біциклічного моноїда*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90** (2020), 5–19. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.005-019
3. О. В. Гутік, І. В. Позднякова, *Про напівгрупу, породжену розширеною біциклічною напівгрупою та ω-замкненою сім'єю*, Мат. методи фіз.-мех. поля **64** (2021), no. 1, 21–34.

4. O. Гутік, А. Савчук, *Напівгрупа часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел*, Буковинський мат. журнал **6** (2018), no. 1–2, 42–51. DOI:10.31861/bmj2018.01.042
5. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
6. D. R. Brown, *Topological semilattices on the two-cell*, Pacific J. Math. 15 (1965), no. 1, 35–46. DOI: 10.2140/pjm.1965.15.35
7. R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, (Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20) Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. DOI: 10.1007/978-3-662-43119-1
8. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
9. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
10. V. A. Fortunatov, *Congruences on simple extensions of semigroups*, Semigroup Forum **13** (1976), 283–295. DOI: 10.1007/BF02194949
11. G. L. Fotedar, *On a semigroup associated with an ordered group*, Math. Nachr. **60** (1974), no. 1–6, 297–302. DOI: 10.1002/mana.19740600128
12. G. L. Fotedar, *On a class of bisimple inverse semigroups*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 49–53.
13. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups,* Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008
14. O. Gutik and O. Lysetska, *On the semigroup* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ *which is generated by the family* $\mathscr{F}$ *of atomic subsets of* ω, arXiv:2108.11354, 2021, preprint.
15. O. Gutik, D. Pagon, and K. Pavlyk, *Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **15** (2011), no. 2, 61–80. DOI: 10.12697/ACUTM.2011.15.10
16. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
17. O. Lysetska, *On feebly compact topologies on the semigroup* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90** (2020), 48–56. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.048-056
18. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
19. N. R. Reilly, *Bisimple* ω*-semigroups,* Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–167. DOI: 10.1017/S2040618500035346
20. R. J. Warne, A class of bisimple inverse semigroups, Pacif. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577. DOI: 10.2140/pjm.1966.18.563
21. R. J. Warne, *Bisimple inverse semigroups mod groups*, Duke Math. J. **34** (1967), no. 4, 787–812. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 18.05.2021

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91

ON GROUP CONGRUENCES ON THE SEMIGROUP $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ AND ITS HOMOMORPHIC RETRACTS IN THE CASE WHEN THE FAMILY $\mathscr{F}$ CONSISTS OF INDUCTIVE NON-EMPTY SUBSETS OF ω

Oleg GUTIK, Mykola MYKHALENYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
myhalenychmc@gmail.com

We study group congruences on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ and its homomorphic retracts in the case when an ω-closed family $\mathscr{F}$ consists of inductive non-empty subsets of ω. It is proven that a congruence $\mathfrak{C}$ on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ is a group congruence if and only if its restriction on a subsemigroup of $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, which is isomorphic to the bicyclic semigroup, is not the identity relation. Also, all non-trivial homomorphic retracts and isomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ are described.

Key words: inverse semigroup, bicyclic monoid, inductive set, group congruence, homomorphic retract, isomorphism, automorphism.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 28–39
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 28–39
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.028-039

УДК 512.53

THE BINARY QUASIORDER ON SEMIGROUPS

Taras BANAKH, Olena HRYNIV

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: t.o.banakh@gmail.com, ohryniv@gmail.com

Given two elements x, y of a semigroup X we write $x \lesssim y$ if for every homomorphism $\chi : X \to \{0,1\}$ we have $\chi(x) \le \chi(y)$. The quasiorder $\lesssim$ is called the *binary quasiorder* on X. It induces the equivalence relation $\Updownarrow$ that coincides with the least semilattice congruence on X. In the paper we discuss some known and new properties of the binary quasiorder on semigroups.

Key words: the binary quasiorder, the least semilattice congruence, prime coideal, unipotent semigroup.

1. Introduction

In this paper we study the binary quasiorder on semigroups. Every semigroup carries many important quasiorders (for example, those related to the Green relations). One of them is the binary quasiorder $\lesssim$ defined as follows. Given two elements x, y of a semigroup X we write $x \lesssim y$ if $\chi(x) \le \chi(y)$ for any homomorphism $\chi : X \to \{0,1\}$. On every semigroup X the binary quasiorder generates a congruence, which coincides with the least semilattice congruence, and decomposes the semigroup into a semilattice of semilattice-indecomposable semigroups. This fundamental decomposition result was proved by Tamura [34] (see also [25], [26], [37]). Because of its fundamental importance, the least semilattice congruence has been deeply studied by many mathematicians, see the papers [15], [16], [17], [18], [23], [29], [30], [31], [32], [25], [26], [33], [38], [35], [36], surveys [22], [24], and monographs [13], [21], [27]. The aim of this paper is to provide a survey of known and new results on the binary quasiorder and the least semilattice congruence on semigroups. The obtained results will be applied in the theory of categorically closed semigroups developed by the first author in collaboration with Serhii Bardyla, see [3, 4, 5, 6, 7].

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10

2. Preliminaries

In this section we collect some standard notions that will be used in the paper. We refer to [19] for Fundamentals of Semigroup Theory.

We denote by ω the set of all finite ordinals and by $\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=} \omega \setminus \{0\}$ the set of all positive integer numbers.

A *semigroup* is a set endowed with an associative binary operation. A semigroup X is called a *semilattice* if X is commutative and every element $x \in X$ is an *idempotent* which means $xx = x$. Each semilattice X carries the *natural partial order* $\leqslant$ defined by $x \leq y$ iff $xy = x$. For a semigroup X we denote by $E(X) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : xx = x\}$ the set of idempotents of X.

Let X be a semigroup. For an element $x \in X$ let

$$x^{\mathbb{N}} \overset{\text{def}}{=} \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$$

be the monogenic subsemigroup of X generated by the element x. For two subsets $A, B \subseteq X$, let $AB \overset{\text{def}}{=} \{ab : a \in A,\ b \in B\}$ be the product of A, B in X.

For an element a of a semigroup X, the set

$$H_a = \{x \in X : (xX^1 = aX^1)\ \wedge\ (X^1x = X^1a)\}$$

is called the $\mathcal{H}$-*class* of a. Here $X^1 = X \cup \{1\}$ where 1 is an element such that $1x = x = x1$ for all $x \in X^1$. By Corollary 2.2.6 [19], for every idempotent $e \in E(X)$ its $\mathcal{H}$-class H_e coincides with the maximal subgroup of X containing the idempotent e.

3. The binary quasiorder

In this section we discuss the binary quasiorder on a semigroup and its relation to the least semilattice congruence. A *quasiorder* is a reflexive transitive relation.

Let $\mathbb{2}$ denote the set $\{0, 1\}$ endowed with the operation of multiplication inherited from the ring $\mathbb{Z}$. It is clear that $\mathbb{2}$ is a two-element semilattice, so it carries the natural partial order, which coincides with the linear order inherited from $\mathbb{Z}$.

For elements x, y of a semigroup X we write $x \lesssim y$ if $\chi(x) \leq \chi(y)$ for every homomorphism $\chi : X \to \mathbb{2}$. It is clear that $\lesssim$ is a quasiorder on X. This quasiorder will be referred to as *the binary quasiorder* on X. The obvious order properties of the semilattice $\mathbb{2}$ imply the following (obvious) properties of the binary quasiorder on X.

Proposition 1. *For any semigroup X and any elements $x, y, a \in X$, the following statements hold:*

1. *if $x \lesssim y$, then $ax \lesssim ay$ and $xa \lesssim ya$;*
2. *$xy \lesssim yx \lesssim xy$;*
3. *$x \lesssim x^2 \lesssim x$;*
4. *$xy \lesssim x$ and $xy \lesssim y$.*

For an element a of a semigroup X and subset $A \subseteq X$, consider the following sets:

$${\Uparrow}a \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : a \lesssim x\}, \quad {\Downarrow}a \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : x \lesssim a\}, \quad \text{and} \quad {\Updownarrow}a \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : a \lesssim x \lesssim a\},$$

called the *upper* $\mathbb{2}$-*class*, *lower* $\mathbb{2}$-*class* and the $\mathbb{2}$-*class* of x, respectively. Proposition 1 implies that those three classes are subsemigroups of X.

For two elements $x, y \in X$ we write $x \Updownarrow y$ iff $\Updownarrow x = \Updownarrow y$ iff $\chi(x) = \chi(y)$ for any homomorphism $\chi : X \to \mathbb{2}$. Proposition 1 implies that $\Updownarrow$ is a congruence on X.

We recall that a *congruence* on a semigroup X is an equivalence relation $\approx$ on X such that for any elements $x \approx y$ of X and any $a \in X$ we have $ax \approx ay$ and $xa \approx ya$. For any congruence $\approx$ on a semigroup X, the quotient set $X/_\approx$ has a unique semigroup structure such that the quotient map $X \to X/_\approx$ is a semigroup homomorphism. The semigroup $X/_\approx$ is called the *quotient semigroup* of X by the congruence $\approx$.

A congruence $\approx$ on a semigroup X is called a *semilattice congruence* if the quotient semigroup $X/_\approx$ is a semilattice. Proposition 1 implies that $\Updownarrow$ is a semilattice congruence on X. The intersection of all semilattice congruences on a semigroup X is a semilattice congruence called the *least semilattice congruence*, denoted by η in [19], [20] (by ξ in [35], [22], and by ρ_0 in [13]). The minimality of η implies that $\eta \subseteq \Updownarrow$. The inverse inclusion $\Updownarrow \subseteq \eta$ will be deduced from the following (probably known) theorem on extensions of $\mathbb{2}$-valued homomorphisms.

Theorem 1. *Let $\pi : X \to Y$ be a surjective homomorphism from a semigroup X to a semilattice Y. For every subsemilattice $S \subseteq Y$ and homomorphism $f : \pi^{-1}[S] \to \mathbb{2}$ there exists a homomorphism $F : X \to \mathbb{2}$ such that $F{\restriction}_{\pi^{-1}[S]} = f$.*

Proof. We claim that the function $F : X \to \mathbb{2}$ defined by

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \exists z \in \pi^{-1}[S] \text{ such that } \pi(xz) \in S \text{ and } f(xz) = 1; \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

is a required homomorphism extending f.

To see that F extends f, take any $x \in \pi^{-1}[S]$. If $f(x) = 1$, then for $z = x$ we have

$$\pi(xz) = \pi(x)\pi(z) = \pi(x)\pi(x) = \pi(x) \in S$$

and

$$f(xz) = f(x)f(z) = f(x)f(x) = 1$$

and hence $F(x) = 1 = f(x)$. If $F(x) = 1$, then there exists $z \in \pi^{-1}[S]$ such that $\pi(xz) \in S$ and

$$f(x)f(z) = f(xz) = f(zx) = 1,$$

which implies that $f(x) = 1$. Therefore, $F(x) = 1$ if and only if $f(x) = 1$. Since $\mathbb{2}$ has only two elements, this implies that $f = F{\restriction}_{\pi^{-1}[S]}$.

To show that F is a homomorphism, we first establish two properties of the homomorphism f.

Claim 1. *Let $x \in X$ and $z \in \pi^{-1}[S]$ be such that $xz \in \pi^{-1}[S]$. If $f(xz) = 1$, then $f(z) = 1$.*

Proof. It follows from $f(xz) = 1$ that

$$f(xzxz) = f(xz)f(xz) = 1.$$

Taking into account that

$$\pi(xzx) = \pi(x)\pi(z)\pi(x) = \pi(x)\pi(z) = \pi(xz) \in S,$$

we conclude that

$$1 = f(xzxz) = f(xzx)f(z)$$

and hence $f(z) = 1$. □

Claim 2. *Let $x, y \in X$ be such that $xy \in \pi^{-1}[S]$. Then $yx \in \pi^{-1}[S]$ and $f(xy) = f(yx)$.*

Proof. It follows that

$$\pi(yx) = \pi(y)\pi(x) = \pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \in S$$

and hence $yx \in \pi^{-1}[S]$. By analogy we can prove that $yxy, xyx \in \pi^{-1}[S]$. If $f(xy) = 0$, then

$$f(yx) = f(yx)f(yx)f(yx)f(yx) = f(yxyxyxyx) = f(yxy)f(xy)f(xyx) = 0.$$

By analogy we can prove that $f(yx) = 0$ implies $f(xy) = 0$. Therefore, $f(xy) = 0$ if and only if $f(yx) = 0$. Since the set $\mathbb{2}$ has only two elements, this implies that $f(xy) = f(yx)$. □

To show that F is a homomorphism, fix any elements $x_1, x_2 \in X$. We should prove that

$$F(x_1x_2) = F(x_1)F(x_2).$$

First assume that $F(x_1)F(x_2) = 1$ and hence $F(x_1) = 1 = F(x_2)$. The definition of F yields elements $z_1, z_2 \in \pi^{-1}[S]$ such that $\pi(x_iz_i) \in S$ and $f(x_iz_i) = 1$ for every $i \in \{1, 2\}$. Claims 1 and 2 imply

$$f(z_ix_i) = f(x_iz_i) = 1 = f(z_i)$$

for every $i \in \{1, 2\}$. Also

$$\pi(x_1x_2z_2z_1) = \pi(z_1x_1x_2z_2z_1) = \pi(x_1z_1)\pi(x_2z_2) \in SS \subseteq S,$$

so we can write

$$f(z_1)f(x_1x_2z_2z_1) = f(z_1x_1x_2z_2z_1) = f(z_1x_1)f(x_2z_2)f(z_1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

and conclude that $f(x_1x_2z_2z_1) = 1$ and $F(x_1x_2) = 1$ by the definition of F.

Next, assume that $F(x_1x_2) = 1$. Then there exists $z \in \pi^{-1}[S]$ such that $\pi(x_1x_2z) \in S$ and $f(x_1x_2z) = 1$. For the element $z_1 = x_2zx_1x_2z \in \pi^{-1}[S]$ we have $x_1z_1 \in \pi^{-1}[S]$ and

$$f(x_1z_1) = f(x_1x_2zx_1x_2z) = f(x_1x_2z)f(x_1x_2z) = 1 \cdot 1 = 1,$$

which yields $F(x_1) = 1$ by the definition of F.

On the other hand, Claim 2 ensures that $f(x_2zx_1) = f(x_1x_2z) = 1$ and then for the element $z_2 = zx_1x_2zx_1 \in \pi^{-1}[S]$ we have $x_2z_2 \in \pi^{-1}[S]$ and

$$f(x_2z_2) = f(x_2zx_1x_2zx_1) = f(x_2zx_1)f(x_2zx_1) = 1,$$

which yields $F(x_2) = 1$ by the definition of F.

Therefore, $F(x_1x_2) = 1$ if and only if $F(x_1)F(x_2) = 1$. Since $\mathbb{2}$ has only two elements, this equivalence implies the equality $F(x_1x_2) = F(x_1)F(x_2)$. □

Corollary 1. *Any homomorphism $f : S \to \mathbb{2}$ defined on a subsemilattice S of a semilattice X can be extended to a homomorphism $F : X \to \mathbb{2}$.*

Proof. Apply Theorem 1 to the identity homomorphism $\pi : X \to X$. □

Corollary 1 implies the following important fact, first noticed by Petrich [25], [26] and Tamura [35].

Theorem 2. *The congruence $\Updownarrow$ on any semigroup X coincides with the least semilattice congruence on X.*

Proof. Let η be the least semilattice congruence on X and $\eta(\cdot) : X \to X/\eta$ be the quotient homomorphism assigning to each element $x \in X$ its equivalence class $\eta(x) \in X/\eta$. We need to prove that $\eta(x) = {\Updownarrow}x$ for every $x \in X$. Taking into account that $\Updownarrow$ is a semilattice congruence and η is the least semilattice congruence on X, we conclude that $\eta \subseteq {\Updownarrow}$ and hence $\eta(x) \subseteq {\Updownarrow}x$ for all $x \in X$. Assuming that $\eta \neq {\Updownarrow}$, we can find elements $x, y \in X$ such that $x \Updownarrow y$ but $\eta(x) \neq \eta(y)$. Consider the subsemilattice $S = \{\eta(x), \eta(y), \eta(x)\eta(y)\}$ of the semilattice X/η. It follows from $\eta(x) \neq \eta(y)$ that $\eta(x)\eta(y) \neq \eta(x)$ or $\eta(x)\eta(y) \neq \eta(y)$. Replacing the pair x, y by the pair y, x, we can assume that $\eta(x)\eta(y) \neq \eta(y)$. In this case the unique function $h : S \to \mathbb{2}$ with $h^{-1}(1) = \{\eta(y)\}$ is a homomorphism. By Corollary 1, the homomophism h can be extended to a homomorphism $H : X/\eta \to \mathbb{2}$. Then the composition $\chi \overset{\mathsf{def}}{=} H \circ \eta(\cdot) : X \to \mathbb{2}$ is a homomorphism such that $\chi(x) = 0 \neq 1 = \chi(y)$, which implies that ${\Updownarrow}x \neq {\Updownarrow}y$. But this contradicts the choice of the points x, y. This contradicton completes the proof of the equality ${\Updownarrow} = \eta$. □

A semigroup X is called $\mathbb{2}$-*trivial* if every homomorphism $h : X \to \mathbb{2}$ is constant. Tamura [35], [36] calls $\mathbb{2}$-trivial semigroups *semilattice-indecomposable* (or briefy *s-indecomposable*) semigroups.

Theorem 1 implies the following fundamental fact first proved by Tamura [34] and then reproved by another method in [37], see also [25], [26].

Theorem 3 (Tamura). *For every element x of a semigroup X its $\mathbb{2}$-class ${\Updownarrow}x$ is a $\mathbb{2}$-trivial semigroup.*

Now we provide an inner description of the binary quasiorder via prime (co)ideals, following the approach of Petrich [26] and Tamura [35].

A subset I of a semigroup X is called

- an *ideal* in X if $(IX) \cup (XI) \subseteq I$;
- a *prime ideal* if I is an ideal such that $X \setminus I$ is a subsemigroup of X;
- a (*prime*) *coideal* if the complement $X \setminus I$ is a (prime) ideal in X.

According to this definition, the sets $\varnothing$ and X are prime (co)ideals in X.

Observe that a subset A of a semigroup X is a prime coideal in X if and only if its *characteristic function*

$$\chi_A : X \to \mathbb{2}, \quad \chi_A : x \mapsto \chi_A(x) \overset{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is a homomorphism. This function characterization of prime coideals implies the following inner description of the $\mathbb{2}$-quasiorder, first noticed by Tamura in [35].

Proposition 2. *For any element x of a semigroup X, its upper $\mathbb{2}$-class ${\Uparrow}x$ coincides with the smallest coideal of X that contains x.*

The following inner description of the upper $\mathbb{2}$-classes is a modified version of Theorem 3.3 in [26].

Proposition 3. *For any element x of a semigroup X its upper $\mathbb{2}$-class $\Uparrow x$ is equal to the union $\bigcup_{n\in\omega}\Uparrow_n x$, where $\Uparrow_0 x=\{x\}$ and*

$$\Uparrow_{n+1}x \overset{\mathsf{def}}{=} \{y\in X : X^1yX^1\cap(\Uparrow_n x)^2\neq\varnothing\}$$

for $n\in\omega$.

Proof. Observe that for every $n\in\omega$ and $y\in\Uparrow_n x$ we have $yy\in X^1yX^1\cap(\Uparrow_n x)^2\neq\varnothing$ and hence $y\in\Uparrow_{n+1}x$. Therefore, $(\Uparrow_n x)_{n\in\omega}$ is an increasing sequence of sets. Also, for every $y,z\in\Uparrow_n x$ we have $yz\in X^1yzX^1\cap(\Uparrow_n x)^2$ and hence $yz\in\Uparrow_{n+1}x$, which implies that the union $\Uparrow_\omega x\overset{\mathsf{def}}{=}\bigcup_{n\in\omega}\Uparrow_n x$ is a subsemigroup of X.

The definition of the sets $\Uparrow_n x$ implies that the complement $I=X\setminus\Uparrow_\omega x$ is an ideal in X. Then $\Uparrow_\omega x$ is a prime coideal in X. Taking into account that $\Uparrow x$ is the smallest prime coideal containing x, we conclude that $\Uparrow x\subseteq\Uparrow_\omega x$. To prove that $\Uparrow_\omega x\subseteq\Uparrow x$, it suffices to check that $\Uparrow_n x\subseteq\Uparrow x$ for every $n\in\omega$. It is trivially true for $n=0$. Assume that for some $n\in\omega$ we have already proved that $\Uparrow_n x\subseteq\Uparrow x$. Since $\Uparrow x$ is a coideal in X, for any $y\in X\setminus\Uparrow x$ we have $\varnothing=X^1yX^1\cap\Uparrow x\supseteq X^1yX^1\cap\Uparrow_n x$, which implies that $y\notin\Uparrow_{n+1}x$ and hence $\Uparrow_{n+1}\subseteq\Uparrow x$. Consequently, $\Uparrow_n x\subseteq\Uparrow x$ for all $n\in\omega$ and hence $\Uparrow_\omega x=\Uparrow x$. $\square$

For a positive integer n, let

$$2^{<n}\overset{\mathsf{def}}{=}\bigcup_{k<n}\{0,1\}^k \quad\text{and}\quad 2^{\le n}\overset{\mathsf{def}}{=}\bigcup_{k\le n}\{0,1\}^k.$$

For a sequence $s=(s_0,\dots,s_{n-1})\in 2^n$ and a number $k\in\{0,1\}$ let

$$s\hat{\ }k\overset{\mathsf{def}}{=}(s_0,\dots,s_{n-1},k)\quad\text{and}\quad k\hat{\ }s\overset{\mathsf{def}}{=}(k,s_0,\dots,s_{n-1}).$$

The following proposition provides a constructive description of elements of the sets $\Uparrow_n x$ appearing in Proposition 3.

Proposition 4. *For every $n\in\mathbb{N}$ and every element x of a semigroup X, the set $\Uparrow_n x$ coincides with the set $\Uparrow'_n x$ of all elements $y\in X$ for which there exist sequences $\{x_s\}_{s\in 2^{\le n}}$, $\{y_s\}_{s\in 2^{\le n}}\subseteq X$ and $\{a_s\}_{s\in 2^{\le n}},\{b_s\}_{s\in 2^{\le n}}\subseteq X^1$ satisfying the following conditions:*

- (1_n) *$x_s=x$ for all $s\in 2^n$;*
- (2_n) *$y_s=a_sx_sb_s$ for every $s\in 2^{\le n}$;*
- (3_n) *$y_s=x_{s\hat{\ }0}x_{s\hat{\ }1}$ for every $s\in 2^{<n}$;*
- (4_n) *$x_{()}=y$ for the unique element $()$ of 2^0.*

Proof. This proposition will be proved by induction on n. For $n=1$, we have

$$\begin{aligned}\Uparrow_1 &\overset{\mathsf{def}}{=}\{y\in X : xx\in X^1yX^1\}=\{y\in X:\exists a,b\in X^1\ \ ayb=xx\}\\ &=\{y\in X:\exists\{x_s\}_{s\in 2^{\le 1}},\{y_s\}_{s\in 2^{\le 1}}\subseteq X,\ \{a_s\}_{a\in 2^{\le 1}},\{b_s\}_{s\in 2^{\le 1}}\subseteq X^1,\\ &\qquad\qquad x_{(0)}=x_{(1)}=x,\ y_{()}=x_{(0)}x_{(1)},\ x_{()}=y,\ y_{()}=a_{()}x_{()}b_{()}\}=\Uparrow'_1 x.\end{aligned}$$

Assume that for some $n\in\mathbb{N}$ the equality $\Uparrow_n x=\Uparrow'_n x$ has been proved. To check that $\Uparrow_{n+1}x\subseteq\Uparrow'_{n+1}x$, take any $x_{()}\in\Uparrow_{n+1}x$. The definition of $\Uparrow_{n+1}x$ ensures that $X^1x_{()}X^1\cap(\Uparrow_n x)^2\neq\varnothing$ and hence $a_{()}x_{()}b_{()}=x_{(0)}x_{(1)}$ for some $a_{()},b_{()}\in X^1$ and $x_{(0)}x_{(1)}\in\Uparrow_n x=\Uparrow'_n x$. By the definition of the set $\Uparrow'_n x$, for every $k\in\{0,1\}$, there exist sequences $\{x_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}}, \{y_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}} \subseteq X$ and $\{a_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}}, \{b_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}} \subseteq X^1$ such that

- $x_{k\hat{}s} = x$ for all $s \in 2^n$;
- $y_{k\hat{}s} = a_{k\hat{}s}x_{k\hat{}s}b_{k\hat{}s}$ for every $s \in 2^{\le n}$;
- $y_{k\hat{}s} = x_{k\hat{}s\hat{}0}x_{k\hat{}s\hat{}1}$ for every $s \in 2^{<n}$.

Then the sequences $\{x_s\}_{s\in 2^{\le n+1}}, \{y_s\}_{s\in 2^{\le n+1}} \subseteq X$ and $\{a_s\}_{s\in 2^{\le n+1}}, \{b_s\}_{s\in 2^{\le n+1}} \subseteq X^1$ witness that $x_{()} \in \Uparrow'_{n+1}x$, which completes the proof of the inclusion $\Uparrow_{n+1}x \subseteq \Uparrow'_{n+1}x$.

To prove that $\Uparrow'_{n+1}x \subseteq \Uparrow_{n+1}x$, take any $x_{()} \in \Uparrow'_{n+1}x$ and by the definition of $\Uparrow'_{n+1}x$, find sequences $\{x_s\}_{s\in 2^{\le n+1}}, \{y_s\}_{s\in 2^{\le n+1}} \subseteq X$ and $\{a_s\}_{s\in 2^{\le n+1}}, \{b_s\}_{s\in 2^{\le n+1}} \subseteq X^1$ satisfying the conditions (1_{n+1})–(3_{n+1}). Then for every $k \in \{0,1\}$ the sequences $\{x_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}}, \{x_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}} \subseteq X$ and $\{a_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}}, \{b_{k\hat{}s}\}_{s\in 2^{\le n}} \subseteq X^1$ witness that $x_{(0)}, x_{(1)} \in \Uparrow'_n = \Uparrow_n x$ and then the equalities $a_{()}x_{()}b_{()} = y_{()} = x_{(0)}x_{(1)} \in (\Uparrow_n x)^2$ imply that $X^1x_{()}X^1 \cap (\Uparrow_n x)^2 \neq \varnothing$ and hence $x_{()} \in \Uparrow_{n+1}x$, which completes the proof of the equality $\Uparrow_{n+1}x = \Uparrow'_{n+1}x$. □

A semigroup X is called *duo* if $aX = Xa$ for every $a \in X$. Observe that each commutative semigroup is duo.

The upper $\mathbb{2}$-classes in duo semigroups have the following simpler description.

Theorem 4. *For any element $a \in X$ of a duo semigroup X we have*

$$\Uparrow a = \{x \in X : a^{\mathbb{N}} \cap X^1xX^1 \neq \varnothing\}.$$

Proof. First we prove that the set

$$\tfrac{a^{\mathbb{N}}}{X} \overset{\mathsf{def}}{=} \{x \in X : a^{\mathbb{N}} \cap X^1xX^1 \neq \varnothing\}$$

is contained in $\Uparrow a$. In the opposite case, we can find a point $x \in \frac{a^{\mathbb{N}}}{X} \setminus \Uparrow a$. Taking into account that $\Uparrow a$ is a coideal containing a, we conclude that $a^{\mathbb{N}} \subseteq \Uparrow a$ and

$$\varnothing = X^1xX^1 \cap \Uparrow a \supseteq X^1xX^1 \cap a^{\mathbb{N}},$$

which contradicts the choice of the point $x \in \frac{a^{\mathbb{N}}}{X}$. This contradiction shows that $\frac{a^{\mathbb{N}}}{X} \subseteq \Uparrow a$.

Next, we prove that $\frac{a^{\mathbb{N}}}{X}$ is a prime coideal. Since X is a duo semigroup, for every $x \in X$ we have $X^1x = xX^1 = X^1xX^1$. If $x, y \in \frac{a^{\mathbb{N}}}{X}$, then

$$X^1x \cap a^{\mathbb{N}} = X^1xX^1 \cap a^{\mathbb{N}} \neq \varnothing \neq X^1yX^1 \cap a^{\mathbb{N}} = yX^1 \cap a^{\mathbb{N}}$$

and hence $X^1xyX^1 \in a^{\mathbb{N}} \neq \varnothing$, which means that $xy \in \frac{a^{\mathbb{N}}}{X}$. Therefore, $\frac{a^{\mathbb{N}}}{X}$ is a subsemigroup of X. The definition of $\frac{a^{\mathbb{N}}}{X}$ ensures that $X \setminus \frac{a^{\mathbb{N}}}{X}$ is an ideal in X. Then $\frac{a^{\mathbb{N}}}{X} \subseteq \Uparrow a$ is a prime coideal in X and $\frac{a^{\mathbb{N}}}{X} = \Uparrow a$, by the minimality of $\Uparrow a$, see Proposition 2. □

Following Putcha and Weissglass [32], we define a semigroup X to be *viable* if for any elements $x, y \in X$ with $\{xy, yx\} \subseteq E(X)$, we have $xy = yx$. For various equivalent conditions to the viability, see [2]. For viable semigroups Putcha and Weissglass [32] proved the following simplification of Proposition 3.

Proposition 5 (Putcha–Weissglass)**.** *If X is a viable semigroup, then for every idempotent $e \in E(X)$we have $\Uparrow e = \{x \in X : e \in X^1xX^1\}$.*

Proof. We present a short proof of this theorem, for convenience of the reader. Let $\Uparrow_1 e \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : e \in X^1 x X^1\}$. By Proposition 3, $\Uparrow_1 e \subseteq \Uparrow e$. The reverse inclusion will follow from the minimality of the prime coideal $\Uparrow e$ as soon as we prove that $\Uparrow_1 e$ is a prime coideal in X. It is clear from the definition that $\Uparrow_1 e$ is a coideal. So, it remains to check that $\Uparrow_1 e$ is a subsemigroup. Given any elements $x, y \in \Uparrow_1 e$, find elements $a, b, c, d \in X^1$ such that $axb = e = cyd$. Then $axbe = ee = e$ and

$$(beax)(beax) = be(axbe)ax = beeax = beax,$$

which means that $beax$ is an idempotent. By the viability of X, $axbe = e = beax$. By analogy we can prove that $ecyd = e = ydec$. Then $beaxydec = ee = e$ and hence $xy \in \Uparrow_1 e$. $\square$

Proposition 5 has an important corollary, proved in [32].

Corollary 2 (Putcha–Wiessglass). *If X is a viable semigroup, then for every $x \in X$ its $\mathfrak{2}$-class $\Updownarrow x$ contains at most one idempotent.*

Proof. Take any idempotents $e, f \in \Updownarrow x$. By Proposition 5, there are elements $a, b, c, d \in X^1$ such that $e = afb$ and $f = ced$. Observe that $afbe = ee = e$ and

$$(beaf)(beaf) = be(afbe)af = beeaf = beaf$$

and hence $afbe$ and $beaf$ are idempotents. The viability of X ensures that

$$e = afbe = beaf \in Xf$$

and hence $X^1 e \subseteq X^1 f$. By analogy we can prove that $X^1 f \subseteq X^1 e$, which implies $X^1 e = X^1 f$. By analogy we can prove the equality $eX^1 = fX^1$. Then $H_e = H_f$ and finally $e = f$ (because the group $H_e = H_f$ contains a unique idempotent). $\square$

4. The structure of $\mathfrak{2}$-trivial semigroups

Tamura's Theorem 3 motivates the problem of a deeper study of the structure of $\mathfrak{2}$-trivial semigroups. This problem has been considered in the literature, see, e.g. [26, §3]. Proposition 2 implies the following simple characterization of $\mathfrak{2}$-trivial semigroups.

Theorem 5. *A semigroup X is $\mathfrak{2}$-trivial if and only if every nonempty prime ideal in X coincides with X.*

Observe that a semigroup X is $\mathfrak{2}$-trivial if and only if $X = \Uparrow x$ for every $x \in X$. This observation and Propositions 3 and 4 imply the following characterization.

Proposition 6. *A semigroup X is $\mathfrak{2}$-trivial if and only if for every $x, y \in X$ there exists $n \in \mathbb{N}$ and sequences $\{a_s\}_{s \in 2^{\le n}}, \{b_s\}_{s \in 2^{\le n}} \subseteq X^1$ and $\{x_s\}_{s \in 2^{\le n}}, \{y_s\}_{s \in 2^{\le n}} \subseteq X$ satisfying the following conditions:*

1. *$x_s = x$ for all $s \in 2^n$;*
2. *$y_s = a_s x_s b_s$ for every $s \in 2^{\le n}$;*
3. *$y_s = x_{s\hat{}0} x_{s\hat{}1}$ for every $s \in 2^{<n}$;*
4. *$x_{()} = y$ for the unique element $()$ of 2^0.*

A semigroup X is called *Archimedean* if for any elements $x, y \in X$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $x^n \in XyX$ for some $a, b \in X$. A standard example of an Archimedean semigroup is the additive semigroup $\mathbb{N}$ of positive integers. For commutative semigroups the following characterization was obtained by Tamura and Kimura in [38].

Theorem 6. *A duo semigroup X is $\mathfrak{2}$-trivial if and only if X is Archimedean.*

Proof. If X is $\mathfrak{2}$-trivial, then by Theorem 4, for every $x, y \in X$ there exists $n \in \omega$ such that $x^n \in XyX$, which means that X is Archimedean.

If X is Archimedean, then for every $\in X$, we have

$$\Uparrow x = \{y \in X : x^{\mathbb{N}} \cap (XyX) \neq \varnothing\} = X,$$

see Theorem 4, which means that the semigroup X is $\mathfrak{2}$-trivial. □

Following Tamura [36], we define a semigroup X to be *unipotent* if X contains a unique idempotent.

Theorem 7 (Tamura)**.** *For the unique idempotent e of an unipotent $\mathfrak{2}$-trivial semigroup X, the maximal group H_e of e in X is an ideal in X.*

Proof. This theorem was proved by Tamura in [36]. We present here an alternative (and direct) proof. To derive a contradiction, assume that H_e is not an ideal in X. Then the set

$$I \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{x \in X : \{ex, xe\} \not\subseteq H_e\}$$

is not empty. We claim that I is an ideal in X. Assuming the opposite, we could find $x \in I$ and $y \in X$ such that $xy \notin I$ or $yx \notin I$.

If $xy \notin I$, then $\{exy, xye\} \subseteq H_e$. Taking into account that exy and xye are elements of the group H_e, we conclude that $exy = exye = xye$. Let g be the inverse element to xye in the group H_e. Then

$$exyg = xyeg = xyg = e.$$

Replacing y by yg, we can assume that $ye = y$ and $xy = e$. Observe that

$$yxyx = y(xy)x = yex = (ye)x = yx,$$

which means that yx is an idempotent in S. Since e is a unique idempotent of the semigroup X, $yx = e = xy$. It follows that

$$xe = x(yx) = (xy)x = ex$$

and

$$ey = (yx)y = y(xy) = ye = y.$$

Using this information it is easy to show that $xe = ex \in H_e$. By analogy we can show that the assumption $yx \notin I$ implies $ex = xe \in H_e$. So, in both cases we obtain $ex = xe \in H_e$, which contradicts the choice of $x \in I$.

This contradiction shows that I is an ideal in S. Observe that for any $x, y \in X \setminus I$ we have $\{ex, xe, ey, ye\} \subseteq H_e$. Then also

$$xye = x(eye) = (xe)(ye) \in H_e$$

and

$$exy = (exe)y = (ex)(ey) \in H_e,$$

which means that $xy \in X \setminus I$ and hence I is a nontrivial prime ideal in X. But the existence of such an ideal contradicts the $\mathbb{2}$-triviality of X. $\square$

An element z of a semigroup X is called *central* if $zx = xz$ for all $x \in X$.

Corollary 3. *The unique idempotent e of a unipotent $\mathbb{2}$-trivial semigroup X is central in X.*

Proof. Let e be a unique idempotent of the unipotent semigroup X. By Tamura's Theorem 7, the maximal subgroup H_e of e is an ideal in X. Then for every $x \in X$ we have $xe, ex \in H_e$. Taking into account that xe and ex are elements of the group H_e, we conclude that $ex = exe = xe$. This means that the idempotent e is central in X. $\square$

As we already know a semigroup X is $\mathbb{2}$-trivial if and only if each nonempty prime ideal in X is equal to X.

A semigroup X is called

- *simple* if every nonempty ideal in X is equal to X;
- *congruence-free* if every congruence on X is equal to $X \times X$ or $\Delta_X \overset{\mathsf{def}}{=} \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$.

It is clear that a semigroup X is $\mathbb{2}$-trivial if X is either simple or congruence-free. On the other hand the additive semigroup of integers $\mathbb{N}$ is $\mathbb{2}$-trivial but not simple.

Remark 1. By [1], [14], there exists an infinite congruence-free monoid X with zero. Being congruence-free, the semigroup X is $\mathbb{2}$-trivial. On the other hand, X contains at least two central idempotents: 0 and 1. The $\mathbb{2}$-trivial monoid X is not unipotent and its center $Z(X) = \{z \in X : \forall x \in X\ (xz = zx)\}$ is not $\mathbb{2}$-trivial. The polycyclic monoids (see [10], [11], [8], [9]) have the similar properties. By Theorem 2.4 in [10], for $\lambda \geq 2$ the polycyclic monoid P_λ is congruence-free and hence $\mathbb{2}$-trivial, but its center $Z(P_\lambda) = \{0, 1\}$ is not $\mathbb{2}$-trivial.

5. Acknowledgements

The authors express their sincere thanks to Oleg Gutik and Serhii Bardyla for valuable information on congruence-free monoids (see Remark 1) and to all listeners of Lviv Seminar in Topological Algebra (especially, Alex Ravsky) for active listening of the talk of the first named author that allowed to notice and then correct a crucial gap in the initial version of this manuscript.

References

1. F. Al-Kharousi, A. J. Cain, V. Maltcev, and A. Umar, *A countable family of finitely presented infinite congruence-free monoids.* Acta Sci. Math. (Szeged) **81** (2015), no. 3–4, 437–445. DOI: 10.14232/actasm-013-028-z
2. T. Banakh, *E-Separated semigroups*, arXiv:2202.06298, 2022, preprint.
3. T. Banakh and S. Bardyla, *Complete topologized posets and semilattices*, Topology Proc. **57** (2021), 177–196.
4. T. Banakh and S. Bardyla, *Characterizing categorically closed commutative semigroups*, J. Algebra. **591** (2022), 84–110. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2021.09.030
5. T. Banakh and S. Bardyla, *Categorically closed countable semigroups*, arXiv:1806.02869, 2018, preprint.

6. T. Banakh and S. Bardyla, *Absolutely closed commutative semigroups*, in preparation.
7. T. Banakh and S. Bardyla, *Categorically closed Clifford semigroups*, in preparation.
8. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Math. Bull. Shev. Sci. Soc. **13** (2016), 13–28.
9. S. Bardyla, *On universal objects in the class of graph inverse semigroups*, Eur. J. Math. **6** (2020), no. 1, 4–13. DOI: 10.1007/s40879-018-0300-7
10. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
11. S. O. Bardyla and O. V. Gutik, *On a complete topological inverse polycyclic monoid*, Carp. Math. Publ. **8** (2016), no. 2, 183–194. DOI: 10.15330/cmp.8.2.183-194
12. S. Bogdanović and M. Ćirić, *Primitive π-regular semigroups*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **68** (1992), no. 10, 334–337. DOI: 10.3792/pjaa.68.334
13. S. M. Bogdanović, M. D. Ćirić, and Ž. Lj. Popović, *Semilattice decompositions of semigroups*, University of Niš, Niš, 2011. viii+321 pp.
14. A. J. Cain and V. Maltcev, *A simple non-bisimple congruence-free finitely presented monoid*, Semigroup Forum **90** (2015), no. 1, 184–188. DOI: 10.1007/s00233-014-9607-y
15. M. Ćirić and S. Bogdanović, *Decompositions of semigroups induced by identities*, Semigroup Forum **46** (1993), no. 3, 329–346. DOI: 10.1007/BF02573576
16. M. Ćirić and S. Bogdanović, *Semilattice decompositions of semigroups*, Semigroup Forum **52** (1996), no. 2, 119–132. DOI: 10.1007/BF02574089
17. J. L. Galbiati, *Some semilattices of semigroups each having one idempotent*, Semigroup Forum **55** (1997), no. 2, 206–214. DOI: 10.1007/PL00005922
18. R. S. Gigoń, *η-simple semigroups without zero and η^*-simple semigroups with a least non-zero idempotent*, Semigroup Forum **86** (2013), no. 1, 108–113. DOI: 10.1007/s00233-012-9408-0
19. J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, London Math. Soc. Monographs. New Ser. **12**, Clarendon Press, Oxford, 1995.
20. J. M. Howie and G. Lallement, *Certain fundamental congruences on a regular semigroup*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 145–159. DOI: 10.1017/S2040618500035334
21. M. S. Mitrović, *Semilattices of Archimedean semigroups*, With a foreword by Donald B. McAlister. University of Niš. Faculty of Mechanical Engineering, Niš, 2003. xiv+160 pp.
22. M. Mitrović, *On semilattices of Archimedean semigroup — a survey*, I. M. Araújo, (ed.) et al., Semigroups and languages. Proc. of the workshop, Lisboa, Portugal, November 27—29, 2002. River Edge, NJ: World Scientific. 2004, pp. 163–195. DOI: 10.1142/9789812702616_0010
23. M. Mitrović, D. A Romano, and M. Vinčić, *A theorem on semilattice-ordered semigroup*, Int. Math. Forum **4** (2009), no. 5–8, 227–232.
24. M. Mitrović and S. Silvestrov, *Semilatice decompositions of semigroups. Hereditariness and periodicity—an overview*, S. Silvestrov (ed.) et al., Algebraic structures and applications. Selected papers based on the presentations at the international conference on stochastic processes and algebraic structures – from theory towards applications, SPAS 2017, Västerås and Stockholm, Sweden, October 4—6, 2017. Cham: Springer. Springer Proc. Math. Stat. **317**, 2020, pp. 687–721. DOI: 10.1007/978-3-030-41850-2_29
25. M. Petrich, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), no. 3, 342–344. DOI: 10.1090/S0002-9904-1963-10912-X
26. M. Petrich, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Math. Z. **85** (1964), 68–82. DOI: 10.1007/BF01114879
27. M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merrill Research and Lecture Series. Charles E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1973. viii+198 pp.

28. M. Petrich and N. R. Reilly, *Completely regular semigroups*, Wiley-Intersci. Publ. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
29. Ž. Popović, Ś. Bogdanović, and M. Ćirić, *A note on semilattice decompositions of completely π-regular semigroups*, Novi Sad J. Math. **34** (2004), no. 2, 167–174.
30. M. S. Putcha, *Semilattice decompositions of semigroups*, Semigroup Forum **6** (1973), no. 1, 12–34. DOI: 10.1007/BF02389104
31. M. S. Putcha, *Minimal sequences in semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 93–106. DOI: 10.1090/S0002-9947-1974-0338233-4
32. M. S. Putcha and J. Weissglass, *A semilattice decomposition into semigroups having at most one idempotent*, Pacific J. Math. **39** (1971), no. 1, 225–228. DOI: 10.2140/pjm.1971.39.225
33. R. Šulka, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup, radicals and nilpotency*, Mat. Čas. Slovensk. Akad. Vied **20** (1970), no. 3, 172–180.
34. T. Tamura, *The theory of construction of finite semigroups, I*, Osaka Math. J. **8** (1956), 243–261.
35. T. Tamura, *Semilattice congruences viewed from quasi-orders*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), no. 1, 75–79. DOI: 10.1090/S0002-9939-1973-0333048-X
36. T. Tamura, *Semilattice indecomposable semigroups with a unique idempotent*, Semigroup Forum **24** (1982), no. 1, 77–82. DOI: 10.1007/BF02572757
37. T. Tamura and J. Shafer, *Another proof of two decomposition theorems of semigroups*, Proc. Japan Acad. **42** (1966), no. 7, 685–687. DOI: 10.3792/pja/1195521874
38. T. Tamura and N. Kimura, *On decompositions of a commutative semigroup*, Kodai Math. Sem. Rep. **6** (1954), no. 4, 109–112. DOI: 10.2996/kmj/1138843534

Стаття: надійшла до редколегії 07.02.2021
доопрацьована 13.04.2021
прийнята до друку 18.05.2021

БІНАРНИЙ КВАЗІПОРЯДОК НА НАПІВГРУПАХ

Тарас БАНАХ, Олена ГРИНІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, м. Львів
e-mails: t.o.banakh@gmail.com, ohryniv@gmail.com

Для двох елементів x, y напівгрупи X пишемо $x \lesssim y$, якщо $\chi(x) \le \chi(y)$ для довільного гомоморфізму $\chi : X \to \{0,1\}$. Відношення $\lesssim$ називається *бінарним квазіпорядком* на X. Він породжує відношення еквівалентності $\Updownarrow$, що збігається з найменшою напівґратковою конгруенцією на X. Подано огляд відомих і нових властивостей бінарного квазіпорядку на напівгрупах.

Ключові слова: бінарний квазіпорядок, мінімальна напівґраткова конгруенція, первинний коідеал, уніпотентна напівгрупа.

ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2021. Випуск 91. C. 40–53
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 40–53
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.040-053

УДК 512.536

A NOTE ON FEEBLY COMPACT SEMITOPOLOGICAL SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUPS OF A BOUNDED FINITE RANK

Oleg GUTIK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: oleg.gutik@lnu.edu.ua

We study feebly compact shift-continuous T_1-topologies on the symmetric inverse semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ of finite transformations of the rank $\leqslant n$. It is proved that such T_1-topology is sequentially pracompact if and only if it is feebly compact. Also, we show that every shift-continuous feebly ω-bounded T_1-topology on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is compact.

Key words: semigroup, inverse semigroup, semitopological semigroup, compact, sequentially pracompact, totally countably pracompact, ω-bounded-pracompact, feebly ω-bounded, feebly compact, Δ-system, the Sunflower Lemma, product, Σ-product.

1. Introduction and preliminaries

We follow the terminology of the monographs [4, 6, 10, 29, 32, 33]. If X is a topological space and $A \subseteq X$, then by $\operatorname{cl}_X(A)$ and $\operatorname{int}_X(A)$ we denote the topological closure and interior of A in X, respectively. By $|A|$ we denote the cardinality of a set A, by $A \triangle B$ the symmetric difference of sets A and B, by $\mathbb{N}$ the set of positive integers, and by ω the first infinite cardinal. By $\mathfrak{D}(\omega)$ and $\mathbb{R}$ we denote an infinite countable discrete space and the real numbers with the usual topology, respectively.

A semigroup S is called *inverse* if every a in S possesses a unique inverse a^{-1}, i.e., if there exists a unique element a^{-1} in S such that

$$aa^{-1}a = a \qquad \text{and} \qquad a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}.$$

A map which associates to any element of an inverse semigroup its inverse is called the *inversion*.

2020 Mathematics Subject Classification: 22A15, 54D45, 54H10, 54A10, 54D30, 54D40.

If S is a semigroup, then by $E(S)$ we denote the subset of all idempotents of S. On the set of idempotents $E(S)$ there exists a natural partial order: $e \leqslant f$ *if and only if* $ef = fe = e$. A *semilattice* is a commutative semigroup of idempotents. We observe that the set of idempotents of an inverse semigroup is a semilattice [34].

Every inverse semigroup S admits a partial order:

$$a \preccurlyeq b \qquad \text{if and only if there exists} \qquad e \in E(S) \quad \text{such that} \quad a = eb.$$

We shall say that $\preccurlyeq$ is the *natural partial order* on S (see [4, 34]).

Let λ be an arbitrary nonzero cardinal. A map α from a subset D of λ into λ is called a *partial transformation* of λ. In this case the set D is called the *domain* of α and is denoted by $\operatorname{dom}\alpha$. The image of an element $x \in \operatorname{dom}\alpha$ under α is denoted by $x\alpha$. Also, the set $\{x \in \lambda \colon y\alpha = x \text{ for some } y \in Y\}$ is called the *range* of α and is denoted by $\operatorname{ran}\alpha$. For convenience we denote by $\varnothing$ the empty transformation, a partial mapping with $\operatorname{dom}\varnothing = \operatorname{ran}\varnothing = \varnothing$.

Let $\mathscr{I}_\lambda$ denote the set of all partial one-to-one transformations of λ together with the following semigroup operation:

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{if} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \qquad \text{for} \quad \alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

The semigroup $\mathscr{I}_\lambda$ is called the *symmetric inverse semigroup* over the cardinal λ (see [6]). For any $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda$ the cardinality of $\operatorname{dom}\alpha$ is called the *rank* of α and it is denoted by $\operatorname{rank}\alpha$. The symmetric inverse semigroup was introduced by V. V. Wagner [34] and it plays a major role in the theory of semigroups.

Put $\mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \colon \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\}$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Obviously, $\mathscr{I}_\lambda^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ are inverse semigroups, $\mathscr{I}_\lambda^n$ is an ideal of $\mathscr{I}_\lambda$, for each $n = 1, 2, 3, \ldots$. The semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ is called the *symmetric inverse semigroup of finite transformations of the rank* $\leqslant n$ [21]. By

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

we denote a partial one-to-one transformation which maps x_1 onto y_1, x_2 onto y_2, $\ldots$, and x_n onto y_n. Obviously, in such case we have $x_i \neq x_j$ and $y_i \neq y_j$ for $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$. The empty partial map $\varnothing \colon \lambda \rightharpoonup \lambda$ is denoted by $\mathbf{0}$. It is obvious that $\mathbf{0}$ is zero of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Let λ be a nonzero cardinal. On the set $B_\lambda = (\lambda \times \lambda) \cup \{0\}$, where $0 \notin \lambda \times \lambda$, we define the semigroup operation "$\,\cdot\,$" as follows

$$(a, b) \cdot (c, d) = \begin{cases} (a, d), & \text{if } b = c; \\ 0, & \text{if } b \neq c, \end{cases}$$

and $(a, b) \cdot 0 = 0 \cdot (a, b) = 0 \cdot 0 = 0$ for $a, b, c, d \in \lambda$. The semigroup B_λ is called the *semigroup of* $\lambda \times \lambda$*-matrix units* (see [6]). Obviously, for any cardinal $\lambda > 0$, the semigroup of $\lambda \times \lambda$-matrix units B_λ is isomorphic to $\mathscr{I}_\lambda^1$.

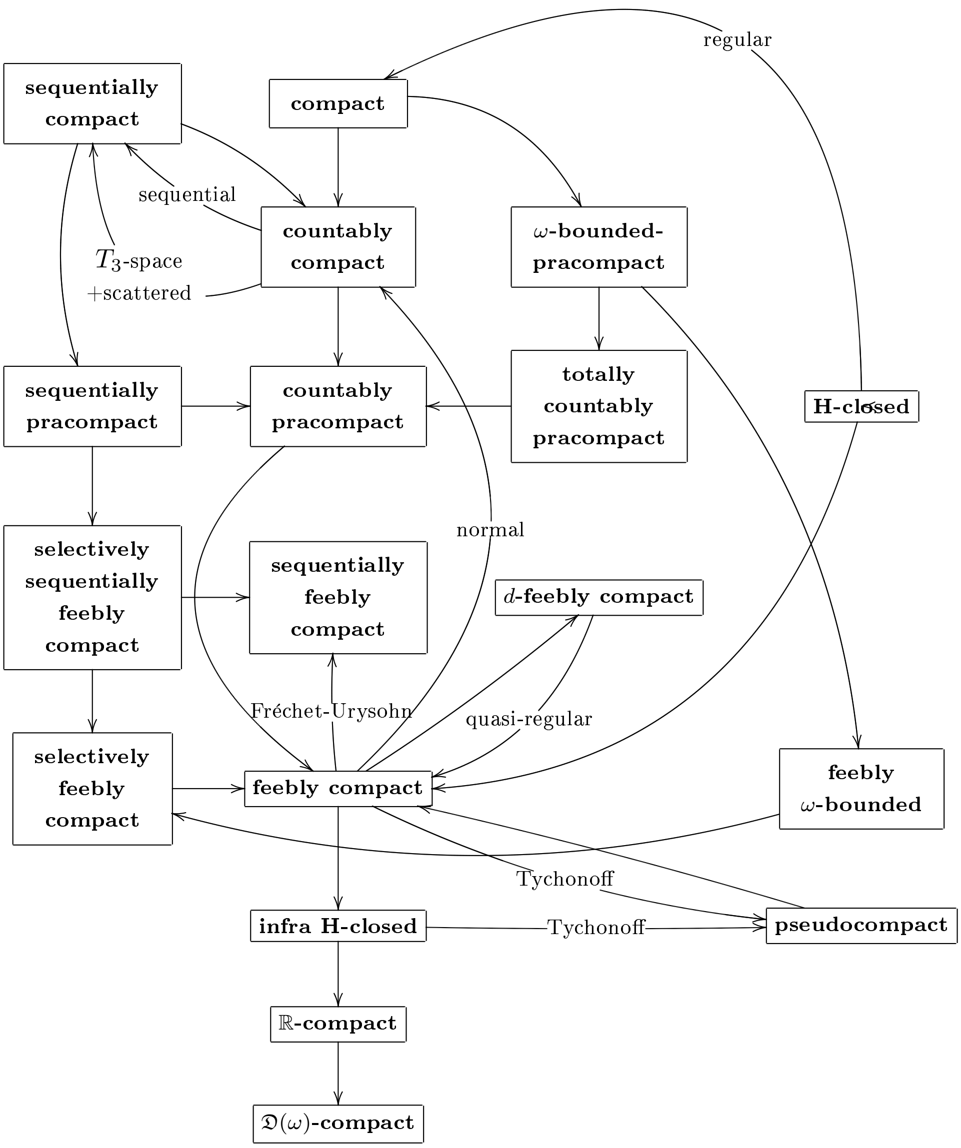
A subset A of a topological space X is called *regular open* if $\operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(A)) = A$.

We recall that a topological space X is said to be

- *semiregular* if X has a base consisting of regular open subsets;
- *compact* if each open cover of X has a finite subcover;
- *sequentially compact* if each sequence $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of X has a convergent subsequence in X;

- *countably compact* if each open countable cover of X has a finite subcover;
- *H-closed* if X is a closed subspace of every Hausdorff topological space in which it is contained;
- *ω-bounded-pracompact* if X contains a dense subset D such that each countable subset of D has the compact closure in X [20];
- *infra H-closed* provided that any continuous image of X into any first countable Hausdorff space is closed (see [27]);
- *totally countably pracompact* if there exists a dense subset D of the space X such that each sequence of points of the set D has a subsequence with the compact closure in X [20];
- *sequentially pracompact* if there exists a dense subset D of the space X such that each sequence of points of the set D has a convergent subsequence [20];
- *countably compact at a subset* $A \subseteq X$ if every infinite subset $B \subseteq A$ has an accumulation point x in X [1];
- *countably pracompact* if there exists a dense subset A in X such that X is countably compact at A [1];
- *feebly ω-bounded* if for each sequence $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of nonempty open subsets of X there is a compact subset K of X such that $K \cap U_n \neq \varnothing$ for each n [20];
- *selectively sequentially feebly compact* if for every family $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ of nonempty open subsets of X, one can choose a point $x_n \in U_n$ for every $n \in \mathbb{N}$ in such a way that the sequence $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ has a convergent subsequence ([8]);
- *sequentially feebly compact* if for every family $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ of nonempty open subsets of X, there exists an infinite set $J \subseteq \mathbb{N}$ and a point $x \in X$ such that the set $\{n \in J : W \cap U_n = \varnothing\}$ is finite for every open neighborhood W of x (see [9]);
- *selectively feebly compact* for each sequence $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ of nonempty open subsets of X, one can choose a point $x \in X$ and a point $x_n \in U_n$ for each $n \in \mathbb{N}$ such that the set $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in W\}$ is infinite for every open neighborhood W of x ([8]);
- *feebly compact* (or *lightly compact*) if each locally finite open cover of X is finite [3];
- *d-feebly compact* (or *DFCC*) if every discrete family of open subsets in X is finite (see [31]);
- *pseudocompact* if X is Tychonoff and each continuous real-valued function on X is bounded;
- *Y-compact* for some topological space Y, if $f(X)$ is compact, for any continuous map $f : X \to Y$.

According to Theorem 3.10.22 of [10], a Tychonoff topological space X is feebly compact if and only if X is pseudocompact. Also, a Hausdorff topological space X is feebly compact if and only if every locally finite family of nonempty open subsets of X is finite. Every compact space and every sequentially compact space are countably compact, every countably compact space is countably pracompact, every countably pracompact space is feebly compact (see [1]), every H-closed space is feebly compact too (see [19]). Also, every space feebly compact is infra H-closed by Proposition 2 and Theorem 3 of [27]. Using results of other authors we get that the following diagram which describes relations between the above defined classes of topological spaces.



A *topological* (*semitopological*) *semigroup* is a topological space together with a continuous (separately continuous) semigroup operation. If S is a semigroup and τ is a topology on S such that (S,τ) is a semitopological semigroup, then we shall call τ a *shift-continuous topology* on S. An inverse topological semigroup with the continuous inversion is called a *topological inverse semigroup*.

Topological properties of an infinite (semi)topological semigroup $\lambda\times\lambda$-matrix units were studied in [15, 17]. In [15] it was shown that on the infinite semitopological semigroup of $\lambda\times\lambda$-matrix units B_λ there exists a unique compact shift-continuous Hausdorff topology τ_c and also it is shown that every pseudocompact Hausdorff shift-continuous topology τ on B_λ is compact. Also, in [15] it is proved that every nonzero element of a Hausdorff semitopological semigroup of $\lambda\times\lambda$-matrix units B_λ is an isolated point in the topological space B_λ. In [15] it is shown that the infinite semigroup of $\lambda\times\lambda$-matrix units B_λ cannot be embedded into a compact Hausdorff topological semigroup, every Hausdorff topological inverse semigroup S that contains B_λ as a subsemigroup, contains B_λ as a closed subsemigroup, i.e., B_λ is *algebraically complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. This result in [14] is extended onto the called inverse semigroups with *tight ideal series* and, as a corollary, onto the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Also, in [21] it was proved that for every positive integer n the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ is *algebraically h-complete* in the class of Hausdorff topological inverse semigroups, i.e., every homomorphic image of $\mathscr{I}_\lambda^n$ is algebraically complete in the class of Hausdorff topological inverse semigroups. In the paper [22] this result is extended onto the class of Hausdorff semitopological inverse semigroups and it is shown therein that for an infinite cardinal λ the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ admits a unique Hausdorff topology τ_c such that $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau_c)$ is a compact semitopological semigroup. Also, it was proved in [22] that every countably compact Hausdorff shift-continuous topology τ on B_λ is compact. In [17] it was shown that a topological semigroup of finite partial bijections $\mathscr{I}_\lambda^n$ with a compact subsemigroup of idempotents is absolutely H-closed (i.e., every homomorphic image of $\mathscr{I}_\lambda^n$ is algebraically complete in the class of Hausdorff topological semigroups) and any Hausdorff countably compact topological semigroup does not contain $\mathscr{I}_\lambda^n$ as a subsemigroup for an arbitrary infinite cardinal λ and any positive integer n. In [17] there were given sufficient conditions onto a topological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^1$ to be non-H-closed. Also in [11] it is proved that an infinite semitopological semigroup of $\lambda\times\lambda$-matrix units B_λ is H-closed in the class of semitopological semigroups if and only if the space B_λ is compact. In the paper [12] we studied feebly compact shift-continuous T_1-topologies on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. For any positive integer $n\geqslant 2$ and any infinite cardinal λ a Hausdorff countably pracompact non-compact shift-continuous topology on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is constructed there. In [12] it is shown that for an arbitrary positive integer n and an arbitrary infinite cardinal λ for a shift–continuous T_1-topology τ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ the following conditions are equivalent: (i) τ is countably pracompact; (ii) τ is feebly compact; (iii) τ is d-feebly compact; (iv) $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is H-closed; (v) $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is $\mathfrak{D}(\omega)$-compact; (vi) $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is $\mathbb{R}$-compact; (vii) $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ is infra H-closed. Also in [12] we proved that for an arbitrary positive integer n and an arbitrary infinite cardinal λ every shift-continuous semiregular feebly compact T_1-topology τ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is compact. Similar results were obtained for a semitopological semilattice $(\exp_n\lambda,\cap)$ in [23, 24, 25]. Also, in [26, 30] it is proved that feeble compactness implies compactness for semitopological bicyclic extensions.

In this paper we study feebly compact shift-continuous T_1-topologies on the symmetric inverse semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ of finite transformations of the rank $\leqslant n$. It is proved that such T_1-topology is sequentially pracompact if and only if it is feebly compact. Also, we show that every shift-continuous feebly ω-bounded T_1-topology on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is compact. The results of this paper are announced in [13].

2. On feebly compact shift continuous topologies on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$

Later we shall assume that n is an arbitrary positive integer.

For every element α of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ we put

$$\uparrow_l\alpha = \left\{\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n \colon \alpha\alpha^{-1}\beta = \alpha\right\} \qquad \text{and} \qquad \uparrow_r\alpha = \left\{\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n \colon \beta\alpha^{-1}\alpha = \alpha\right\}.$$

Then Proposition 5 of [22] implies that $\uparrow_l\alpha = \uparrow_r\alpha$ and by Lemma 6 of [29, Section 1.4] we have that $\alpha \preccurlyeq \beta$ if and only if $\beta \in \uparrow_l\alpha$ for $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$. Hence we put $\uparrow_\preccurlyeq\alpha = \uparrow_l\alpha = \uparrow_r\alpha$ for any $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$.

Remark 1. Later we identify every element α of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ with the graph $\mathsf{graph}(\alpha)$ of the partial map $\alpha \colon \lambda \rightharpoonup \lambda$ (see [29]). Then according to this identification we have that $\alpha \preccurlyeq \beta$ if and only if $\alpha \subseteq \beta$.

Lemma 1. *Let n be an arbitrary positive integer and λ be any infinite cardinal. Let α be any nonzero element of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ with* $\operatorname{rank}\alpha = m \leqslant n$. *Then the poset $(\uparrow_\preccurlyeq\alpha, \preccurlyeq)$ is order isomorphic to the poset $(\mathscr{I}_\lambda^{n-m}, \preccurlyeq)$.*

Proof. Suppose that

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix}$$

for some $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in \lambda$. If $m = n$ then the inequality $\alpha \preccurlyeq \beta$ in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \preccurlyeq)$ implies $\alpha = \beta$, and hence later we assume that $m < n$. Then for any $\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ such that $\alpha \preccurlyeq \beta$ by Remark 1 we have that

$$\beta = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_m & y_{m+1} & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

for some $x_{m+1}, \ldots, x_n, y_{m+1}, \ldots, y_n \in \lambda$. Since λ is infinite,

$$|\lambda| = |\lambda \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}| = |\lambda \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}|,$$

and hence there exist bijective maps $\mathfrak{u} \colon \lambda \setminus \{x_1, \ldots, x_m\} \to \lambda$ and $\mathfrak{v} \colon \lambda \setminus \{y_1, \ldots, y_m\} \to \lambda$. Simple verifications show that the map $\mathfrak{I} \colon (\uparrow_\preccurlyeq\alpha, \preccurlyeq) \to (\mathscr{I}_\lambda^{n-m}, \preccurlyeq)$ defined in the following way $\alpha \mapsto \mathbf{0}$ and

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_m & y_{m+1} & \cdots & y_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_{m+1})\mathfrak{u} & \cdots & (x_n)\mathfrak{u} \\ (y_{m+1})\mathfrak{v} & \cdots & (y_n)\mathfrak{v} \end{pmatrix}$$

is an order isomorphism. □

Later we need the following technical lemma from [12].

Lemma 2 ([12, Lemma 3])**.** *Let n be an arbitrary positive integer and λ be an arbitrary infinite cardinal. Let τ be a feebly compact shift-continuous T_1-topology on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Then for every $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n$ and any open neighbourhood $U(\alpha)$ of α in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ there exist finitely many $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \uparrow_\preccurlyeq\alpha \setminus \{\alpha\}$ such that*

$$\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1} \cap \uparrow_\preccurlyeq\alpha \subseteq U(\alpha) \cup \uparrow_\preccurlyeq\alpha_1 \cup \cdots \cup \uparrow_\preccurlyeq\alpha_k.$$

Lemma 3. *Let τ be a feebly compact topology on $\mathscr{I}_\lambda^1$ such that $\uparrow_\preccurlyeq\alpha$ is closed-and-open for any $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^1$. Then τ is compact.*

The statement of Lemma 3 follows from the fact that all nonzero elements of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^1$ are closed-and-open in $(\mathscr{I}_\lambda^1, \tau)$.

A family of non-empty sets $\{A_i \colon i \in \mathscr{I}\}$ is called a Δ-*system* (a *sunflower* or a Δ-*family*) if the pairwise intersections of its members are the same, i.e., $A_i \cap A_j = S$ for some set S (for $i \neq j$ in $\mathscr{I}$) [28]. The following statement is well known as the *Sunflower Lemma* or the *Lemma about a* Δ-*system* (see [28, p. 107]).

Lemma 4. *Every infinite family of n-element sets $(n < \omega)$ contains an infinite Δ-subfamily.*

Proposition 1. *Let n be an arbitrary positive integer and λ be an arbitrary infinite cardinal. Then every feebly compact shift-continuous T_1-topology τ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is sequentially pracompact.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists a feebly compact shift-continuous T_1-topology τ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ which is not sequentially countably pracompact. Then every dense subset D of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ contains a sequence of points from D which has no a convergent subsequence.

By Proposition 2 of [12] the subset $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is dense in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and by Lemma 2 from [12] every point of the set $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is isolated in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Then the set $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ contains an infinite sequence of points $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ which has no a convergent subsequence. If we identify elements of the semigroups with their graphs then by Lemma 4 the sequence $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ contains an infinite Δ-subfamily, that is an infinite subsequence $\{\chi_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}$ such that there exists $\chi \in \mathscr{I}_\lambda^n$ such that $\chi_{p_i} \cap \chi_{p_j} = \chi$ for any distinct $i, j \in \mathbb{N}$.

Suppose that $\chi = \mathbf{0}$ is the zero of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. Since the sequence $\{\chi_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}$ is an infinite Δ-subfamily, the intersection $\{\chi_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\} \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\gamma$ contains at most one set for every non-zero element $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n$. Thus $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ contains an infinite locally finite family of open non-empty subsets which contradicts the feeble compactness of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$.

If χ is a non-zero element of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ then by Lemma 2 from [12], ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\chi$ is an open-and-closed subspace of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$, and hence by Theorem 14 from [3] the space ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\chi$ is feebly compact. We observe that the element χ is the minimum of the poset ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\chi$. Since the sequence $\{\chi_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\}$ is an infinite Δ-subfamily, the intersection $\{\chi_{p_i} \colon i \in \mathbb{N}\} \cap {\uparrow_{\preccurlyeq}}\gamma$ contains at most one set for every element $\gamma \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\chi \setminus \{\chi\}$. Thus the subspace ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\chi$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ contains an infinite locally finite family of open non-empty subsets which contradicts the feeble compactness of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. $\square$

Proposition 2. *Let n be an arbitrary positive integer and λ be an arbitrary infinite cardinal. Then every feebly compact shift-continuous T_1-topology τ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ is totally countably pracompact.*

Proof. By Proposition 2 of [12] the subset $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is dense in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and by Lemma 2 from [12] every point of the set $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is isolated in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. We put $D = \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$. Fix an arbitrary sequence $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ of points of D.

It is obvious that at least one of the following conditions holds:

(1) for any $\eta \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\eta \cap \{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ is finite;

(2) there exists $\eta \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that the set ${\uparrow_{\preccurlyeq}}\eta \cap \{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ is infinite.

Suppose that case **(1)** holds. By Lemma 2 of [12] for every point $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \{0\}$ there exists an open neighbourhood $U(\alpha)$ of α in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ such that $U(\alpha) \subseteq {\uparrow_\preccurlyeq}\alpha$ and hence our assumption implies that zero $\mathbf{0}$ is a unique accumulation point of the sequence $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$. By Lemma 2 for an arbitrary open neighbourhood $W(\mathbf{0})$ of zero $\mathbf{0}$ in $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ there exist finitely many nonzero elements $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \mathscr{I}_\lambda^n$ such that

$$\left(\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}\right) \subseteq W(\mathbf{0}) \cup {\uparrow_\preccurlyeq}\eta_1 \cup \cdots \cup {\uparrow_\preccurlyeq}\eta_k,$$

and hence we get that $\{\mathbf{0}\} \cup \{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ is a compact subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$.

Suppose that case **(2)** holds: there exists $\eta^1 \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that the set ${\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1 \cap \{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ is infinite. Then by Lemma 2 of [12], ${\uparrow_\preccurlyeq}y^1$ is an open-and-closed subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ and hence by Theorem 14 from [3] the subspace ${\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is feebly compact. By Lemma 1 the poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1, \preccurlyeq)$ is order isomorphic to the poset $(\mathscr{I}_\lambda^{m_1}, \preccurlyeq)$ for some positive integer $m_1 = 2, \ldots, n-1$.

Let $\{\chi_p^1 \colon p \in \mathbb{N}\}$ be a subsequence of $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ such that

$$\left\{\chi_p^1 \colon p \in \mathbb{N}\right\} = {\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1 \cap \{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}.$$

Then for the feebly compact poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1, \preccurlyeq)$ and the sequence $\{\chi_p^1 \colon p \in \mathbb{N}\}$ at least one of the following conditions holds:

(1)$_*$ for any $\eta \in {\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1 \setminus \{\eta^1\}$ the set ${\uparrow_\preccurlyeq}\eta \cap \{\chi_p^1 \colon p \in \mathbb{N}\}$ is finite;

(2)$_*$ there exists $\eta \in {\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1 \setminus \{\eta^1\}$ such that the set ${\uparrow_\preccurlyeq}\eta \cap \{\chi_p^1 \colon p \in \mathbb{N}\}$ is infinite.

Since every chain in the poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1, \preccurlyeq)$ is finite, repeating finitely many times our above procedure we obtain two chains of the length $s \leqslant n$:

(i) the chain $\mathbf{0} \preccurlyeq \eta^1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \eta^s$ of distinct elements of the poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1, \preccurlyeq)$; and

(ii) the chain

$$\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\} \supseteq \left\{\chi_p^1 \colon p \in \mathbb{N}\right\} \supseteq \cdots \supseteq \left\{\chi_p^s \colon p \in \mathbb{N}\right\}$$

of infinite subsequences of the sequence $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$,

such that the following conditions hold:

(a) $\{\chi_p^j \colon p \in \mathbb{N}\} \subseteq {\uparrow_\preccurlyeq}\eta^j$ for every $j = 1, \ldots, s$;

(b) either $\{\chi_p^s \colon p \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta^s\}$ is a compact subset of the poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^1, \preccurlyeq)$ or the poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^s, \preccurlyeq)$ is order isomorphic to the poset $(\mathscr{I}_\lambda^1, \preccurlyeq)$.

If $\{\chi_p^s \colon p \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta^s\}$ is a compact subset of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ then our above part of the proof implies that the sequence $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ has the subsequence $\{\chi_p^s \colon p \in \mathbb{N}\}$ with the compact closure.

If the poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^s, \preccurlyeq)$ is order isomorphic to the poset $(\mathscr{I}_\lambda^1, \preccurlyeq)$, then by Lemma 2 of [12] the subspace ${\uparrow_\preccurlyeq}\eta^s$ of $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is open-and-closed and hence by Lemmas 1 and 3 the poset $({\uparrow_\preccurlyeq}\eta^s, \preccurlyeq)$ is compact. Then the inclusion $\{\chi_p^s \colon p \in \mathbb{N}\} \subseteq {\uparrow_\preccurlyeq}\eta^s$ implies that the sequence $\{\chi_p \colon p \in \mathbb{N}\}$ has the subsequence $\{\chi_p^s \colon p \in \mathbb{N}\}$ with the compact closure. This completes the proof of the proposition. □

We summarise our results in the following theorem.

Theorem 1. *Let n be any positive integer and λ be any infinite cardinal. Then for any T_1-semitopological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ the following conditions are equivalent:*

(i) *$\mathscr{I}_\lambda^n$ is sequentially pracompact;*

(*ii*) $\mathscr{I}_\lambda^n$ *is totally countably pracompact;*
(*iii*) $\mathscr{I}_\lambda^n$ *is feebly compact.*

Proof. Implications $(i) \Rightarrow (iii)$ and $(ii) \Rightarrow (iii)$ are trivial. The corresponding their converse implications $(iii) \Rightarrow (i)$ and $(iii) \Rightarrow (ii)$ follow from Propositions 1 and 2, respectively. □

It is well known that the (Tychonoff) product of pseudocompact spaces is not necessarily pseudocompact (see [10, Section 3.10]). On the other hand Comfort and Ross in [7] proved that the Tychonoff product of an arbitrary family of pseudocompact topological groups is a pseudocompact topological group. The Comfort–Ross Theorem is generalized in [2] and it is proved that a Tychonoff product of an arbitrary non-empty family of feebly compact paratopological groups is feebly compact. Also, a counterpart of the Comfort–Ross Theorem for pseudocompact primitive topological inverse semigroups and primitive inverse semiregular feebly compact semitopological semigroups with closed maximal subgroups was proved in [16] and [18], respectively.

Since the Tychonoff product of H-closed spaces is H-closed (see [5, Theorem 3] or [10, 3.12.5 (d)]) Theorem 1 implies a counterpart of the Comfort–Ross Theorem for feebly compact semitopological semigroups $\mathscr{I}_\lambda^n$:

Corollary 1. *Let* $\left\{\mathscr{I}_{\lambda_i}^{n_i} : i \in \mathscr{J}\right\}$ *be a family of non-empty feebly compact* T_1*-semitopological semigroups and* $n_i \in \mathbb{N}$ *for all* $i \in \mathscr{I}$*. Then the Tychonoff product* $\prod\left\{\mathscr{I}_{\lambda_i}^{n_i} : i \in \mathscr{I}\right\}$ *is feebly compact.*

Definition 1. If $\{X_i : i \in \mathscr{I}\}$ is an uncountable family of sets, $X = \prod\{X_i : i \in \mathscr{J}\}$ is their Cartesian product and p is a point in X, then the subset

$$\Sigma(p, X) = \{x \in X : \ |\{i \in \mathscr{J} : x(i) \neq p(i)\}| \leqslant \omega\}$$

of X is called the Σ-*product* of $\{X_i : i \in \mathscr{J}\}$ with the basis point $p \in X$. In the case when $\{X_i : i \in \mathscr{J}\}$ is a family of topological spaces we assume that $\Sigma(p, X)$ is a subspace of the Tychonoff product $X = \prod\{X_i : i \in \mathscr{J}\}$.

It is obvious that if $\{X_i : i \in \mathscr{J}\}$ is a family of semigroups then $X = \prod\{X_i : i \in \mathscr{J}\}$ is a semigroup as well. Moreover $\Sigma(p, X)$ is a subsemigroup of X for arbitrary idempotent $p \in X$. Theorem 1 and Proposition 2.2 of [20] imply the following corollary.

Corollary 2. *Let* $\left\{\mathscr{I}_{\lambda_i}^{n_i} : i \in \mathscr{J}\right\}$ *be a family of non-empty feebly compact* T_1*-semitopological semigroups and* $n_i \in \mathbb{N}$ *for all* $i \in \mathscr{J}$*. Then for every idempotent* p *of the product* $X = \prod\left\{\mathscr{I}_{\lambda_i}^{n_i} : i \in \mathscr{J}\right\}$ *the* Σ*-product* $\Sigma(p, X)$ *is feebly compact.*

3. On compact shift continuous topologies on the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$

The following example implies that there exists a countable feebly compact Hausdorff semitopological semigroup $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \right)$ which is not ω-bounded-pracompact.

Example 1. The following family

$$\mathscr{B}_{\mathsf{c}} = \big\{U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus ({\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_1 \cup \cdots \cup {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha_k) \colon \\ \alpha_i \in {\uparrow_{\preccurlyeq}}\alpha \setminus \{\alpha\}, \alpha, \alpha_i \in \mathscr{I}_\omega^2, i = 1, \ldots, k\big\}$$

determines a base of the topology τ_{c} on $\mathscr{I}_\omega^2$. By Proposition 10 from [22], $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{c}}\right)$ is a Hausdorff compact semitopological semigroup with continuous inversion.

We construct a stronger topology τ_{fc}^2 on $\mathscr{I}_\lambda^2$ in the following way. For every nonzero element $x \in \mathscr{I}_\lambda^2$ we assume that the base $\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(x)$ of the topology τ_{fc}^2 at the point x coincides with the base of the topology τ_{c}^2 at x, and

$$\mathscr{B}_{\mathsf{fc}}^2(0) = \left\{U_B(\mathbf{0}) = U(\mathbf{0}) \setminus \left(\mathscr{I}_\lambda^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\right\} : U(0) \in \mathscr{B}_{\mathsf{c}}^2(0)\right\}$$

form a base of the topology τ_{fc}^2 at zero $\mathbf{0}$ of the semigroup $\mathscr{I}_\lambda^2$. Since $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is a variant of the semitopological semigroup defined in Example 3 of [12], τ_{fc}^2 is a Hausdorff topology on $\mathscr{I}_\lambda^2$. Moreover, by Proposition 1 of [12], $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is a countably pracompact semitopological semigroup with continuous inversion.

Proposition 3. *The space $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is not ω-bounded-pracompact.*

Proof. Since the space $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is feebly compact and Hausdorff, by Proposition 2 of [12] the subset $\mathscr{I}_\lambda^2 \setminus \mathscr{I}_\lambda^1$ is dense in $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$, and by Lemma 2 from [12] every point of the set $\mathscr{I}_\lambda^2 \setminus \mathscr{I}_\lambda^1$ is isolated in $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$. This implies that every dense subset D of $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ contains the set $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$. Then

$$\mathrm{cl}_{\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)}(D) = \mathrm{cl}_{\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)}(\mathscr{I}_\lambda^2 \setminus \mathscr{I}_\lambda^1) = \mathscr{I}_\omega^2$$

for every dense subset D of $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$. Since $\mathscr{I}_\omega^2$ is countable, so is D, and hence the space $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is not ω-bounded-pracompact, because $\left(\mathscr{I}_\omega^2, \tau_{\mathsf{fc}}^2\right)$ is not compact. □

Proposition 4. *Let n be any positive integer and λ be any infinite cardinal. If $\mathscr{I}_\lambda^n$ is a T_1-semitopological semigroup then the following statements hold:*

(1) *$\mathscr{I}_A^n$ is a closed subsemigroup of $\mathscr{I}_\lambda^n$ for any subset $A \subseteq \lambda$;*
(2) *the band $E(\mathscr{I}_\lambda^n)$ is a closed subset of $\mathscr{I}_\lambda^n$.*

Proof. (1) Fix an arbitrary $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_A^n$. Then $\operatorname{dom}\gamma \nsubseteq A$ or $\operatorname{ran}\gamma \nsubseteq A$. Since $\eta \preccurlyeq \delta$ if and only if $\mathsf{graph}(\eta) \subseteq \mathsf{graph}(\delta)$ for $\eta, \delta \in \mathscr{I}_\lambda^n$, the above arguments imply that $\uparrow_{\preccurlyeq}\gamma \cap \mathscr{I}_A^n = \varnothing$. By Lemma 2 of [12] the set $\uparrow_{\preccurlyeq}\gamma$ is open in $\mathscr{I}_\lambda^n$, which implies statement (1).

(2) Fix an arbitrary $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n \setminus E(\mathscr{I}_\lambda^n)$. Since $\mathscr{I}_\lambda^n$ is an inverse subsemigroup of the symmetric inverse monoid $\mathscr{I}_\lambda$, all idempotents of $\mathscr{I}_\lambda^n$ is are partial identity maps of rank $\leqslant n$. Then similar arguments as in statement (1) imply that $E(\mathscr{I}_\lambda^n)$ is a closed subset of $\mathscr{I}_\lambda^n$. □

Proposition 4 implies the following corollary.

Corollary 3. *Let n be any positive integer, λ be any infinite cardinal and A be an arbitrary infinite subset of λ. If $\mathscr{I}_\lambda^n$ is a compact T_1-semitopological semigroup then $\mathscr{I}_A^n$ with the induced topology from $\mathscr{I}_\lambda^n$ is a compact semitopological semigroup.*

Lemma 5. *Let n be any positive integer, λ be any infinite cardinal and A be an arbitrary infinite countable subset of λ. If $\mathscr{I}_\lambda^n$ is an ω-bounded-pracompact T_1-semitopological semigroup then $\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1}$ is a dense subset of $\mathscr{I}_A^n$, and hence $\mathscr{I}_A^n$ is compact.*

Proof. For any $\alpha \in \mathscr{I}_A^n$ we denote $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha = \uparrow_{\preccurlyeq} \alpha \cap \mathscr{I}_A^n$.

By induction we shall show that the set $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1})$ is dense in $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha$ for any $\alpha \in \mathscr{I}_A^n$. In the case when $\operatorname{rank} \alpha = n-1$ by Lemmas 1 and 3 we have that the set $\uparrow_{\preccurlyeq} \alpha$ is compact, and hence by Proposition 4(1), $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha$ is compact as well. Since all points of $\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1}$ are isolated in $\mathscr{I}_\lambda^n$, the set $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1})$ is dense in $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha$.

Next we show that the statement $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1})$ *is dense in* $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \alpha$ *for any* $\alpha \in \mathscr{I}_A^n$ *with* $\operatorname{rank} \alpha = n-k$, *for all* $k < m$ implies that the same is true for any $\beta \in \mathscr{I}_A^n$ with $\operatorname{rank} \beta = n-m$, where $m \leqslant n$. Fix an arbitrary $\beta \in \mathscr{I}_A^n$ with $\operatorname{rank} \beta = n-m$. Suppose to the contrary that the set $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1})$ is not dense in $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta$. The assumption of induction implies that $\gamma \in \operatorname{cl}_{\mathscr{I}_A^n}(\uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1}))$ for any $\gamma \in \uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \setminus \{\beta\}$, and hence $\beta \notin \operatorname{cl}_{\mathscr{I}_A^n}(\uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1}))$. Then there exists an open neighbourhood $U(\beta)$ of β in $\mathscr{I}_A^n$ such that $U(\beta) \cap (\uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1})) = \varnothing$. By Lemma 2 from [12] for any $\delta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ the set $\uparrow_{\preccurlyeq} \delta$ is open-and-closed in $\mathscr{I}_\lambda^n, \tau$, and hence $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \delta$ is open-and-closed in $\mathscr{I}_A^n$ as well. Hence we get that

$$\operatorname{cl}_{\mathscr{I}_A^n}(\uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \cap (\mathscr{I}_A^n \setminus \mathscr{I}_A^{n-1})) = \uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \setminus \{\beta\}$$

but the family $\mathscr{U} = \left\{\uparrow_{\preccurlyeq}^A \delta \colon \delta \in \uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta \setminus \{\beta\}\right\}$ is an open cover of $\uparrow_{\preccurlyeq}^A \beta$ which has no a finite subcover. This contradicts the condition that $\mathscr{I}_\lambda^n$ is a ω-bounded-pracompact space, which completes the proof of the first statement of the lemma. The last statement immediately follows from the first statement and the definition of the ω-bounded-pracompact space. □

Theorem 2 describes feebly ω-bounded shift-continuous T_1-topologies on the semigroup $\mathscr{I}_\omega^n$.

Theorem 2. *Let n be any positive integer and λ be any infinite cardinal. Then for any T_1-semitopological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$ the following conditions are equivalent:*

- (i) *$\mathscr{I}_\lambda^n$ compact;*
- (ii) *$\mathscr{I}_\lambda^n$ is ω-bounded-pracompact;*
- (iii) *$\mathscr{I}_\lambda^n$ is feebly ω-bounded.*

Proof. Implications $(i) \Rightarrow (iii)$ and $(ii) \Rightarrow (iii)$ are trivial.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Let $\mathscr{I}_\lambda^n$ be a feebly ω-bounded T_1-semitopological semigroup. By Proposition 2 of [12] the set $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ is dense in $\mathscr{I}_\lambda^n$. Fix an arbitrary infinite countable subset $D = \{\alpha_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ in $\mathscr{I}_\lambda^n \setminus \mathscr{I}_\lambda^{n-1}$. By Lemma 2 from [12] every point of D is isolated in $\mathscr{I}_\omega^n$, and hence by feeble ω-boundedness of $\mathscr{I}_\lambda^n$ we get that there exists a compact subset $K \subseteq \mathscr{I}_\lambda^n$ such that $D \subseteq K$. Since the closure of a subset in compact space is compact, so is the closure of D. Hence the space $\mathscr{I}_\lambda^n$ is ω-bounded-pracompact.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suppose the contrary: there exists a noncompact ω-bounded-pracompact T_1-semitopological semigroup $\mathscr{I}_\lambda^n$. By Theorem 1 of [12] the space $\mathscr{I}_\lambda^n$ is not countably compact. Then by Theorem 3.10.3 of [10] the space $\mathscr{I}_\lambda^n$ has an infinite countable closed discrete subspace D. We put

$$A = \{x \in \lambda \colon x \in \operatorname{dom} \alpha \cup \operatorname{ran} \alpha \text{ for some } \alpha \in D\}.$$

Since the set D is countable, $\bigcup\limits_{\alpha\in D}(\operatorname{dom}\alpha\cup\operatorname{ran}\alpha)$ is countable, and hence A is countable, too. Then $\mathscr{I}_A^n$ contains D. By Proposition 4(1), $\mathscr{I}_A^n$ is a closed subspace of $\mathscr{I}_\lambda^n$, which implies that D is an infinite countable closed discrete subspace of $\mathscr{I}_A^n$. This contradicts Lemma 5, and hence $\mathscr{I}_\lambda^n$ is compact. □

Acknowledgements

The author acknowledges the referee for his important comments.

References

1. A. V. Arkhangel'skii, *Topological function spaces*, Kluwer Publ., Dordrecht, 1992.
2. T. Banakh and A. Ravsky, *On feebly compact paratopological groups*, Topology Appl. **284** (2020), Art. ID 107363. DOI: 10.1016/j.topol.2020.107363
3. R. W. Bagley, E. H. Connell, and J. D. McKnight, Jr., *On properties characterizing pseudo-compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), no. 3, 500–506. DOI: 10.1090/S0002-9939-1958-0097043-2
4. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. **I**, Marcell Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
5. C. Chevalley and O. Frink, Jr., *Bicompactness of cartesian products*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 612–614. DOI: 10.1090/S0002-9904-1941-07522-1
6. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vols. **I**, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961 and 1967.
7. W. W. Comfort and K. A. Ross, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacif. J. Math. **16** (1966), no. 3, 483–496. DOI: 10.2140/pjm.1966.16.483
8. A. Dorantes-Aldama and D. Shakhmatov, *Selective sequential pseudocompactness*, Topology Appl. **222** (2017), 53–69. DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.016
9. A. Dow, J. R. Porter, R. M. Stephenson, and R. G. Woods, *Spaces whose pseudocompact subspaces are closed subsets*, Appl. Gen. Topol. **5** (2004), no. 2, 243–264. DOI: 10.4995/agt.2004.1973
10. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
11. O. Gutik, *On closures in semitopological inverse semigroups with continuous inversion*, Algebra Discrete Math. **18** (2014), no. 1, 59–85.
12. O. Gutik, *On feebly compact semitopological symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **83** (2017), 42–57.
13. O. Gutik, *Feebly compact semitopological symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank*, Conference "Dynamical methods in Algebra, Geometry and Topology", 4–6 July, 2018. Udine, Italy. P. 4.
14. O. Gutik, J. Lawson, and D. Repovš, *Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups*, Semigroup Forum **78** (2009), no. 2, 326–336. DOI: 10.1007/s00233-008-9112-2
15. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Topological semigroups of matrix units*, Algebra Discrete Math. (2005), no. 3, 1–17.
16. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Pseudocompact primitive topological inverse semigroups*, Mat. Metody Phis.-Mech. Polya. **56**:2 (2013), 7–19; **reprinted version:** J. Math. Sc. **203** (2014), no. 1, 1–15. DOI: 10.1007/s10958-014-2087-5
17. O. Gutik, K. Pavlyk, and A. Reiter, Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions, Mat. Stud. **32** (2009), no. 2, 115–131.
18. O. Gutik and O. Ravsky, *On feebly compact inverse primitive (semi)topological semigroups*, Mat. Stud. **44** (2015), no. 1, 3–26.

19. O. V. Gutik and O. V. Ravsky, *Pseudocompactness, products and topological Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids*, Math. Methods and Phys.-Mech. Fields **58** (2015), no. 2, 20–37; **reprinted version:** J. Math. Sc. **223** (2017), no. 1, 18–38. DOI: 10.1007/s10958-017-3335-2
20. O. Gutik and A. Ravsky, *On old and new classes of feebly compact spaces*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **85** (2018), 48–59.
21. O. V. Gutik and A. R. Reiter, *Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$*, Math. Methods and Phys.-Mech. Fields **52** (2009), no. 3, 7–14; **reprinted version:** J. Math. Sc. **171** (2010), no. 4, 425–432. DOI: 10.1007/s10958-010-0147-z
22. O. Gutik and A. Reiter, *On semitopological symmetric inverse semigroups of a bounded finite rank*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. **72** (2010), 94–106 (in Ukrainian).
23. O. Gutik and O. Sobol, *On feebly compact shift-continuous topologies on the semilattice* $\exp_n\lambda$, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **82** (2016), 128–136.
24. O. Gutik and O. Sobol, *On feebly compact topologies on the semilattice* $\exp_n\lambda$, Mat. Stud. **46** (2016), no. 1, 29–43.
25. O. V. Gutik and O. Yu. Sobol, *On feebly compact semitopological semilattice* $\exp_n\lambda$, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **61** (2018), no. 3, 16–23; **reprinted version:** J. Math. Sc. **254** (2021), no. 1, 13–20. DOI: 10.1007/s10958-021-05284-8
26. O. Gutik and O. Sobol, *On the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ which is generated by the family $\mathscr{F}$ of atomic subsets of ω*, arXiv: 2108.11354, 2021, preprint.
27. D. W. Hajek and A. R. Todd, *Compact spaces and infra H-closed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), no. 2, 479–482. DOI: 10.2307/2040287
28. P. Komjáth and V. Totik, *Problems and theorems in classical set theory*, Probl Books in Math, Springer, 2006.
29. M. V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
30. O. Lysetska, *On feebly compact topologies on the semigroup* $\mathbf{B}_\omega^{\mathscr{F}_1}$, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **90** (2020), 48–56. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.048-056
31. M. Matveev, *A survey of star covering properties*, Topology Atlas preprint, April 15, 1998.
32. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
33. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. DOI: 10.1007/BFb0073675
34. V. V. Wagner, *Generalized groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **84** (1952), 1119–1122 (in Russian).

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
прийнята до друку 18.05.2021

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91

ЗАУВАЖЕННЯ ПРО СЛАБКО КОМПАКТНІ НАПІВТОПОЛОГІЧНІ СИМЕТРИЧНІ ІНВЕРСНІ НАПІВГРУПИ ОБМЕЖЕНОГО СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Олег ГУТІК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, м. Львів
e-mail: oleg.gutik@lnu.edu.ua

Вивчаємо слабко компактні трансляційно-неперервні T_1-топології на симетричній інверсній напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ скінченних перетворень кардинала λ обмеженого рангу $\leqslant n$. Доведено, що така T_1-топологія секвенціально пракомпакна тоді і тільки тоді, коли вона слабко компактна. Також, ми довели, що кожна трансляційно-неперервна слабко ω-обмежена T_1-топологія на напівгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ компактна.

Ключові слова: напівгрупа, інверсна напівгрупа, напівтопологічна напівгрупа, компактний, секвенціально пракомпактний, цілком зліченно пракомпактний, ω-обмежений-пракомпактний, слабко ω-обмежений, слабко компактний, Δ-система, лема про соняшник, добуток, Σ-добуток.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 54–62
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 54–62
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.054-062

УДК 517.53

LOGARITHMIC DERIVATIVE AND ANGULAR DENSITY OF ZEROS FOR THE BLASCHKE PRODUCT

Mykola ZABOLOTSKYI[1], Yuriy GAL[2], Mariana MOSTOVA[1]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
[2]*Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University,*
Ivan Franko Str., 24, 82100, Drohobych, Ukraine
e-mails: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua,
yuriyhal@gmail.com, mariana.mostova@gmail.com

Let $z_0 = 1$ be the only boundary point of zeros (a_n) of the Blaschke product $B(z)$,

$$\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^{m} \{z : |z| < 1, \arg(1 - z) = -\theta_j\} = \bigcup_{j=1}^{m} l_{\theta_j},$$

$$-\pi/2 + \eta < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \pi/2 - \eta,$$

be a finite system of rays, $0 < \eta < 1$. We found asymptotics of the logarithmic derivative of $B(z)$ as $z = 1 - re^{-i\varphi} \to 1$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, under the condition of existing the angular density of its zeros related to the comparison function $(1 - r)^{-\rho}$, $0 < \rho < 1$.. We also considered the inverse problem for $B(z)$, whose zeros lie on Γ_m.

Key words: logarithmic derivative, Blaschke product, angular density of zeros

1. Introduction

Let (a_n) be a sequence of numbers from $\mathbb{C}$ such that

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_n| \leqslant \ldots < 1$$

2020 Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D35,30J10

and $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|)<+\infty$. Then any function of the form

$$B(z)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\overline{a}_n}{|a_n|}\cdot\frac{a_n-z}{1-\overline{a}_nz}$$

is called a Blaschke product and is an analytic function in the unit disc $\mathbb{D}=\{z\colon |z|<1\}$. The Blaschke products form an important subclass of the space H^p, $p>0$ (see, for example, [1, p. 89]), that is analytic functions in $\mathbb{D}$, which satisfy the condition

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int\limits_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta<+\infty.$$

In particular, each function $f\in H^p$ can be represented in the form $f(z)=B(z)g(z)$, where $g\in H^p$ and $g(z)\neq 0$ in $\mathbb{D}$, B is the Blaschke product constructed by zeros f. We notice ([2, p. 81]), that the product B is a meromorphic function on $\mathbb{C}$ except for accumulation points of its zeros. In [3] R. Haloyan showed the connection between an angular density of zeros of B related to the comparison function $(1-r)^{-\rho}$, $0<\rho<1$, and the asymptotics of its logarithm as $z\to 1$.

The asymptotics and estimates of the logarithmic derivative of meromorphic functions outside exceptional sets play an important role in various fields of mathematics, in particular, in Nevanlinna's theory of value distribution [4, 5] and in the analytic theory of differential equations [6, 7].

We research the connection between the asymptotics of logarithmic derivative of the Blaschke product B with only one accumulation point of zeros on $\partial\mathbb{D}$ and the existence of the angular density of its zeros in this paper. Without loss of generality, we assume further that such accumulation point is $z_0=1$. Indeed, otherwise we would consider the Blaschke product

$$B^*(z)=B\left(z\cdot e^{i\varphi_0}\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\overline{a}_n}{|a_n|}\frac{a_n-ze^{i\varphi_0}}{1-\overline{a}_nze^{i\varphi_0}}=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\overline{a}_n^*}{|a_n^*|}\frac{a_n^*-z}{1-\overline{a}_n^*z},$$

with $a_n^*=a_ne^{-i\varphi_0}$, here $e^{i\varphi_0}$ is the accumulation point of zeros (a_n) of the product B.

For logarithmic derivative of B from the formula

$$\frac{B'(z)}{B(z)}=\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)dn(t)}{(z-te^{i\varphi_n})\,(1-zte^{-i\varphi_n})},\quad |\varphi_n|=|\arg a_n|\to 0,\quad n\to+\infty,$$

it follows that $B'(z)/B(z)=O(1)$ as $z\to e^{i\alpha}$, $|\alpha|>\delta$, $0<\delta<1$, since

$$\frac{B'(z)}{B(z)}=(1+o(1))\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)dn(t)}{(e^{i\alpha}-te^{i\varphi_n})\left(1-te^{-i(\varphi_n-\alpha)}\right)}=$$

$$=(1+o(1))\,e^{-i\alpha}\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)dn(t)}{1-2t\cos(\alpha-\varphi_n)+t^2},$$

$z \to e^{i\alpha}$, and the integral above converges.

2. Definitions and main results

Let $\eta > 0$ and $a_n = 1 - r_n e^{-i\theta_n}$, $-\pi/2 + \eta < \theta_n < \pi/2 - \eta$ be a sequence of zeros of the Blaschke product B, let $n(t) = n(t, B)$ be a number of (a_n) in the disc $\{z\colon |z| \leqslant t\}$ such that $1 - r_n \leqslant t$, $0 < t < 1$, $r_n \to 0+$ as $n \to +\infty$. It is easy to see that $n(t) = \widetilde{n}(1-t)$, where $\widetilde{n}(t)$ is a counting function of zeros (a_n) of the product B such that $r_n \geqslant t$, $0 < t < 1$.

We denote by $\mathscr{B}(\rho)$ the set of Blaschke products B, zeros of which satisfy the condition

$$\varlimsup_{t\to 1-} \frac{n(t)}{(1-t)^{-\rho}} < +\infty,\ 0 < \rho < 1.$$

A set $E \subset \mathbb{D}$ is said to be a *set of zero μ-density*, $1 < \mu \leqslant 2$, if this set can be covered by a sequence of disks $K(z_j, t_j) = \{z\colon |z - z_j| < t_j\}$ such that

$$\sum_{|1-z_j|\leqslant 1-r} t_j^{\mu} = o\left((1-r)^{\mu}\right),\ r \to 1-.$$

Let $n(t;\psi)$ be the number of zeros $a_n = 1 - r_n e^{-i\psi_n}$ of the product B, for which $1 - r_n \leqslant t$, $-\pi/2 + \eta < \psi_n \leqslant \psi$. We will say that zeros of $B \in \mathscr{B}(\rho)$ have an angular density at the point 1, if for all ψ, $|\psi| < \pi/2 - \eta$, except a countable number of values ψ at most, the finite limit

$$\lim_{t\to 1-} \frac{n(t;\psi)}{(1-t)^{-\rho}} = \Delta(\psi)$$

exists. Let us set

$$h(\varphi;\psi) = e^{i\rho(|\varphi-\psi| - \pi\,\mathrm{sign}(\varphi-\psi))} - e^{i\rho(\varphi+\psi)} = e^{i\rho\varphi}\left(e^{i\rho(-\psi-\pi\,\mathrm{sign}(\varphi-\psi))} - e^{i\rho\psi}\right),$$

$$H(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(\varphi;\psi)\,d\Delta(\psi).$$

Theorem 1. *Let $0 < \rho < 1$, $1 < \mu \leqslant 2$, $B \in \mathscr{B}(\rho)$ and let the zeros of B have the angular density at the point 1. Then there exists a set of zero μ-density $E \subset \mathbb{D}$ such that for $z = 1 - re^{-i\varphi} \notin E$, $\varphi \in (-\pi/2 + \eta; \pi/2 - \eta)$*

$$(1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} = (1 + o(1))\,\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} H(\varphi) r^{-\rho},\ r \to 0+. \tag{1}$$

Let

$$-\pi/2 + \eta < \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < \pi/2 - \eta,$$

$0 < \eta < 1$ and let

$$\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^{m} \{z\colon |z| < 1, \arg(1-z) = -\psi_j\} = \bigcup_{j=1}^{m} l_{\psi_j}$$

be a finite system of rays; let $\mathscr{B}(\rho;\Gamma_m)$ be a subclass of products B from the class $\mathscr{B}(\rho)$, whose zeros (a_n) of which lie on Γ_m; let $n(t,\psi_j) = n(t,\psi_j;B)$ be a number of zeros of B lying on the ray l_{ψ_j} such that $1 - r_n \leqslant t$.

Theorem 2. *Let* $0 < \rho < 1$, $\Delta_j \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}(\rho;\Gamma_m)$ *and let for* $z = 1 - re^{-i\varphi}$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \psi_j$,

$$(1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} = (1+o(1))\,\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\sum_{j=1}^{m}\Delta_j h(\varphi;\psi_j)r^{-\rho},\ r\to 0+,$$

moreover, for any $\delta > 0$ *the above relation holds uniformly relative to* φ *on the set* $(-\pi/2;\pi/2)\setminus\bigcup_{j=1}^{m}(\psi_j-\delta,\psi_j+\delta)$. *Then for* $j=\overline{1,m}$ *we have that*

$$n(t;\psi_j) = (1+o(1))\,\Delta_j(1-t)^{-\rho},\quad t\to 1-. \tag{2}$$

3. Additional results

We will use the following propositions, which we formulate in the form of lemmas.

Lemma 1. *Let* $0<\rho<1$, $0<\Delta<+\infty$ *and let the zeros* $a_n = 1-r_ne^{-i\psi}$ *of the product* B *lie on the ray* l_ψ, $-\pi/2<\psi<\pi/2$ *and*

$$n(t) = (1+o(1))\,\Delta(1-t)^{-\rho},\ t\to 1-. \tag{3}$$

Then for $z = 1-re^{-i\varphi}$, $\varphi\in(-\pi/2;\pi/2)\setminus\{\psi\}$, *we have that*

$$(1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} = (1+o(1))\,\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}h(\varphi;\psi)r^{-\rho},\ r\to 0+, \tag{4}$$

moreover, the equality (4) *holds uniformly for any* $\delta>0$ *relative to* φ *on the set* $(-\pi/2;\psi-\delta]\cup[\psi+\delta;\pi/2)$.

Proof. After replacing z by $z=(w-1)/w$ we have

$$g(w) = B\left(\frac{w-1}{w}\right) = \left(\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|a_n|}\right)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{w}{b_n}\right)/\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{w}{c_n}\right) = p_0\frac{g_1(w)}{g_2(w)},$$

where $p_0 = \prod_{n=1}^{+\infty}|a_n|^{-1}$, $b_n = 1/(1-a_n) = e^{i\psi}/r_n$ are zeros of the entire function g_1,

$$c_n = -\overline{a}_n/(1-\overline{a}_n) = -e^{-i\psi}/r_n + 1 = e^{-i(\psi+\pi)}/r_n + 1$$

are zeros of g_2 and

$$n(\tau,0,g_1) = n(\tau,0,g_2) = \Delta\tau^\rho + o\left(\tau^\rho\right),\ \tau\to+\infty.$$

Set

$$\widetilde{g}_2(w) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{w}{\widetilde{c}_n}\right),\ \widetilde{c}_n = c_n - 1 = \frac{1}{r_n}e^{-i(\psi+\pi)}.$$

Let $\widehat{l}_\alpha = \{w\colon |w|\geqslant 1, \arg w = \alpha\}$, $l^*_\alpha = \{w\colon |w|\geqslant 1, \arg(w-1)=\alpha\}$ and let

$$\ln g(w) = \ln p_0 + \ln g_1(w) - \ln\widetilde{g}_2(w) + \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{1-w/\widetilde{c}_n}{1-w/c_n}\right)$$

be an univalent branch of $\mathrm{Ln}\, g(w)$ on $\mathbb{C} \setminus \left(\widehat{l}_\psi \cup \widehat{l}_{-\psi-\pi} \cup l^*{}_{-\psi-\pi}\right)$ such that $\ln g(0) = \ln g_1(0) = \ln \widetilde{g}_2(0) = 0$, $\ln p_0 > 0$, $\ln\left(1 - \frac{w}{\widetilde{c}_n}\right)\Big|_{w=0} = \ln\left(1 - \frac{w}{c_n}\right)\Big|_{w=0} = 0$. Hence

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = w\left(\frac{g_1'(w)}{g_1(w)} - \frac{\widetilde{g}_2'(w)}{\widetilde{g}_2(w)}\right) + w\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n - \widetilde{c}_n}{(w - c_n)(w - \widetilde{c}_n)}. \tag{5}$$

Since ([8, p. 92]) for $\delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \delta$, $0 < \delta < 1$, we get that

$$\left|t - re^{i\varphi}\right| \geqslant (t + r)\sin\frac{\delta}{2},\ t > 0,$$

for $\theta \in [-\psi - \pi + \delta, -\psi + \pi - \delta]$ and $\tau \geqslant 2/\sin\frac{\delta}{2}$ we obtain

$$|w - \widetilde{c}_n| = \left|\tau e^{i\theta} - \frac{1}{r_n}e^{i(-\psi-\pi)}\right| = \left|\tau - \frac{1}{r_n}e^{i(-\psi-\theta-\pi)}\right| \geqslant \left(\tau + \frac{1}{r_n}\right)\sin\frac{\delta}{2},$$
$$|w - c_n| \geqslant |w - \widetilde{c}_n| - 1 \geqslant \left(\tau + \frac{1}{r_n}\right)\sin\frac{\delta}{2} - 1 \geqslant \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{r_n}\right)\sin\frac{\delta}{2}.$$

Then ($t_n = 1/r_n > 1$),

$$\begin{aligned}\left|w\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(w - c_n)(w - \widetilde{c}_n)}\right| &\leqslant \frac{2\tau}{\sin^2\delta/2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\tau + t_n)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{2\tau}{\sin^2\delta/2}\int_1^{+\infty}\frac{dn(t, 0, \widetilde{g}_2)}{(t + \tau)^2} = \\ &= \frac{4\tau}{\sin^2\delta/2}\int_1^{+\infty}\frac{n(t, 0, \widetilde{g}_2)dt}{(t + \tau)^3} \leqslant \\ &\leqslant \frac{8\Delta\tau}{\sin^2\delta/2}\int_1^{+\infty}\frac{(t + \tau)^\rho}{(t + \tau)^3}d(t + \tau) \leqslant \\ &\leqslant \frac{8\Delta\tau^{\rho-1}}{(2 - \rho)\sin^2\delta/2} = \\ &= o(1), \quad \tau \to +\infty.\end{aligned} \tag{6}$$

For $w = \tau e^{i\theta}$, $\psi < \theta < \psi + 2\pi$, taking into account Theorem 1 from [3], we get

$$w\frac{g_1'(w)}{g_1(w)} = (1 + o(1))\,\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\theta-\psi-\pi)}\tau^\rho, \quad \tau \to +\infty;$$

and for $-\psi - \pi < \theta < -\psi + \pi$

$$w\frac{\widetilde{g}_2'(w)}{\widetilde{g}_2(w)} = (1 + o(1))\,\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}e^{i\rho(\theta+\psi)}\tau^\rho, \quad \tau \to +\infty.$$

By (5), (6) and the two above equalities for $\theta \in (\psi, -\psi + \pi)$ we obtain $(\tau \to +\infty)$

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = w\left(\frac{g_1'(w)}{g_1(w)} - \frac{\widetilde{g}_2'(w)}{\widetilde{g}_2(w)}\right) =$$
$$= (1 + o(1))\,\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}\left(e^{i\rho(\theta-\psi-\pi)} - e^{i\rho(\theta+\psi)}\right)\tau^{\rho},$$

and for $\theta \in (-\psi - \pi, \psi)$ we have that

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = (1 + o(1))\,\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}\left(e^{i\rho(\theta-\psi+\pi)} - e^{i\rho(\theta+\psi)}\right)\tau^{\rho},$$

namely, for $\theta \in (-\psi - \pi, -\psi + \pi) \setminus \{\psi\}$

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = (1 + o(1))\,\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}h(\theta;\psi)\tau^{\rho}, \quad \tau \to +\infty, \tag{7}$$

moreover, the equality (7) holds uniformly for any $\delta > 0$ on the set $(-\psi - \pi, -\psi + \pi) \setminus (\psi - \delta, \psi + \delta)$.

Since $-\psi - \pi < -\pi/2$, $-\psi + \pi > \pi/2$, $w = 1/(1 - z)$,

$$g'(w) = B'\left(\frac{w-1}{w}\right)\frac{1}{w^2} = (1 - z)^2 B'(z)$$

and for $z = 1 - re^{-i\varphi}$ we have

$$\theta = \arg w = \arg\left(\frac{1}{1-z}\right) = \arg\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right) = \varphi,$$

then by (7) we obtain (4), and hence, lemma 1 is proved. □

Remark 1. In fact, the relation (4) holds uniformly relative to φ on the set

$$[\psi + \delta, -\psi + \pi - \delta] \cup [-\psi - \pi + \delta, \psi - \delta],$$

$0 < \delta < 1$.

Lemma 2. *Let $0 < \rho < 1$, $0 < \Delta < +\infty$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ and let the zeros $a_n = 1 - r_n e^{-i\psi}$ of the product B lie on the ray l_ψ. If for $z = 1 - re^{-i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2) \setminus \{\psi\}$ the following relation*

$$(1 - z)\frac{B'(z)}{B(z)} = (1 + o(1))\,h(\varphi;\psi)r^{-\rho},\ \ r \to 0+$$

holds, moreover, for any $\delta > 0$ the above relation holds uniformly relative to φ on the set $(-\pi/2, \pi/2) \setminus (\psi - \delta, \psi + \delta)$, then $n(t; B) = (1 + o(1))(1 - t)^{-\rho}$, $t \to 1-$.

Proof. Without loss of generality, we assume that $\psi = 0$. After replacing z by $z = (w - 1)/w$ we get

$$g(w) = B\left(\frac{w-1}{w}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{w}{b_n}\right) / \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{w}{c_n}\right) = p_0\frac{g_1(w)}{g_2(w)},$$

where $b_n = 1/r_n > 0$ are zeros of the entire function g_1, $c_n = -1/r_n + 1 < 0$ are zeros of g_2 and $n(\tau, 0, g_1) = n(1 - 1/\tau; B)$.

Since (see the proof of Lemma 1) $wg'(w)/g(w) = (1-z)B'(z)/B(z)$, then under the conditions of Lemma 2 for $w = \tau e^{i\theta}$, $0 < |\theta| < \pi$, we have

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = (1+o(1))\,\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}h(\theta;0)\tau^{-\rho},\ \tau\to+\infty. \tag{8}$$

Set $\Omega = \{b_n : n\in\mathbb{N}\}$, $-\pi < \alpha < 0 < \beta < \pi$,

$$S_r(\alpha,\beta) = \{w : |w|\leqslant r, \alpha\leqslant \arg w\leqslant \beta\},$$

$r\notin\Omega$, and denote by $\partial S_r^+(\alpha,\beta) = I_r(\alpha)\cup C_r(\alpha,\beta)\cup I_r^-(\beta)$ a positive orientation of the boundary of the sector $S_r(\alpha,\beta)$, where $I_r(\alpha) = \{z_1(t) = te^{i\alpha}, 0\leqslant t\leqslant r\}$, $I_r(\beta) = \{z_2(t) = te^{i\beta}, 0\leqslant t\leqslant r\}$, $C_r(\alpha,\beta) = \{z_3(t) = re^{it}, \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$. Then

$$2\pi i n(r,0,g) = \int\limits_{\partial S_r^+(\alpha,\beta)}\frac{g'(z)}{g(z)}dz = \left(\int\limits_{I_r(\alpha)} + \int\limits_{I_r^-(\beta)} + \int\limits_{C_r(\alpha,\beta)}\right)\frac{g'(z)}{g(z)}dz = J_1+J_2+J_3.$$

By (8), just like in the proof of Theorem 2 from [9], as $r\to+\infty$ we obtain

$$J_1 = \int\limits_0^r \frac{g'(te^{i\alpha})}{g(te^{i\alpha})}e^{i\alpha}dt = (1+o(1))\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}\int\limits_0^r h(\alpha;0)t^{\rho-1}dt = (1+o(1))\frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}h(\alpha;0)r^{\rho}$$

and, similarly,

$$J_2 = -(1+o(1))\frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}h(\beta;0)r^{\rho},$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int\limits_\alpha^\beta \frac{g'(re^{it})}{g(re^{it})}ire^{it}dt = (1+o(1))\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}ir^{\rho}\int\limits_\alpha^\beta h(t;0)dt\\
&= (1+o(1))\frac{\pi\rho\Delta}{\sin\pi\rho}ir^{\rho}\left(\left(e^{i\pi\rho}-1\right)\int\limits_\alpha^0 e^{i\rho t}dt + \left(e^{-i\pi\rho}-1\right)\int\limits_0^\beta e^{i\rho t}dt\right)\\
&= (1+o(1))\frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}r^{\rho}\big(\left(e^{i\pi\rho}-1\right)\left(1-e^{i\rho\alpha}\right) + \left(e^{-i\pi\rho}-1\right)\left(e^{i\rho\beta}-1\right)\big)\\
&= (1+o(1))\frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}r^{\rho}\big(2i\sin\pi\rho - h(\alpha;0) + h(\beta;0)\big).
\end{aligned}$$

Consequently,

$$2\pi i n(r,0,g) = (1+o(1))2\pi i\Delta r^{\rho},\ r\to+\infty.$$

Since $n(r,0,g) = n(1-1/r;B)$, we conclude that $n(t;B) = (1+o(1))\Delta(1-t)^{-\rho}$, $t\to 1-$. □

4. Proof of theorems

Let $B\in\mathscr{B}(\rho,\Gamma_m)$ and suppose that for all $j=\overline{1,m}$ (2) holds. Represent B in the form

$$B(z) = B_1(z)\cdot B_2(z)\cdot\ldots\cdot B_m(z),$$

where $B_j(z)$ is a Blaschke product constructed by zeros of B lying on the ray l_{ψ_j}.

Let $\widetilde{l}_{\psi_j} = \{z\colon \widetilde{r}_j \leqslant |z| < 1, \arg(1-z) = -\psi_j\}$, where $\widetilde{r}_j$ is the smallest modulus of zero of B lying on the ray l_{ψ_j}, $j=\overline{1,m}$; $G = \mathbb{D} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \widetilde{l}_{\psi_j}$; let $\ln B$ be an univalent branch in G of the multivalued function $\operatorname{Ln} B(z) = \ln|B(z)| + i \operatorname{Arg} B(z)$ such that $\ln B(0) < 0$.

From the equality

$$\ln B(z) = \ln B_1(z) + \ln B_2(z) + \ldots + \ln B_m(z), \quad z \in G,$$

owing to (4), for $z = 1 - re^{-i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \psi_j$, we have

$$\begin{aligned} (1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} &= (1-z)\sum_{j=1}^{m} \frac{B_j'(z)}{B_j(z)} = \\ &= (1+o(1))\,\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j h(\varphi;\psi_j) r^{-\rho}, \quad r \to 0+, \end{aligned} \tag{9}$$

which is equivalent to (1) in the case of zeros of B lying on a finite system of rays Γ_m. The transition from Γ_m to the general case of the location of zeros of $B \in \mathscr{B}(\rho)$, which have an angular density at the point 1, is carried out according to a known scheme (see for example [3, p. 69-70]. So Theorem 1 is proved.

Let the conditions of Theorem 2 be satisfied. Then by (9) and Lemma 2 for each $j = \overline{1,m}$ we obtain

$$n(t;\psi_j) = (1+o(1))\,\Delta_j (1-t)^{-\rho}, \quad t \to 1-,$$

that proves Theorem 2.

References

1. P. Kusis, *Introduction to the theory of spaces H^p*, Mir, Moscow, 1984. (in Russian)
2. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Mir, Moscow, 1984. (in Russian)
3. R. S. Haloyan, *On the asymptotic properties $\pi_p(z, z_k)$*, Reports of the Academy of Sciences of the Armenian SSR **59** (1974), no. 2, 65–71.
4. А. А. Гольдберг, Н. Е. Коренков, *Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста*, Сиб. мат. журн. **21** (1980), no. 3, 63–79. **English version:** A. A. Goldberg and N. E. Korenkov, *Asymptotic behavior of logarithmic derivative of entire function of completely regular growth*, Sib. Math. J. **21** (1980), no. 3, 363–375. DOI: 10.1007/BF00968180
5. J. Miles, *A sharp form of the lemma on the logarithmic derivative*, J. London Math. Soc. **45** (1992), no. 2, 243–254. DOI: 10.1112/jlms/s2-45.2.243
6. I. E. Chyzhykov, G. G. Gundersen, and J. Heittokangas, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc. **86** (2003), no. 3, 735–754. DOI: 10.1112/S0024611502013965
7. Sh. I. Strelitz, *Asymptotic properties of analytical solutions of differential equations*, Mintis, Vilnius, 1972, 468 p. (in Russian)
8. A. A. Goldberg and I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)
9. М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова, *Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку*, Укр. мат. журн. **66** (2014), no. 4, 473–481. **English**

version: M. V. Zabolotskyj and M. R. Mostova, *Sufficient conditions for the existence of the v-density of zeros for an entire function of order zero*, Ukr. Math. J. **68** (2016), no. 4, 570–582. DOI: 10.1007/s11253-016-1242-1

Стаття: надійшла до редколегії 02.02.2021
прийнята до друку 18.05.2021

ЛОГАРИФМІЧНА ПОХІДНА ТА КУТОВА ЩІЛЬНІСТЬ НУЛІВ ДОБУТКУ БЛЯШКЕ

Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ[1], **Юрій ГАЛЬ**[2], **Мар'яна МОСТОВА**[1]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, 79000, м. Львів*
[2]*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка, 24, 82100, м. Дрогобич*
e-mails: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, yuriyhal@gmail.com, mariana.mostova@gmail.com

Добутки Бляшке є важливим підкласом функцій, аналітичних в одиничному крузі з обмеженою характеристикою Неванлінни і мероморфних у $\mathbb{C}$ за винятком точок скупчення нулів $B(z)$. Асимптотика й оцінки логарифмічної похідної мероморфних функцій зовні виняткових множин відіграють важливу роль в різних галузях математики. Зокрема, Гольдберг А.А., Хейман В.К. і Майлс Дж. досліджували ці питання в неванліннівській теорії розподілу значень, Гундерсен Г.Г. і Стрейліц Ш.І. – в аналітичній теорії диференційних рівнянь. Нехай $z_0 = 1$ єдина гранична точка нулів (a_n) добутку Бляшке $B(z)$,

$$\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^{m} \{z : |z| < 1, \arg(1-z) = -\theta_j\} = \bigcup_{j=1}^{m} l_{\theta_j},$$

$-\pi/2 + \eta < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \pi/2 - \eta$, – скінченна система променів, $0 < \eta < 1$. За умови існування кутової щільності нулів $B(z)$ знайдено асимптотику логарифмічної похідної $B(z)$ при $z = 1 - re^{-i\varphi} \to 1$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Також розглядається обернена задача для добутків Бляшке $B(z)$, нулі яких розташовані на Γ_m.

Ключові слова: логарифмічна похідна, добуток Бляшке, кутова щільність нулів.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 63–71
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 63–71
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.063-071

УДК 517.925.4

NEIGHBORHOODS OF DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGENT IN A HALF-PLANE

Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

For an absolutely convergent in the half-plane $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ Dirichlet series $F(s) = e^s + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}$ the set $O_{j,\delta}(F)$ of Dirichlet series $G(s) = e^s + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^j |g_k - f_k| \le \delta$ is called a neighborhood of the function F. It is proved that each function G from the neighborhood $O_{1,1}(E)$ of the function $E(s) = e^s$ is a pseudostarlike function in Π_0, and if G is pseudostarlike in Π_0 and $g_k \le 0$ for all $k \ge 1$ then $G \in O_{1,1}(E)$. A similar connection exists between $O_{2,1}(E)$ and pseudoconvex functions in Π_0. The neighborhoods $O_{1,\delta}(F)$ and $O_{2,\delta}(F)$ are investigated also in the cases when F is either pseudostarlike or pseudoconvex of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1)$. Assuming that $0 \le \alpha < 1$, $0 < \beta < \beta_1 \le 1$, the coefficients f_k and g_k are negative and the function F is pseudostarlike of the order α and the type β it is proved, in particular, that if $G \in O_{1,\delta}(F)$ with $\delta = \dfrac{2(1-\alpha)(\beta_1 - A\beta)}{1+\beta_1}$, where $A = \dfrac{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_1 - 2\alpha\beta - (1-\beta)}$, then G is pseudostarlike of the order α and the type β_1. On the contrary, if G is pseudostarlike of the order α and the type β_1 then $G \in O_{1,\delta}(F)$ with

$$\delta = 2\lambda_1(1-\alpha)\left(\frac{\beta_1}{\lambda_1(1+\beta_1) - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)} + \frac{\beta}{\lambda_1(1+\beta) - 2\alpha\beta - (1-\beta)}\right).$$

Key words: Dirichlet series, pseudostarlikeness, pseudoconvexity, neighborhood of function.

2020 Mathematics Subject Classification: 30B50, 30D45

1. Introduction

Denote by A the class of analytic in the unit disk $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ functions

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k. \tag{1}$$

For $f \in A$, following A.W. Goodman [1] and S. Ruscheweyh [2], its neighborhood is a set of the form

$$N_\delta(f) = \Big\{g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} g_k z^k \in A : \sum_{k=2}^{\infty} k|g_k - f_k| \le \delta\Big\}.$$

The neighborhoods of various classes of analytical in $\mathbb{D}$ functions were studied by many authors (we concentrate here only on articles [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]). The Dirichlet series of the form

$$F(s) = e^s + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \tag{2}$$

absolutely convergent in the half-plane $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ are direct generalizations of functions (1) analytic in $\mathbb{D}$, where the exponents satisfy the condition $1 < \lambda_k \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$. The class of such Dirichlet series will be denoted by $SD(0)$. We say that $F \in SD^*(0)$ if $F \in SD(0)$ and $f_k \le 0$ for all $k \ge 1$.

Geometric theory of the class $SD(0)$ was initiated in [10] and [11, p. 133–154]. It is known [10] that each function $F \in SD(0)$ is non-univalent in Π_0, but there exist conformal in Π_0 functions (2), and if $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k |f_k| \le 1$ then function (2) is conformal in Π_0. A conformal function (2) in Π_0 is said to be pseudostarlike if $\operatorname{Re}\{F'(s)/F(s)\} > 0$ and is said to be pseudoconvex if $\operatorname{Re}\{F''(s)/F'(s)\} > 0$ for $s \in \Pi_0$. In [10] (see also [11, p. 139]) it is proved that if $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k |f_k| \le 1$ then function (2) is pseudostarlike and if $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k| \le 1$ then function (2) is pseudoconvex. A conformal function (2) in Π_0 is said [12] to be pseudostarlike of the order $\alpha \in [0, 1)$ if $\operatorname{Re}\{F'(s)/F(s)\} > \alpha$ for $s \in \Pi_0$, i.e., $\left|\frac{F'(s)}{F(s)} - 1\right| < \left|\frac{F'(s)}{F(s)} - (2\alpha - 1)\right|$ for $s \in \Pi_0$. Finally, a conformal function (2) in Π_0 is said [12] to be pseudostarlike of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1]$ if

$$\left|\frac{F'(s)}{F(s)} - 1\right| < \beta \left|\frac{F'(s)}{F(s)} - (2\alpha - 1)\right|, \qquad s \in \Pi_0.$$

Similarly, a conformal function (2) in Π_0 is said to be pseudoconvex of the order $\alpha \in [0, 1)$ if $\operatorname{Re}\{F''(s)/F'(s)\} > \alpha$, and pseudoconvex of the order α and the type $\beta \in (0, 1]$ if

$$\left|\frac{F''(s)}{F'(s)} - 1\right| < \beta \left|\frac{F''(s)}{F'(s)} - (2\alpha - 1)\right|, \quad s \in \Pi_0.$$

By $PS_{\alpha,\beta}$ we denote the class of pseudostarlike functions of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1]$ and by $PC_{\alpha,\beta}$ we denote the class of pseudoconvex functions of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1]$.

For $j > 0$ and $\delta > 0$ we define the neighborhood of $F \in SD_0$ as follows

$$O_{j,\delta}(F) = \Big\{G(s) = e^s + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\} \in SD_0 : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^j |g_k - f_k| \le \delta\Big\}.$$

Similarly, for $F \in SD_0^*$

$$O_{j,\delta}^*(F) = \Big\{G(s) = e^s + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\} \in SD_0^* : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^j |g_k - f_k| \le \delta\Big\}.$$

Here we will establish a connection between the classes $PS_{\alpha,\beta}$, $PC_{\alpha,\beta}$ and $O_{j,\delta}(F)$, $O_{j,\delta}^*(F)$.

2. Neighborhoods of the function $E(s) = e^s$

We need the following lemmas.

Lemma 1 ([12])**.** *In order for function $F \in SD_0$ to be pseudostarlike of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1]$ it is sufficient and in the case when $f_k \le 0$ for all $k \ge 1$, it is necessary that*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{(1+\beta)\lambda_k - 2\beta\alpha - (1-\beta)\}|f_k| \le 2\beta(1-\alpha). \tag{3}$$

Also in order for function $F \in SD_0$ to be pseudoconvex of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1]$ it is sufficient and in the case when $f_k \le 0$ for all $k \ge 1$, it is necessary that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \{(1+\beta)\lambda_k - 2\beta\alpha - (1-\beta)\}|f_k| \le 2\beta(1-\alpha).$$

Lemma 2. *Let $F \in SD_0$. Then $G \in O_{2,\delta}(F)$ if and only if $G' \in O_{1,\delta}(F')$.*

Proof. Clearly

$$F'(s) = e^s + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \exp\{s\lambda_k\} \in SD_0.$$

Therefore, $G' \in O_{1,\delta}(F')$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\lambda_k g_k - \lambda_k f_k| \le \delta$, i. e. if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |g_k - f_k| \le \delta$. The last condition holds if and only if $G \in O_{2,\delta}(F)$. □

Now we prove such theorem.

Theorem 1. *For the function $E(s) = e^s$ the following correlations hold: $O_{1,1}(E) \subset PS_{0,1}$, $O_{1,1}^*(E) = PS_{0,1} \bigcap SD_0^*$, $O_{2,1}(E) \subset PC_{0,1}$, and $O_{2,1}^*(E) = PC_{0,1} \bigcap SD_0^*$.*

Proof. If $G \in O_1(1, E)$ then $G \in SD_0$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |g_k| \le 1$. Therefore,

$$\begin{aligned} |G'(s) - G(s)| =& \Big| \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - 1) g_k \exp\{s\lambda_k\} \Big| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |g_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} - \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} \le \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - 1) |g_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} \le \\ &\le e^{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |g_k| - \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} \le \\ &\le e^{\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \exp\{\sigma\lambda_k\}. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$|G(s)| = \Big| e^s + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\} \Big| \ge e^{\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \exp\{\sigma\lambda_k\},$$

and, thus, $|G'(s) - G(s)| \le |G(s)|$, i.e., $\left| \frac{G'(s)}{G(s)} - 1 \right| \le 1$ for all $s \in \Pi_0$. Hence it follows that $\mathrm{Re}\{G'(s)/G(s)\} > 0$, i.e., $G \in PS_{0,1}$ and $O_{1,1}(E) \subset PS_{0,1}$.

From above it follows that $O_{1,1}^*(E) \subset PS_{0,1}$. On the other hand, if $G \in SD_0^*$ and $G \in PS_{0,1}$ then by Lemma 1 $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f_k| \le 1$, i. e. $G \in O_{1,1}^*(E)$. Thus, $PS_{0,1} \bigcap SD_0^* \subset O_{1,1}^*(E)$ and $PS_{0,1} \bigcap SD_0^* = O_{1,1}^*(E)$.

We remark that since $G''(s)/G'(s) = H'(s)/H(s)$, where $H(s) = e^s + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \exp\{s\lambda_k\}$ and $h_k = \lambda_k g_k$, the function G is pseudoconvex of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1]$ if and only if the function H is pseudostarlike of the order $\alpha \in [0, 1)$ and the type $\beta \in (0, 1]$. Therefore, from the results proved above for pseudostarlike functions, one can easily obtain the corresponding results for pseudoconvex functions. In particular, in view of Lemma 2 from above we get $O_{2,1}(E) \subset PS_{0,1}$ and $PS_{0,1} \bigcap SD_0^* = O_{2,1}^*(E)$. The proof of Theorem 1 is complete. □

3. Neighborhoods of pseudostarlike and pseudoconvex functions of the order α.

The following theorem is true.

Theorem 2. *Let $0 \le \alpha_1 < \alpha < 1$ and $F \in SD_0^* \bigcap PS_{\alpha,1}$.*

1. *If $G \in O_{1,\delta}^*(F)$ with $\delta = (\alpha - \alpha_1) \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \alpha}$ then $G \in PS_{\alpha_1,1}$.*

2. *On the contrary, if* $G \in SD_0^* \bigcap PS_{\alpha_1,1}$ *then* $G \in O_{1,\delta}^*(F)$ *with*

$$\delta = \frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\lambda_1-\alpha} + \frac{\lambda_1(1-\alpha_1)}{\lambda_1-\alpha_1}.$$

Proof. Since $F \in PS_{\alpha,1}$, by Lemma 1 with $\beta = 1$ we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha\}|f_k| \le 1-\alpha. \tag{4}$$

Therefore, for $\alpha_1 < \alpha$ in view of (4) we get

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha_1\}|g_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha_1\}(|g_k-f_k|+|f_k|) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha+\alpha-\alpha_1\}|f_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha_1\}|f_k-g_k| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha\}|f_k| + (\alpha-\alpha_1)\sum_{k=1}^{\infty}|f_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|f_k-g_k| \le$$
$$\le 1-\alpha+\delta+(\alpha-\alpha_1)\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|.$$

But in view of (4)

$$(\lambda_1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}|f_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha\}|f_k| \le 1-\alpha,$$

that is $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k| \le (1-\alpha)/(\lambda_1-\alpha)$ and, thus,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha_1\}|g_k| \le 1-\alpha+\delta+(\alpha-\alpha_1)\frac{1-\alpha}{\lambda_1-\alpha} = 1-\alpha_1,$$

i.e., by Lemma 1 with $\beta = 1$ the function G is pseudostarlike of the order α_1.

Now suppose that $G \in SD_0^* \bigcap PS_{\alpha_1,1}$. Then in view of (4) we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|g_k-f_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\alpha_1}\{\lambda_k-\alpha_1\}|g_k-f_k| \le$$
$$\le \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\alpha_1}\sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha_1\}|g_k-f_k| \le$$
$$\le \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\alpha_1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\alpha_1}{\lambda_k-\alpha}\{\lambda_k-\alpha\}|f_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k-\alpha_1\}|g_k|\right) \le$$
$$\le \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\alpha_1}\left(\frac{\lambda_1-\alpha_1}{\lambda_1-\alpha}(1-\alpha)+1-\alpha_1\right) =$$

$$= \frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\lambda_1-\alpha} + \frac{\lambda_1(1-\alpha_1)}{\lambda_1-\alpha_1} =$$
$$= \delta,$$

i.e., $G \in O^*_{1,\delta}(F)$ with such δ. Theorem 2 is proved. □

Using Lemma 2 and the remark in the proof of Theorem 1, we can prove the following statement.

Proposition 1. *Let $0 \le \alpha_1 < \alpha < 1$ and $F \in SD^*_0 \bigcap PC_{\alpha,1}$. If $G \in O^*_{2,\delta}(F)$ with $\delta = (\alpha-\alpha_1)\dfrac{\lambda_1-1}{\lambda_1-\alpha}$ then $G \in PC_{\alpha_1,1}$. On the contrary, if $G \in SD^*_0 \bigcap PC_{\alpha_1,1}$ then $G \in O^*_{2,\delta}(F)$ with*

$$\delta = \frac{\lambda_1(1-\alpha)}{\lambda_1-\alpha} + \frac{\lambda_1(1-\alpha_1)}{\lambda_1-\alpha_1}.$$

4. Neighborhoods of pseudostarlike and pseudoconvex functions of the order $\alpha \in [0,\,1)$ and the type $\beta \in (0,\,1)$

In the general case the following theorem is true.

Theorem 3. *Let $0 \le \alpha < 1$, $0 < \beta < \beta_1 \le 1$ and $F \in SD^*_0 \bigcap PS_{\alpha,\beta}$.*

1. *If $G \in O^*_{1,\delta}(F)$ with $\delta = \dfrac{2(1-\alpha)(\beta_1-A\beta)}{1+\beta_1}$, where*
$$A = \frac{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_1 - 2\alpha\beta - (1-\beta)},$$
then $G \in PS_{\alpha,\beta_1}$.
2. *On the contrary, if $G \in SD^*_0 \bigcap PS_{\alpha,\beta_1}$ then $G \in O^*_{1,\delta}(F)$ with*

$$\delta = 2\lambda_1(1-\alpha)\left(\frac{\beta_1}{\lambda_1(1+\beta_1)-2\alpha\beta_1-(1-\beta_1)} + \frac{\beta}{\lambda_1(1+\beta)-2\alpha\beta-(1-\beta)}\right). \tag{5}$$

Proof. At first we remark that $\beta_1 - A\beta > 0$ and

$$\max_{k\ge1} \frac{(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_k - 2\alpha\beta - (1-\beta)} = A.$$

Since $F \in PS_{\alpha,\beta}$, by Lemma 1 for $0 < \beta < \beta_1 \le 1$ we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)\}|g_k| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\{(1+\beta_1)\lambda_k-2\alpha\beta_1-(1-\beta_1)\}|g_k-f_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\{(1+\beta_1)\lambda_k-2\alpha\beta_1-(1-\beta_1)\}|f_k| \le$$
$$\le (1+\beta_1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|g_k-f_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\beta_1)\lambda_k-2\alpha\beta_1-(1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_k-2\alpha\beta-(1-\beta)}\{(1+\beta)\lambda_k-2\alpha\beta-(1-\beta)\}|f_k| \le$$
$$\le (1+\beta_1)\delta + \max_{k\ge1}\left\{\frac{(1+\beta_1)\lambda_k-2\alpha\beta_1-(1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_k-2\alpha\beta-(1-\beta)}\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\{(1+\beta)\lambda_k-2\alpha\beta-(1-\beta)\}|f_k| \le$$

$$\le (1+\beta_1)\delta + 2A\beta(1-\alpha) \le$$
$$\le 2\beta_1(1-\alpha),$$

i.e., by Lemma 1 $G \in PS_{\alpha,\beta_1}$.

Now suppose that $G \in SD_0^* \bigcap PS_{\alpha,\beta_1}$. Then in view of inequality (3) we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|g_k - f_k| =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}\{(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)\}|g_k - f_k| \le$$
$$\le \frac{\lambda_1}{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}\sum_{k=1}^{\infty}(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)\}|g_k - f_k| \le$$
$$\le \frac{\lambda_1}{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}\times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\{(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)\}|g_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\{(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)\}|f_k|\right) \le$$
$$\le \frac{\lambda_1}{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}\times$$
$$\times\left(2\beta_1(1-\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\beta_1)\lambda_k - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_k - 2\alpha\beta - (1-\beta)}\{(1+\beta)\lambda_k - 2\alpha\beta - (1-\beta)\}|f_k|\right) \le$$
$$\le \frac{\lambda_1}{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}\left(2\beta_1(1-\alpha) + 2\beta(1-\alpha)\frac{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_1 - 2\alpha\beta - (1-\beta)}\right) =$$
$$= \delta,$$

i.e., $G \in O_{1,\delta}^*(F)$ with such δ. The proof of Theorem 3 is complete. □

Using Lemma 2 and the remark in the proof of Theorem 1, we can prove also the following statement.

Proposition 2. *Let $0 \le \alpha < 1$, $0 < \beta < \beta_1 \le 1$ and $F \in SD_0^* \bigcap PC_{\alpha,\beta}$. If $G \in O_{2,\delta}^*(F)$ with $\delta = \dfrac{2(1-\alpha)(\beta_1 - A\beta)}{1+\beta_1}$, where*

$$A = \frac{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_1 - 2\alpha\beta - (1-\beta)},$$

then $G \in PC_{\alpha,\beta_1}$. On the contrary, if $G \in SD_0^* \bigcap PC_{\alpha,\beta_1}$ then $G \in O_{2,\delta}^*(F)$ with δ specified in (5).

References

1. A. W. Goodman, *Univalent functions and nonanalytic curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 598–601. DOI: 10.1090/S0002-9939-1957-0086879-9
2. S. Ruscheweyh, *Neighborhoods of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), no. 4, 521–527. DOI: 10.1090/S0002-9939-1981-0601721-6

3. R. Fournier, *A note on neighborhoods of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 1, 117–121. DOI: 10.1090/S0002-9939-1983-0677245-9
4. H. Silverman, *Neighborhoods of a class of analytic functions*, Far East J. Math. Sci. **3** (1995), no. 2, 165–169.
5. O. Altintas, *Neighborhoods of certain analytic functions with negative coefficients*, Int. J. Math. Math. Sci. **19** (1996), no. 4, 797-800. DOI: 10.1155/S016117129600110X
6. O. Altintas, O. Ozkan, and H. M. Srivastava, *Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients*, Applied Math. Lett. **13** (2000), no. 3, 63–67. DOI: 10.1016/S0893-9659(99)00187-1
7. B. A. Frasin and M. Daras, *Integral means and neighborhoods for analytic functions with negative coefficients*, Soochow J. Math. **30** (2004), no. 2, 217–223.
8. G. Murugusundaramoorthy and H. M. Srivastava, *Neighborhoods of certain classes of analytic functions of complex order*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **5** (2004), no. 2, Article 24.
9. M. N. Pascu and N. R. Pascu, *Neighborhoods of univalent functions*, Bull. Aust. Math. Soc. **83** (2011), no. 2, 210–219. DOI: 10.1017/S0004972710000468
10. О. М. Головата, О. М. Мулява, М. М. Шеремета, *Псевдозіркові, псевдоопуклі та близькі до псевдоопуклих ряди Діріхле, які задовольняють диференціальні рівняння з експоненціальними коефіцієнтами*, Мат. методи фіз.-мех. поля **61** (2018), no. 1, 57–70; **English version:** O. M. Holovata, O. M. Mulyava, and M. M. Sheremeta, *Pseudostarlike, pseudoconvex and close-to-pseudoconvex Dirichlet series satisfying differential equations with exponential coefficients*, J. Math. Sci. **249**(2020), no. 3, 369–388. DOI: 10.1007/s10958-020-04948-1
11. M. M. Sheremeta, *Geometric properties of analytic solution of differential equations*, Publisher I. E. Chyzhykov, Lviv, 2019.
12. M. M. Sheremeta, *Pseudostarlike and pseudoconvex Dirichlet series of the order α and the type β*, Mat. Stud. **54** (2020), no. 1, 23–31. DOI: 10.30970/ms.54.1.23-31

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 18.05.2021

ОКОЛИ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, м. Львів
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com

Для абсолютно збіжного у півплощині $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ ряду Діріхле $F(s) = e^s + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}$ множина $O_{j,\delta}(F)$ таких рядів Діріхле $G(s) = e^s + \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^j |g_k - f_k| \le \delta$, називається околом функції F. Доведено, що кожна функція G з околу $O_{1,1}(E)$ функції $E(s) = e^s$ є псевдозірковою в Π_0, а якщо G є псевдозірковою в Π_0 і $g_k \le 0$ для всіх $k \ge 1$, то $G \in O_{1,1}(E)$. Подібний зв'язок існує між околом $O_{2,1}(E)$ і псевдоопуклими в Π_0 функціями. Досліджено також околи $O_{1,\delta}(F)$ і $O_{2,\delta}(F)$ у випадках, коли F є або псевдозірковою, або псевдоопуклою порядку $\alpha \in [0, 1)$ і типу $\beta \in (0, 1)$. За умов, що $0 \le \alpha < 1$, $0 < \beta < \beta_1 \le 1$, коефіцієнти f_k і g_k від'ємні, а F є псевдозірковою порядку α і типу β, зокрема, доведено таке: якщо $G \in O_{1,\delta}(F)$ з $\delta = \dfrac{2(1-\alpha)(\beta_1 - A\beta)}{1+\beta_1}$, де $A = \dfrac{(1+\beta_1)\lambda_1 - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)}{(1+\beta)\lambda_1 - 2\alpha\beta - (1-\beta)}$, то G псевдозіркова функція порядку α і типу β_1. Навпаки, якщо G є псевдозірковою порядку α і типу β_1, то $G \in O_{1,\delta}(F)$ з
$$\delta = 2\lambda_1(1-\alpha)\left(\frac{\beta_1}{\lambda_1(1+\beta_1) - 2\alpha\beta_1 - (1-\beta_1)} + \frac{\beta}{\lambda_1(1+\beta) - 2\alpha\beta - (1-\beta)}\right).$$

Ключові слова: ряд Діріхле, псевдозірковість, псевдоопуклість, окіл функції.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. C. 72–86
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 72–86
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.072-086

УДК 517.926.4+517.546.1

PROPERTIES OF POLYNOMIAL SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS OF THE SECOND DEGREE

Myroslav SHEREMETA, Yuriy TRUKHAN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com, yurkotrukhan@gmail.com

An analytic univalent in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ function f is said to be convex if $f(\mathbb{D})$ is a convex domain. It is well known that the condition

$$\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0 \qquad (z \in \mathbb{D})$$

is necessary and sufficient for the convexity of f. Function f is said to be close-to-convex if there exists a convex in $\mathbb{D}$ function Φ such that $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z))>0$ ($z \in \mathbb{D}$). Close-to-convex function f has a characteristic property that the complement G of the domain $f(\mathbb{D})$ can be filled with rays which start from ∂G and lie in G. Every close-to-convex in $\mathbb{D}$ function f is univalent in $\mathbb{D}$ and, therefore, $f'(0) \neq 0$.

We indicate conditions on parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 and α_0, α_1, α_2 of the differential equation

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2,$$

under which this equation has a polynomial solution

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} f_n z^n \quad (\deg\, f = p \geq 2)$$

close-to-convex or convex in $\mathbb{D}$ together with all its derivatives $f^{(j)}$ ($1 \leq j \leq p-1$). The results depend on equality or inequality to zero of the parameter γ_2.

For example, it is proved that if $p \geq 3$, $\gamma_2 \neq 0$,

$$\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2 = 0$$

2020 Mathematics Subject Classification: 34M05, 30B10, 30C45

holds, this equation has a polynomial solution

$$f(z) = \alpha_2/\gamma_2 + z + \frac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2+\beta_1} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n,$$

where the coefficients f_n are defined by the equality

$$f_n = \frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1)} f_{n-1} \qquad (3 \le n \le p),$$

such that:
1) if $(11p-14)|\beta_0|/4 + 2|\alpha_0| \le 2 - |\beta_1|$ and $11(p-2)|\beta_0|/4 \le 3 - |\beta_1|$ then f is close-to-convex in $\mathbb{D}$ together with all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \le j \le p-1)$;
2) if $(41p-50)|\beta_0|/8 + 4|\alpha_0| \le 2 - |\beta_1|$ and $33(p-2)|\beta_0|/8 \le 3 - |\beta_1|$ then f is convex in $\mathbb{D}$ together with all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \le j \le p-1)$.
A similar result is obtained in the case $\gamma_2 = 0$.

Key words: linear non-homogeneous differential equation of the second order, polynomial coefficient, polynomial solution, close-to-convex function, convex function.

1. Introduction and auxiliary results

An analytic univalent in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ function

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

is said to be convex if $f(\mathbb{D})$ is a convex domain. It is well known [1, p. 203] (see also [2, p. 8]) that the condition

$$\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0 \qquad (z \in \mathbb{D})$$

is necessary and sufficient for the convexity of f. By W. Kaplan [3] the function f is said to be close-to-convex in $\mathbb{D}$ (see also [1, p. 583], [2, p. 11]) if there exists a convex in $\mathbb{D}$ function Φ such that

$$\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D}).$$

The close-to-convex function f has a characteristic property that the complement G of the domain $f(\mathbb{D})$ can be filled with rays which start from ∂G and lie in G. Every close-to-convex in $\mathbb{D}$ function f is univalent in $\mathbb{D}$ and, therefore, $f'(0) \ne 0$. Hence, it follows that the function f is close-to-convex in $\mathbb{D}$ if and only if the function

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n, \quad g_n = f_n/f_1, \tag{2}$$

is close-to-convex in $\mathbb{D}$. We also remark that function (2) is said to be starlike if $f(\mathbb{D})$ is a starlike domain regarding the origin and the condition

$$\mathrm{Re}\,\{zg'(z)/g(z)\} > 0 \ (z \in \mathbb{D})$$

is necessary and sufficient for the starlikeness of g [2, p. 9]. Clearly, every starlike function is close-to-convex.

S. M. Shah [4] indicated conditions on real parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 of the differential equation

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0,$$

under which there exists an entire transcendental solution (1) such that f and all its derivatives are close-to-convex in $\mathbb{D}$. The investigations are continued in the papers [5–10], but in all of this papers the case of polynomial solutions was not investigated. In the papers [11–14] properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree are investigated. Some results from these papers are published also in monograph [2].

In [15], the equation

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \tag{3}$$

is considered with real parameters and the existence and close-to-convexity of its polynomial solutions are studied. In particular, it is proved that in order that the polynomial

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} f_n z^n, \quad \deg f = p \geq 2, \tag{4}$$

be a solution of the differential equation (3), it is necessary that $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$. Substituting (4) into (3), we get [15]

$$\gamma_2 f_0 = \alpha_2, \quad (\beta_1 + \gamma_2)f_1 = \alpha_1 + p\beta_0 f_0, \quad (2 + 2\beta_1 + \gamma_2)f_2 = \alpha_0 + (p-1)\beta_0 f_1 \tag{5}$$

and for $3 \leq n \leq p$

$$(n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2)f_n = (p - n + 1)\beta_0 f_{n-1}. \tag{6}$$

If we assume that $n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \neq 0$ for all $3 \leq n \leq p$, it allows us to rewrite the equality (6) in the form

$$f_n = \frac{(p - n + 1)\beta_0}{n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2} f_{n-1}, \quad 3 \leq n \leq p, \tag{7}$$

whence it follows that $f_p = 0$, if $\beta_0 = 0$. Therefore, further we assume also that $\beta_0 \neq 0$.

In the case of real parameters for the study of the close-to convexity of the polynomial

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{p} g_n z^n, \tag{8}$$

Alexander's criterion [16, 17] was used. Here we are going to consider a case of complex parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2, α_0, α_1, α_2 and we will use the following lemma [16, 17].

Lemma 1. *If* $\sum_{n=2}^{p} n|g_n| \leq 1$ *then polynomial* (8) *is a starlike function and if* $\sum_{n=2}^{p} n^2|g_n| \leq 1$ *then polynomial* (8) *is a convex function.*

Using Lemma 1 we prove the following statement.

Lemma 2. *Let $\xi_n \neq 0$, $\xi_n = g_n/g_{n-1}$ for $2 \leq n \leq p$ and*

$$\xi = \max\left\{\frac{n}{n-1}|\xi_n| : 3 \leq n \leq p\right\}.$$

If $2|g_2| \leq 1 - \xi$ then polynomial (8) is a starlike function and if $4|g_2| \leq 1 - 3\xi/2$ then polynomial (8) is a convex function.

Proof. Since $g_n = \xi_n g_{n-1}$ for $2 \leq n \leq p$, we have

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{p} n|g_n| &= \sum_{n=2}^{p} n|\xi_n||g_{n-1}| = \\ &= \sum_{n=1}^{p-1}(n+1)|\xi_{n+1}||g_n| = \\ &= 2|g_2| + \sum_{n=2}^{p}\frac{n+1}{n}|\xi_{n+1}|n|g_n|, \qquad \xi_{p+1} = 0,\end{aligned}$$

i.e., $\sum_{n=2}^{p}\left(1 - \frac{n+1}{n}|\xi_{n+1}|\right)n|g_n| = 2|g_2|$. Since $\xi_{p+1} = 0$ and $\frac{n+1}{n}|\xi_{n+1}| \leq \xi < 1$ for $2 \leq n \leq p-1$, hence it follows that $(1-\xi)\sum_{n=2}^{p} n|g_n| \leq 2|g_2|$. Therefore, if $2|g_2| \leq 1 - \xi$ then $\sum_{n=2}^{p} n|g_n| \leq 1$ and by Lemma 1 polynomial (8) is a starlike function.

If we put

$$\xi^* = \max\left\{\left(\frac{n}{n-1}\right)^2|\xi_n| : 3 \leq n \leq p\right\}$$

and suppose that $4|g_2| \leq 1 - \xi^*$ then as above we get $(1-\xi^*)\sum_{n=2}^{p} n^2|g_n| \leq 4|g_2|$, i.e., $\sum_{n=2}^{p} n^2|g_n| \leq 1$ and by Lemma 1 polynomial (8) is a convex function. Since $\xi^* \leq 3\xi/2$, the proof of Lemma 2 is complete. □

In view of (5) and (6) it is clear that the existence of convex or close-to-convex solution (4) of differential equation (3) depends on the equality to zero of the parameter γ_2. Therefore, we will consider two cases: $\gamma_2 \neq 0$ and $\gamma_2 = 0$.

2. The case $\gamma_2 \neq 0$

From the first equality (5) it follows that $f_0 = \alpha_2/\gamma_2$, and the second equality (5) implies

$$(\beta_1 + \gamma_2)f_1 = \alpha_1 + p\beta_0\alpha_2/\gamma_2.$$

For the close-to-convexity of f the condition $f_1 \neq 0$ is necessary. This condition is not necessary for the convexity of the function f, but since we are going to use Lemma 2, then we will assume that $f_1 \neq 0$. Therefore, from the last equality it follows that either $\beta_1 + \gamma_2 \neq 0$ and $\alpha_1 + p\beta_0\alpha_2/\gamma_2 \neq 0$ or $\beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1 + p\beta_0\alpha_2/\gamma_2 = 0$.

If $\beta_1+\gamma_2 \neq 0$ and $\alpha_1+p\beta_0\alpha_2/\gamma_2 \neq 0$ then $f_1 = \dfrac{\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}$, and if $2+2\beta_1+\gamma_2 \neq 0$ then from the third equality (5) we obtain

$$f_2 = \frac{(p-1)\beta_0(\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2) + \alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)}.$$

Thus, the desired solution should be

$$f(z) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\alpha_1\gamma_2+p\beta_0\alpha_2}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}z + \frac{(p-1)\beta_0(\alpha_1\gamma_2+p\beta_0\alpha_2)+\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)}z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n \tag{9}$$

where the coefficients f_n satisfy (7). The following theorem is true.

Theorem 1. *Let $p \geq 3$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = 0$, $\beta_1 + \gamma_2 \neq 0$, $\alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2 \neq 0$. Then:*

1) *if*

$$\frac{5p-6}{2}|\beta_0| + 2\left|\frac{\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\alpha_1\gamma_2+p\beta_0\alpha_2}\right| \leq 2 - 2|\beta_1| - |\gamma_2| \tag{10}$$

then differential equation (3) *has polynomial solution* (9) *close-to-convex in* $\mathbb{D}$ *and if* $3(p-2)|\beta_0|/2 \leq 2 - |\beta_1| - |\gamma_2|/3$ *all its derivatives* $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ *are close-to-convex;*

2) *if*

$$\frac{19p-22}{4}|\beta_0| + 4\left|\frac{\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\alpha_1\gamma_2+p\beta_0\alpha_2}\right| \leq 2 - 2|\beta_1| - |\gamma_2| \tag{11}$$

then differential equation (3) *has polynomial solution* (9) *convex in* $\mathbb{D}$ *and if* $11(p-2)|\beta_0|/4 \leq 2 - |\beta_1| - |\gamma_2|/3$ *all its derivatives* $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ *are convex.*

Proof. For polynomial (8) with $g_n = f_n/f_1$ we have

$$g_2 = \frac{(p-1)\beta_0}{2+2\beta_1+\gamma_2} + \frac{\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{(2+2\beta_1+\gamma_2)(\alpha_1\gamma_2+p\beta_0\alpha_2)} = \xi_2 = \xi_2 g_1,$$

and since (10) implies $|2+2\beta_1+\gamma_2| \geq 2 - 2|\beta_1| - |\gamma_2| > 0$, we get

$$|g_2| = |\xi_2| \leq \frac{1}{2-2|\beta_1|-|\gamma_2|}\left((p-1)|\beta_0| + \left|\frac{\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\alpha_1\gamma_2+p\beta_0\alpha_2}\right|\right). \tag{12}$$

For $3 \leq n \leq p$ from (7) we obtain

$$g_n = \frac{f_n}{f_1} = \frac{\xi_n f_{n-1}}{f_1} = \xi_n g_{n-1},$$

where $\xi_n = \dfrac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$ and

$$\frac{n}{n-1}|\xi_n| \leq \frac{(p-n+1)|\beta_0|}{(n-1)(n-|\beta_1|-1-|\gamma_2|/n)} \leq \frac{(p-n+1)|\beta_0|}{(n-1)(2-2|\beta_1|-|\gamma_2|)},$$

i.e.,

$$\xi = \max\left\{\frac{n}{n-1}|\xi_n| : 3 \le n \le p\right\} \le \frac{(p-2)|\beta_0|}{2(2-2|\beta_1|-|\gamma_2|)}. \tag{13}$$

It is easy to check that (10), (12) and (13) imply the inequality $2|g_2| \le 1-\xi$. Therefore, by Lemma 2 the polynomial g is a starlike function and, thus, function (9) is close-to-convex in $\mathbb{D}$.

For $1 \le j \le p-2$ the derivative

$$f^{(j)}(z) = j!f_j + (j+1)!f_{j+1}z + \sum_{n=2}^{p-j}(n+1)(n+2)\dots(n+j)f_{n+j}z^n. \tag{14}$$

is close-to-convex in $\mathbb{D}$ if and only if the function

$$g_j(z) = z + \sum_{n=2}^{p-j} g_{n,j}z^n, \qquad g_{n,j} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+j)f_{n+j}}{(j+1)!f_{j+1}}, \tag{15}$$

is close-to-convex in $\mathbb{D}$. For $1 \le j \le p-2$ and $2 \le n \le p-j$ we have $3 \le n+j \le p$, and in view of (7) and (15) we get

$$\begin{aligned} g_{n,j} =& \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+j)}{(j+1)!f_{j+1}}\frac{(p-n-j+1)\beta_0}{(n+j)(n+j+\beta_1-1)+\gamma_2}f_{n+j-1} = \\ =& \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+j)}{(j+1)!f_{j+1}}\xi_{n+j}\frac{(j+1)!f_{j+1}}{n(n+1)\dots(n+j-1)}g_{n-1,j} = \\ =& \frac{n+j}{n}\xi_{n+j}g_{n-1,j}, \end{aligned}$$

where as above $\xi_n = \dfrac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$. Therefore, to apply Lemma 2, we need to find a condition under which

$$2|g_{2,j}| \le 1 - \max_{3\le n\le p-j}\frac{n}{n-1}\frac{n+j}{n}|\xi_{n+j}| = 1 - \max_{3\le n\le p-j}\frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}|. \tag{16}$$

From (7) and (15) we have

$$\begin{aligned} 2|g_{2,j}| &= 2\frac{3\dots(j+2)|f_{j+2}|}{(j+1)!|f_{j+1}|} = \\ &= 2\frac{j+2}{2}\frac{(p-(j+2)+1)|\beta_0|}{|(j+2)(j+2+\beta_1-1)+\gamma_2|} \le \\ &\le \frac{(p-j-1)|\beta_0|}{j+1-|\beta_1|-|\gamma_2|/(j+2)} \end{aligned} \tag{17}$$

and

$$\begin{aligned} \max_{3\le n\le p-j}\frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}| &\le \max_{3\le n\le p-j}\frac{n+j}{n-1}\frac{(p-n-j+1)|\beta_0|}{(n+j)(n+j-|\beta_1|-1)-|\gamma_2|)} \le \\ &\le \max_{3\le n\le p-j}\frac{1}{n-1}\frac{(p-n-j+1)|\beta_0|}{n+j-|\beta_1|-1-|\gamma_2|/(n+j)} \le \\ &\le \frac{1}{2}\frac{(p-j-1)|\beta_0|}{j+1-|\beta_1|-|\gamma_2|/(j+2)}. \end{aligned} \tag{18}$$

From (17) and (18) it follows that if

$$3(p-j-1)|\beta_0|/2 \le j+1-|\beta_1|-|\gamma_2|/(2+j) \tag{19}$$

for $1 \le j \le p-2$ then (16) holds and by Lemma 2 the derivative $f^{(j)}$ for $1 \le j \le p-2$ is close-to-convex in $\mathbb{D}$.

Finally, we remark that (19) holds for all $1 \le j \le p-2$ if

$$3(p-2)|\beta_0|/2 \le 2-|\beta_1|-|\gamma_2|/3.$$

Since $f^{(p-1)}$ is a linear function and, thus, it is close-to-convex, the first part of Theorem 1 is proved.

If condition (11) holds then from (12) and (13) we obtain the inequality $4|g_2| \le$ $\le 1-3\xi/2$, and by Lemma 2 polynomial (9) is a convex function.

If

$$\frac{11(p-j-1)|\beta_0|}{4} \le j+1-|\beta_1|-|\gamma_2|/(2+j) \tag{20}$$

for some $1 \le j \le p-2$ then (17) and (18) imply

$$4|g_{2,j}| \le 1-\frac{3}{2}\max_{3\le n\le p-j}\frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}|.$$

Therefore, by Lemma 2 function (15) is convex and, thus, function (14) is convex. Finally, we remark that (20) holds for all $1 \le j \le p-2$ if $11(p-2)|\beta_0|/4 \le 2-|\beta_1|-|\gamma_2|/3$. The proof of Theorem 1 is complete. □

Now suppose that $\beta_1+\gamma_2=\alpha_1+p\beta_0\alpha_2/\gamma_2=0$. Then from the second equality (5) it follows that f_1 may be arbitrary. If we choose $f_1=1$ then under the condition $2+\beta_1 \ne 0$ in view of the third equality (5) we get $f_2=\dfrac{\alpha_0+(p-1)\beta_0}{2+\beta_1}$. From (7) under the condition $n+\beta_1 \ne 0$ we obtain

$$f_n=\frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1)}f_{n-1}, \quad 3 \le n \le p. \tag{21}$$

Thus, the desired solution has the form

$$f(z)=\frac{\alpha_2}{\gamma_2}+z+\frac{\alpha_0+(p-1)\beta_0}{2+\beta_1}z^2+\sum_{n=3}^{p} f_n z^n, \tag{22}$$

where the coefficients f_n satisfy (21), and we will come to such a theorem.

Theorem 2. *Let $p \ge 3$, $\gamma_2 \ne 0$, $\gamma_0=p\beta_0+\gamma_1=\beta_1+\gamma_2=\alpha_1\gamma_2+p\beta_0\alpha_2=0$. Then:*

1) *if*

$$\frac{11p-14}{4}|\beta_0|+2|\alpha_0| \le 2-|\beta_1| \tag{23}$$

then differential equation (3) *has polynomial solution* (22) *close-to-convex in* $\mathbb{D}$ *and if* $9(p-2)|\beta_0|/4 \le 3-|\beta_1|$ *all its derivatives* $f^{(j)}$ $(1 \le j \le p-1)$ *are close-to-convex;*

2) *if*

$$\frac{41p-50}{8}|\beta_0| + 4|\alpha_0| \le 2 - |\beta_1| \tag{24}$$

then differential equation (3) *has polynomial solution* (22) *convex in* $\mathbb{D}$ *and if* $33(p-2)|\beta_0|/8 \le 3 - |\beta_1|$ *all its derivatives* $f^{(j)}$ $(1 \le j \le p-1)$ *are convex.*

Proof. For polynomial (8) with $g_n = f_n$ for $1 \le n \le p$ now we have

$$|g_2| = \left|\frac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2+\beta_1}\right| \le \frac{|\alpha_0| + (p-1)|\beta_0|}{2-|\beta_1|} \tag{25}$$

and in view of (21)

$$\begin{aligned} \xi &\le \max_{3\le n\le p} \frac{n}{n-1}\frac{(p-n+1)|\beta_0|}{(n-1)(n-|\beta_1|)} \le \\ &\le \frac{3(p-2)|\beta_0|}{4(3-|\beta_1|)} < \\ &< \frac{3(p-2)|\beta_0|}{4(2-|\beta_1|)}. \end{aligned} \tag{26}$$

From (23), (25) and (26) it follows that $2|g_2| \le 1-\xi$. Then by Lemma 2 the function g is starlike and, thus, function (22) is close-to-convex.

If (24) holds then using (25), (26) and Lemma 2 similarly we prove the convexity of polynomial (22).

Let us turn to the derivative $f^{(j)}$, $1 \le j \le p-2$. For the coefficients $g_{n,j}$ of function (15) now in view of (21) we have

$$\begin{aligned} g_{n,j} &= \frac{n+j}{n}\xi_{n+j}g_{n-1,j} = \\ &= \frac{n+j}{n}\frac{(p-n-j+1)\beta_0}{(n+j-1)(n+j+\beta_1)}g_{n-1,j}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$|g_{2,j}| \le \frac{2+j}{2}\frac{(p-j-1)|\beta_0|}{(j+1)(j+2-|\beta_1|)} \tag{27}$$

and

$$\begin{aligned} \max_{3\le n\le p}\frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}| &\le \max_{3\le n\le p}\frac{n+j}{n-1}\frac{(p-n-j+1)|\beta_0|}{(n+j-1)(n+j-|\beta_1|)} \le \\ &\le \frac{1}{2}\frac{(2+j)(p-j-1)|\beta_0|}{(j+1)(2+j-|\beta_1|)}. \end{aligned} \tag{28}$$

If for some $1 \le j \le p-2$

$$3(2+j)(p-j-1)|\beta_0|/2 \le (j+1)(j+2-|\beta_1|) \tag{29}$$

then (27) and (28) imply

$$2|g_{2,j}| \le 1 - \max_{3\le n\le p}\frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}|$$

and by Lemma 2 $f^{(j)}$ is close-to-convex in $\mathbb{D}$.

If for some $1 \le j \le p-2$

$$11(2+j)(p-j-1)|\beta_0|/4 \le (j+1)(j+2-|\beta_1|) \tag{30}$$

then (27) and (28) imply

$$4|g_{2,j}| \le 1 - \frac{3}{2} \max_{3\le n\le p} \frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}|$$

and by Lemma 2 $f^{(j)}$ is convex in $\mathbb{D}$.

Finally, we remark that (29) holds for all $1 \le j \le p-2$ if $9(p-2)|\beta_0|/4 \le 3-|\beta_1|$, and (30) holds for all $1 \le j \le p-2$ if $33(p-2)|\beta_0|/8 \le 3-|\beta_1|$. Theorem 2 is proved. □

3. The case $\gamma_2 = 0$

From first equality (5) it follows that $\alpha_2 = 0$ and f_0 may be arbitrary. If we choose $f_0 = 0$ then from (5) and (7) we get

$$\beta_1 f_1 = \alpha_1, \qquad 2(1+\beta_1)f_2 = \alpha_0 + (p-1)\beta_0 f_1 \tag{31}$$

and

$$f_n = \frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)} f_{n-1}, \qquad 3 \le n \le p. \tag{32}$$

Since we consider $f_1 \ne 0$, from the first equality (31) it follows that either $\beta_1 \ne 0$ and $\alpha_1 \ne 0$ or $\beta_1 = \alpha_1 = 0$. If $\beta_1 \ne 0$ and $\alpha_1 \ne 0$ then $f_1 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ and

$$f_2 = \frac{\alpha_0\beta_1 + (p-1)\alpha_1\beta_0}{2\beta_1(1+\beta_1)}.$$

Thus, the desired solution has the form

$$f(z) = \frac{\alpha_1}{\beta_1} z + \frac{\alpha_0\beta_1 + (p-1)\alpha_1\beta_0}{2\beta_1(1+\beta_1)} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n, \tag{33}$$

where the coefficients f_n satisfy (32), and we will come to the following theorem.

Theorem 3. *Let $p \ge 3$, $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + p\beta_0 = 0$, $\beta_1 \ne 0$ and $\alpha_1 \ne 0$. Then:*

1) *if*

$$\frac{3p-4}{2}|\beta_0| + \left|\frac{\alpha_0\beta_1}{\alpha_1}\right| \le 1 - |\beta_1| \tag{34}$$

then differential equation (3) has polynomial solution (33) close-to-convex in $\mathbb{D}$ and if $3(p-2)|\beta_0|/2 \le 2-|\beta_1|$ all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \le j \le p-1)$ are close-to-convex;

2) *if*

$$\frac{11p-14}{4}|\beta_0| + 2\left|\frac{\alpha_0\beta_1}{\alpha_1}\right| \le 1 - |\beta_1| \tag{35}$$

then differential equation (3) has polynomial solution (33) convex in $\mathbb{D}$ and if $11(p-2)|\beta_0|/4 \le 2-|\beta_1|$ all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \le j \le p-1)$ are convex.

The proof of this theorem is the same as proofs those of the previous theorems. We remark only that now $|g_2| \leq \dfrac{|\alpha_0||\beta_1| + (p-1)|\alpha_1||\beta_0|}{2|\alpha_1|(1-|\beta_1|)}$, $\xi_n = \dfrac{(p-n+1)\beta_0}{n(n+\beta_1-1)}$ and $\xi \leq \dfrac{(p-2)|\beta_0|}{2(1-|\beta_1|)}$, whence it follows that $2|g_2| \leq 1-\xi$ if (34) holds and $4|g_2| \leq 1-3\xi/2$ if (35) holds. For some $1 \leq j \leq p-1$ as above we have $g_{n,j} = \dfrac{n+j}{n}\xi_{n+j}g_{n-1,j}$, where now

$$\xi_{n+j} = \frac{(p-n-j+1)\beta_0}{(n+j)(n+j-\beta_1-1)},$$

whence $|g_{2,j}| \leq \dfrac{(p-j-1)|\beta_0|}{2(j+1-|\beta_1|)}$ and

$$\xi := \max_{3\leq n\leq p} \frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}| \leq \frac{(p-j-1)|\beta_0|}{2(j+1-|\beta_1|)}.$$

Therefore, $2|g_{2,j}| \leq 1-\xi$ if $3(p-j-1)|\beta_0|/2 \leq j+1-|\beta_1|$ and $4|g_{2,j}| \leq 1-3\xi/2$ if $11(p-j-1)|\beta_0|/4 \leq j+1-|\beta_1|$. It remains to notice that the last conditions hold for all $1 \leq j \leq p-1$ provided $3(p-2)|\beta_0|/2 \leq 2-|\beta_1|$ and $11(p-2)|\beta_0|/4 \leq$ $\leq 2-|\beta_1|$ respectively and use Lemma 2.

If $\beta_1 = \alpha_1 = 0$ from (31) it follows that f_1 may be arbitrary. If we choose $f_1 = 1$ then $f_2 = \dfrac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2}$ and

$$f_n = \frac{(p-n+1)\beta_0}{n(n-1)} f_{n-1}, \quad 3 \leq n \leq p. \tag{36}$$

Therefore, the desired solution has the form

$$f(z) = z + \frac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n, \tag{37}$$

where the coefficients f_n satisfy (36), and we will come to the following theorem.

Theorem 4. *Let $p \geq 3$, $\gamma_2 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 + p\beta_0 = \beta_1 = \alpha_1 = 0$. Then:*

1) *if $(5p-6)|\beta_0|/4 + |\alpha_0| \leq 1$ then differential equation (3) has polynomial solution (37) close-to-convex in $\mathbb{D}$ and if $3(p-2)|\beta_0| \leq 4$ all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ are close-to-convex in $\mathbb{D}$;*
2) *if $(19p-22)|\beta_0|/8 + 2|\alpha_0| \leq 1$ then differential equation (3) has polynomial solution (37) convex in $\mathbb{D}$ and if $11(p-2)|\beta_0| \leq 8$ all its derivatives $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$ are convex in $\mathbb{D}$.*

Proof. Choosing $g_n = f_n$, we have $2|g_2| \leq (p-1)|\beta_0| + |\alpha_0|$ and $\xi \leq (p-2)|\beta_0|/4$. Therefore, in view of the condition $(5p-6)|\beta_0|/4 + |\alpha_0| \leq 1$ we get $2|g_2| \leq 1-\xi$ and, thus, polynomial (37) is starlike. Also in view on the condition $(19p-22)|\beta_0|/8+2|\alpha_0| \leq 1$ we get $4|g_2| \leq 1-3\xi/2$, i. e. polynomial (37) is convex.

Similarly, for some $1 \leq j \leq p-1$ we have $2|g_{2,j}| \leq \dfrac{(p-j-1)|\beta_0|}{j+1}$ and

$$\xi = \max_{3\leq n\leq p} \frac{n+j}{n-1}|\xi_{n+j}| \leq \frac{(p-j-1)|\beta_0|}{2(j+1)},$$

whence $2|g_{2,j}|\le 1-\xi$ if $3(p-j-1)|\beta_0|\le 2(j+1)$ and $4|g_{2,j}|\le 1-3\xi/2$ if $11(p-j-1)|\beta_0|\le 4(j+1)$. Since the last conditions hold if $3(p-2)|\beta_0|\le 4$ and $11(p-2)|\beta_0|\le 8$ respectively, Theorem 4 is proved. □

4. Additions

First of all, we note that the condition $p\ge 3$ is not essential in Theorems 1 - 4. Repeating their proofs, one can prove for $p=2$ the following statements.

Proposition 1. *Let $\gamma_2\ne 0$, $\gamma_0=2\beta_0+\gamma_1=0$, $\beta_1+\gamma_2\ne 0$, $\alpha_1\gamma_2+2\beta_0\alpha_2\ne 0$. Then differential equation* (3) *has a polynomial solution*

$$f(z)=\frac{\alpha_2}{\gamma_2}+\frac{\alpha_1\gamma_2+2\beta_0\alpha_2}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}z+\frac{\beta_0(\alpha_1\gamma_2+2\beta_0\alpha_2)+\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)(2+2\beta_1+\gamma_2)}z^2$$

which is close-to-convex if the condition

$$2|\beta_0|+2\left|\frac{\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\alpha_1\gamma_2+2\beta_0\alpha_2}\right|\le 2-2|\beta_1|-|\gamma_2|$$

holds, and convex in $\mathbb{D}$ if the condition

$$4\beta_0|+4\left|\frac{\alpha_0\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\alpha_1\gamma_2+2\beta_0\alpha_2}\right|\le 2-2|\beta_1|-|\gamma_2|$$

holds.

Proposition 2. *Let $\gamma_2\ne 0$, $\gamma_0=2\beta_0+\gamma_1=\beta_1+\gamma_2=\alpha_1\gamma_2+2\beta_0\alpha_2=0$. Then differential equation* (3) *has a polynomial solution*

$$f(z)=\frac{\alpha_2}{\gamma_2}+z+\frac{\alpha_0+\beta_0}{2+\beta_1}z^2$$

which is close-to-convex if the condition $2|\beta_0|+2|\alpha_0|\le 2-|\beta_1|$ holds, and convex in $\mathbb{D}$ if the condition $4|\beta_0|+4|\alpha_0|\le 2-|\beta_1|$ holds.

Proposition 3. *Let $\gamma_2=\alpha_2=\gamma_0=\gamma_1+2\beta_0=$, $\beta_1\ne 0$ and $\alpha_1\ne 0$. Then differential equation* (3) *has a polynomial solution*

$$f(z)=\frac{\alpha_1}{\beta_1}z+\frac{\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0}{2\beta_1(1+\beta_1)}z^2$$

which is starlike if the condition $|\beta_0|+|\alpha_0\beta_1/\alpha_1|\le 1-|\beta_1|$ holds, and convex in $\mathbb{D}$ if the condition $2|\beta_0|+2|\alpha_0\beta_1/\alpha_1|\le 1-|\beta_1|$ holds.

Proposition 4. *Let $\gamma_2=\alpha_2=\gamma_0=\gamma_1+2\beta_0=\beta_1=\alpha_1=0$. Then differential equation* (3) *has a polynomial solution*

$$f(z)=z+\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}z^2$$

which is starlike if the condition $|\beta_0|+|\alpha_0|\le 1$ holds, and convex in $\mathbb{D}$ if the condition $2|\beta_0|+2|\alpha_0|\le 1$ holds.

Recall that before obtaining the above results we demanded the fulfillment of conditions $n(n+\beta_1-1)+\gamma_2\neq 0$ for all $3\le n\le p$ and $\beta_0\neq 0$. Here we suppose that $\beta_0=0$. Then the equality $\gamma_0=p\beta_0+\gamma_1=0$ implies $\gamma_0=\gamma_1=0$, and thus, from (5) and (7) we get

$$\gamma_2 f_0=\alpha_2,\qquad (\beta_1+\gamma_2)f_1=\alpha_1,\qquad (2+2\beta_1+\gamma_2)f_2=\alpha_0 \tag{38}$$

and for $3\le n\le p$

$$(n(n+\beta_1-1)+\gamma_2)f_n=0. \tag{39}$$

From (39) it follows that if $p(p+\beta_1-1)+\gamma_2=0$ then $f_p\neq 0$ may be arbitrary. Two cases are possible:

1) $n(n+\beta_1-1)+\gamma_2\neq 0$ for all $3\le n<p$ or $p=3$; and
2) there is only one $3\le p_1<p$ such that $p_1(p_1+\beta_1-1)+\gamma_2=0$.

In the first case we have

$$f(z)=f_0+f_1z+f_2z^2+f_pz^p$$

for $p\ge 3$. If $\gamma_2\neq 0$ from (38) we obtain

$$f_0=\frac{\alpha_2}{\gamma_2},\qquad f_1=\frac{\alpha_1}{\beta_1+\gamma_2},\qquad f_2=\frac{\alpha_0}{2+2\beta_1+\gamma_2}. \tag{40}$$

To use Lemma 1, we need to choose $f_p\neq 0$ so that $2|f_2/f_1|+p|f_p/f_1|\le 1$, i. e.

$$2|\alpha_0/(2+2\beta_1+\gamma_2)|+p|f_p|\le|\alpha_1/(\beta_1+\gamma_2)| \tag{41}$$

(clearly, this is possible if $2|\alpha_0/(2+2\beta_1+\gamma_2)|<|\alpha_1/(\beta_1+\gamma_2)|$). If $\gamma_2=0$ then $\alpha_2=0$ and coefficient f_0 can be chosen equal to zero. Then

$$f_0=0,\qquad f_1=\alpha_1/\beta_1,\qquad f_2=\alpha_0/(2+2\beta_1) \tag{42}$$

and we need to choose $f_p\neq 0$ so that

$$|\alpha_0/(1+\beta_1)|+p|f_p|\le|\alpha_1/\beta_1| \tag{43}$$

(this is possible if $|\alpha_0/(1+\beta_1)|<|\alpha_1/\beta_1|$).

Thus, the following statement is valid.

Proposition 5. *Let $\beta_0=\gamma_0=\gamma_1=0$, and* (39) *holds only for $n=p\ge 3$. Then differential equation* (3) *has a polynomial solution*

$$f(z)=f_0+f_1z+f_2z^2+f_pz^p$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$ provided either $\gamma_2\neq 0$, $\alpha_1\neq 0$ and the coefficients are defined by (40) *and* (41) *or $\gamma_2=0$, $\alpha_1\neq 0$ and the coefficients are defined by* (42) *and* (43).

Remark 1. If in Proposition 5 conditions (41) and (43) are replaced by the conditions

$$4|\alpha_0/(2+2\beta_1+\gamma_2)|+p^2|f_p|\le|\alpha_1/(\beta_1+\gamma_2)|$$

and

$$2|\alpha_0/(1+\beta_1)|+p^2|f_p|\le|\alpha_1/\beta_1|$$

respectively then close-to-convexity should be replaced by convexity.

If $p > 3$, $p(p+\beta_1-1)+\gamma_2 = 0$ and $p_1(p_1+\beta_1-1)+\gamma_2 = 0$ for some $3 \le p_1 < p$ then if $\gamma_2 \ne 0$ from (38) we obtain (40) and we choose $f_{p_1} \ne 0$, $f_p \ne 0$ so that

$$2|\alpha_0/(2+2\beta_1+\gamma_2)| + p_1|f_{p_1}| + p|f_p| \le |\alpha_1/(\beta_1+\gamma_2)|. \tag{44}$$

If $\gamma_2 = 0$ then from (38) we obtain (42) and we choose $f_{p_1} \ne 0$, $f_p \ne 0$ so that

$$|\alpha_0/(1+\beta_1)| + p_1|f_{p_1}| + p|f_p| \le |\alpha_1/\beta_1|. \tag{45}$$

Proposition 6. *Let $\beta_0 = \gamma_0 = \gamma_1 = 0$, and* (39) *holds for $n = p_1$ and $n = p \ge 4$, $3 \le p_1 < p$. Then differential equation* (3) *has a polynomial solution*

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_{p_1} z^{p_1} + f_p z^p$$

close-to-convex in $\mathbb{D}$ provided either $\gamma_2 \ne 0$, $\alpha_1 \ne 0$ and the coefficients are defined by (40) *and* (44) *or $\gamma_2 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \ne 0$ and the coefficients are defined by* (42) *and* (45).

Remark 2. If in Proposition 6 conditions (44) and (45) replaced by the conditions

$$4|\alpha_0/(2+2\beta_1+\gamma_2)| + p_1^2|f_{p_1}| + p^2|f_p| \le |\alpha_1/(\beta_1+\gamma_2)|$$

and

$$2|\alpha_0/(1+\beta_1)| + p_1^2|f_{p_1}| + p^2|f_p| \le |\alpha_1/\beta_1|$$

respectively then close-to-convexity should be replaced by convexity.

References

1. G. M. Golusin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, 1969.
2. M. M. Sheremeta, *Geometric properties of analytic solutions of differential equations*, Publisher I. E. Chyzhykov, Lviv, 2019.
3. W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J. **1** (1952), no. 2, 169–185. DOI: 10.1307/mmj/1028988895
4. S. M. Shah, *Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II*, J. Math. Anal. Appl. **142** (1989), no. 2, 422–430. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90011-5
5. Z. M. Sheremeta, *Close-to-convexity of entire solutions of a differential equation*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **42** (1999), no. 3, 31–35 (in Ukrainian).
6. З. М. Шеремета, *О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **36** (2000), no. 8, 1045–1050; **English version:** Z. M. Sheremeta, *The properties of entire solutions of one differential equation*, Differ. Equ. **36** (2000), no. 8, 1155–1161. DOI: 10.1007/BF02754183
7. Z. M. Sheremeta, *On entire solutions of a differential equation*, Mat. Stud. **14** (2000), no. 1, 54–58.
8. Z. M. Sheremeta, *On the close-to-convexity of entire solutions of a differential equation*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **58** (2000), 54–56 (in Ukrainian).
9. З. М. Шеремета, М. Н. Шеремета, *Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **38** (2002), no. 4, 477—481; **English version:** Z. M. Sheremeta and M. N. Sheremeta, *Closeness to convexity for entire solutions of a differential equation*, Differ. Equ. **38** (2002), no. 4, 496—501. DOI: 10.1023/A:1016355531151
10. Z. M. Sheremeta and M. M. Sheremeta, *Convexity of entire solutions of one differential equation*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya **47** (2004), no. 2, 186–191 (in Ukrainian).

11. Ya. S. Mahola and M. M. Sheremeta, *Properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree*, Mat. Stud. **30** (2008), no. 2, 153–162.
12. Ya. S. Mahola and M. M. Sheremeta, *Close-to-convexity of entire solution of a linear differential equation with polynomial coefficients*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **70** (2009), 122–127 (in Ukrainian).
13. Я. С. Магола, М. М. Шеремета, *Про властивості цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами*, Мат. методи фіз.-мех. поля **53** (2010), no. 4, 62–74; **English version:** Ya. S. Magola and M. M. Sheremeta, *On properties of entire solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, J. Math. Sci. (New York) **181** (2012), no. 3, 366–382. DOI: 10.1007/s10958-012-0691-9
14. Ya. S. Mahola, *On entire solutions with two-member reccurent formula for Taylor coefficients of linear differential equation*, Mat. Stud. **36** (2011), no. 2, 133–141.
15. M. M. Sheremeta and Yu. S. Trukhan, *Close-to-convexity of polynomial solutions of a differential equation of the second order with polynomial coefficients of the second degree*, Visnyk L'viv Univ. Ser. Mekh.-Mat. **90** (2020), 92–104.
DOI: 10.30970/vmm.2020.90.092-104
16. J. F. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. Math. (2) **17** (1915), no. 1, 12–22. DOI: 10.2307/2007212.
17. A. W. Goodman, *Univalent function*, Vol. **II**, Mariner Publishing Co., 1983.

Стаття: надійшла до редколегії 31.01.2021
прийнята до друку 18.05.2021

ВЛАСТИВОСТІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

Мирослав ШЕРЕМЕТА, Юрій ТРУХАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, м. Львів
e-mail: m.m.sheremeta@gmail.com, yurkotrukhan@gmail.com

Аналітична однолиста в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ - опукла область. Добре відомо, що умова

$$\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0 \qquad (z \in \mathbb{D})$$

є необхідною і достатньою для опуклості f. Функція f називається близькою до опуклої, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що

$$\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0 \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Близька до опуклої функція f характеризується тим, що доповнення G до області $f(\mathbb{D})$ можна покрити променями, які виходять з ∂G і лежать в G. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f є однолистою в $\mathbb{D}$ і тому

$f'(0) \neq 0$.
Знайдено умови на параметри β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 і α_0, α_1, α_2 диференціального рівняння

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2,$$

за яких це рівняння має поліноміальний розв'язок

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} f_n z^n \qquad (\deg f = p \geq 2),$$

близький до опуклого або опуклий в $\mathbb{D}$ разом з усіма його похідними $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$. Результати залежать від рівності чи нерівності нулеві параметра γ_2.
Наприклад, доведено, що за умов $p \geq 3$, $\gamma_2 \neq 0$,

$$\gamma_0 = p\beta_0 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_2 = \alpha_1\gamma_2 + p\beta_0\alpha_2 = 0.$$

це рівняння має поліноміальний розв'язок

$$f(z) = \alpha_2/\gamma_2 + z + \frac{\alpha_0 + (p-1)\beta_0}{2+\beta_1} z^2 + \sum_{n=3}^{p} f_n z^n,$$

де коефіцієнти f_n визначаються рівністю

$$f_n = \frac{(p-n+1)\beta_0}{(n-1)(n+\beta_1)} f_{n-1} \qquad (3 \leq n \leq p),$$

такий що:
1) якщо $(11p-14)|\beta_0|/4 + 2|\alpha_0| \leq 2 - |\beta_1|$ і $11(p-2)|\beta_0|/4 \leq 3 - |\beta_1|$, то f є близьким до опуклого в $\mathbb{D}$ разом з усіма його похідними $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$;
2) якщо $(73p-82)|\beta_0|/16 + 4|\alpha_0| \leq 2 - |\beta_1|$ і $33(p-2)|\beta_0|/8 \leq 3 - |\beta_1|$, то f є опуклим в $\mathbb{D}$ разом з усіма його похідними $f^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p-1)$.
Подібний результат отримано й у випадку $\gamma_2 = 0$.

Ключові слова: лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, поліноміальні коефіцієнти, поліноміальний розв'язок, близька до опуклої функція, опукла функція.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 87–98
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 87–98
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.087-098

УДК 517.95, 511.2

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТИПУ ЕЙЛЕРА

Володимир ІЛЬКІВ, Ярослав СЛОНЬОВСЬКИЙ

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Степана Бандери, 12, 79000, м. Львів
e-mail: yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

Розглянуто двоточкову задачу для рівнянь із частинними похідними другого порядку з коефіцієнтами залежними лише від часової змінної (рівняння типу Ейлера). Така задача некоректна, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Визначено достатні умови існування та єдиності розв'язку, які отримано на підставі оцінок знизу малих знаменників.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, двоточкова задача, проблема малих знаменників, некоректні задачі.

1. Вступ

Двоточкові крайові задачі для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними вивчали у багатьох працях (див., наприклад, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]), оскільки такі задачі є моделями багатьох фізичних процесів. Зокрема, у працях [1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] вивчено двоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними на торі. Дослідження розв'язності цих задач пов'язане з проблемою малих знаменників, для оцінок знизу яких використано метричний підхід [8] і результати метричної теорії чисел. У [4, 5, 6] застосовано диференціально-символьний метод та апарат алгебри псевдодиференціальних операторів для побудови у необмежених областях розв'язків двоточкових задач для рівнянь із частинними похідними.

Ця праця є продовженням досліджень, розпочатих раніше у [15], на випадок рівнянь зі змінними коефіцієнтами типу Ейлера. У ній визначено умови розв'язності двоточкової задачі за змінною t у класах функцій, періодичних за x, для рівнянь,

---

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35M12

коефіцієнти яких є многочленами за t. Уперше для рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, утворених із коефіцієнтів рівняння. Цей результат доповнює результат праці [15], де отримано умови коректності двоточкової задачі для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із вузлів інтерполяції.

В області $[t^-, t^+] \times \Omega_{2\pi}^p$, де $\Omega_{2\pi}^p$ — p-вимірний тор, $p \in \mathbb{N}$, $0 < t^- < t^+ < +\infty$, розглядається задача

$$\big[t^2\partial_t^2 + ta(\partial_x)\partial_t + b(\partial_x)\big]u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega_{2\pi}^p, \tag{1}$$

де

$$a(\partial_x) = \sum_{|s|\le 1} a_s \partial_x^s, \qquad b(\partial_x) = \sum_{|s|\le 2} b_s \partial_x^s, \tag{2}$$

a_s, b_s — комплексні числа, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1}\cdots\partial_{x_p}^{s_p}$, $d_{x_r} = \partial/\partial x_r$, $x = (x_1,\dots,x_p)$, $s = (s_1,\dots,s_p)$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$.

Розв'язок рівняння (1) заданий у два моменти часу t_0, t_1, де $0 < t_0 < t_1 = t_0\tau$, тобто умовами

$$u(t_0,x) = \varphi_0(x), \quad u(t_1,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in \Omega_{2\pi}^p. \tag{3}$$

Знайдемо розв'язок задачі (1), (3) за допомогою відокремлення змінної x, використовуючи ряди Фур'є

$$\varphi_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{0k} e^{ikx}, \qquad \varphi_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{1k} e^{ikx}.$$

Згідно з рівнянням (1) звичайне диференціальне рівняння з векторним параметром $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$ має вигляд рівняння Ейлера

$$\big[t^2 d_t^2 + ta(ik)d_t + b(ik)\big]u_k(t) = 0, \qquad d_t = d/dt, \tag{4}$$

а розв'язок рівняння (1) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{ikx}, \qquad kx = k_1x_1 + \dots + k_px_p. \tag{5}$$

Введемо простори $\Phi_{q,g}$ і $U_{q,G}$ з нормами

$$\|\varphi\|_{q,g}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q} g^{2\tilde{k}} |\varphi_k|^2, \qquad \|u\|_{q,G} = \sum_{r=0}^{2} \max_{t\in[t^-,t^+]} \|t^r\partial_t^r u(t,\cdot)\|_{q-r,G(t)},$$

де g і G — додатне число і додатна функція, $q \in \mathbb{R}$.

2. Побудова розв'язку задачі

Позначимо $a = a(ik)$, $b = b(ik)$, а корені характеристичного (квадратного) рівняння

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0 \tag{6}$$

через $\lambda_1 = \lambda_1(k)$, $\lambda_2 = \lambda_2(k)$. Ці корені мають таке зображення:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - a \mp \sqrt{D}}{2}, \quad D = (a-1)^2 - 4b, \tag{7}$$

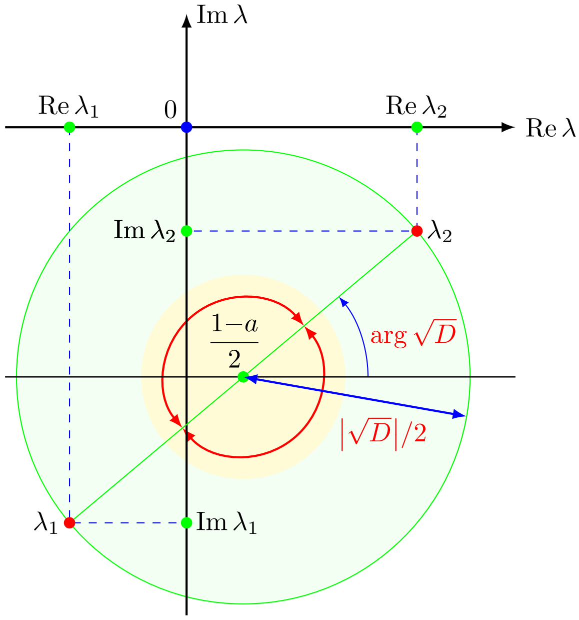


Рис. 1. Геометрична інтерпретація коренів

де аргумент $\arg\sqrt{D}$ квадратного кореня з дискримінанта D належить множині $(-\pi/2, \pi/2]$, тому справджується нерівність $\operatorname{Re}\lambda_1 \le \operatorname{Re}\lambda_2$, причому $\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$, якщо $\arg\sqrt{D} \ne \pi/2$.

Якщо дискримінант $D = D(k)$ полінома $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b$ не дорівнює нулю, то рівняння (6) має прості корені, а якщо $D = 0$, то корінь — кратний, зокрема $\lambda_1 = \lambda_2 = (1-a)/2$.

Для дійсних a, b маємо дійсні корені, якщо $D \ge 0$ (зокрема різні, якщо $D > 0$), і пару комплексних, якщо $D < 0$.

Геометрична інтерпретація коренів зображена на рис. 1.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на дві множини $\mathbb{Z}^p = \mathcal{Z}_1 \sqcup \mathcal{Z}_2$, причому для векторів $k \in \mathcal{Z}_2$ корені рівняння (6) є простими, а для векторів $k \in \mathcal{Z}_1$, для яких $D(k) = 0$, корінь — двократний.

Загальний розв'язок рівняння (4) для всіх $t > 0$ зображає формула

$$\begin{aligned} &u_k(t) = t^{\lambda_1}(C_{1k} + C_{2k}\ln t) = t^{(1-a)/2}(C_{1k} + C_{2k}\ln t), \qquad k \in \mathcal{Z}_1, \\ &u_k(t) = C_{1k}t^{\lambda_1} + C_{2k}t^{\lambda_2} = t^{(1-a)/2}(C_{1k}t^{-\sqrt{D}/2} + C_{2k}t^{\sqrt{D}/2}), \qquad k \in \mathcal{Z}_2, \end{aligned} \tag{8}$$

де C_{1k} і C_{2k} — довільні комплексні сталі, а

$$t^{\lambda} = e^{\lambda\ln t} = e^{(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda)\ln t} = e^{\operatorname{Re}\lambda\ln t}(\cos\operatorname{Im}\lambda\ln t + i\sin\operatorname{Im}\lambda\ln t).$$

Функція (5) є розв'язком задачі (1), (3) лише тоді, коли

$$u_k(t_0) = \varphi_{0k}, \qquad u_k(t_1) = \varphi_{1k}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{9}$$

Звідси маємо системи для визначення сталих у формулі (8):

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_1}\ln t_0 \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_1}\ln t_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix}$$

з ненульовими матрицями

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_1}\ln t_0 \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_1}\ln t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \ln t_0 \\ 1 & \ln t_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \tau^{\lambda_1-\lambda_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad t_1 \le 1,$$

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau^{\lambda_1-\lambda_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1-\lambda_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_0 \ge 1,$$

і для випадку $t_0 < 1 < t_1$ з матрицею

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_0^{\lambda_2-\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_1-\lambda_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

З формули (8), відповідно, отримуємо

$$u_k(t) = t^{\lambda_1}\frac{\begin{pmatrix} 1 & \ln t \end{pmatrix}}{\ln\tau}\begin{pmatrix} \ln t_1 & -\ln t_0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathcal{Z}_1,$$

де $\ln(t_1/t_0) > 0$, а для $k \in \mathcal{Z}_2$, відповідно, матимемо

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2}t_1^{\lambda_1-\lambda_2} \end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix} 1 & -\tau^{\lambda_1-\lambda_2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad t_1 \le 1,$$

$$u_k(t) = \frac{-\begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix} -1 & t_0^{\lambda_2-\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_1-\lambda_2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad t_0 < 1 < t_1, \tag{10}$$

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1}t_0^{\lambda_2-\lambda_1} & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\tau^{\lambda_1-\lambda_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_2}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad t_0 \ge 1,$$

де елементи $\tau^{\lambda_1-\lambda_2}$, $t_0^{\lambda_2-\lambda_1}$, $t_1^{\lambda_1-\lambda_2}$ відповідних квадратних матриць мають менший за одиницю модуль для всіх $k \in \mathcal{Z}_2$ з умовою $\operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_1$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_1$, то $D < 0$, $\sqrt{-D} > 0$, $\lambda_{1,2} = (1-a)/2 \mp i\sqrt{-D/4}$ і

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{(1-a)/2} & 0 \\ 0 & t_1^{(1-a)/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-i\sqrt{-D/4}} & t_0^{i\sqrt{-D/4}} \\ t_1^{-i\sqrt{-D/4}} & t_1^{i\sqrt{-D/4}} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathcal{Z}_2,$$

а формули (10) набувають вигляду

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} -\sin\left(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{t/t_1}\right) & \sin\left(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{t/t_0}\right) \end{pmatrix}}{t^{(a-1)/2}\,\sin\left(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{\tau}\right)}\begin{pmatrix} t_0^{(a-1)/2}\varphi_{0k} \\ t_1^{(a-1)/2}\varphi_{1k} \end{pmatrix}$$

у припущенні, що $\sqrt{-D(k)}\,\ln\tau \neq 2m\pi$ для усіх натуральних m. У протилежному випадку $\sqrt{-D(k)} = 2m\pi/\ln\tau$, або $t_0^{\lambda_2-\lambda_1} = t_1^{\lambda_2-\lambda_1}$, або $\tau^{\lambda_1} = \tau^{\lambda_2}$ розв'язок задачі (4), (9) існує лише за умови $\varphi_{1k} = \tau^{\lambda_1}\varphi_{0k}$, а сама задача має одновимірне ядро, зокрема

$$u_k(t) = \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_0^{\lambda_1}} + \frac{t^{\lambda_2}}{t_0^{\lambda_2}}\Big)\frac{\varphi_{0k}}{2} + \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_0^{\lambda_1}} - \frac{t^{\lambda_2}}{t_0^{\lambda_2}}\Big)C_k \equiv \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_1^{\lambda_1}} + \frac{t^{\lambda_2}}{t_1^{\lambda_2}}\Big)\frac{\varphi_{1k}}{2} + \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_1^{\lambda_1}} - \frac{t^{\lambda_2}}{t_1^{\lambda_2}}\Big)\tau^{\lambda_1}C_k,$$

де C_k — довільне комплексне число.

Умова неоднозначності розв'язку задачі (1), (3) полягає у виконанні хоча б однієї з нескінченної кількості умов

$$b(ik) = \Big(\frac{a(ik)-1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{\ln\tau}\Big)^2, \qquad m\in\mathbb{N}, \quad k\in\mathbb{Z}^p,$$

причому розмірність її ядра дорівнює кількості розв'язків $k \in \mathbb{Z}^p$ останнього рівняння і може бути нескінченною.

На підставі формул (10) отримуємо для похідних $u_k^{(l)}$, де $l = 0,1,2$, розв'язку u_k задачі (4), (9) відповідні нерівності

$$\begin{gathered}
8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} \geq \begin{cases}\big|t^{l-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\leq t_1,\\ \big|t^{l-\lambda_2}t_1^{\lambda_2-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\geq t_1,\end{cases}\\
8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} \geq \begin{cases}\big|t^{l-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\leq 1,\\ \big|t^{l-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\geq 1,\end{cases}\\
8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_2}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} \geq \begin{cases}\big|t^{l-\lambda_1}t_0^{\lambda_1-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\leq t_0,\\ \big|t^{l-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\geq t_0.\end{cases}
\end{gathered}\tag{11}$$

Величини λ_l^* визначають формули

$$\lambda_0^* = 1, \quad \lambda_1^* = \max_r|\lambda_r|^2, \quad \lambda_2^* = \max_r|(\lambda_r-1)\lambda_r|^2 = \max_r|a\lambda_r+b|^2. \tag{12}$$

3. Оцінювання розв'язку

Нехай компоненти вектора

$$\vec{b} = \big(b(1),\ldots,b(p)\big) = \big(b_{s(1)},\ldots,b_{s(p)}\big),$$

де $s(j) = \big(\underbrace{0,\ldots,0,2}_{j},0,\ldots,0\big)$, у рівнянні (1) належать кругу Q^* радіуса b^*, а саме $Q^* = \{z\in\mathbb{C}\colon |z|\leq b^*\}$. Тоді залежні від k величини

$$\lambda_1(k), \lambda_2(k), D(k), \Delta(k)$$

залежать також і від цього вектора на множині $Q^{*p} = \underbrace{Q^*\times\cdots\times Q^*}_{p}$.

Розглядаємо множину розв'язків $u = u(t,x)$ задачі (1), (3) складену для значень вектора $\vec{b}$ на множині Q^{*p} з метою визначення її метричних оцінок.

Оскільки $|a(ik)| \leq L_1\tilde{k}$ і $|b(ik)| \leq L_1^2\tilde{k}^2$, то $|D(k)| \leq L_2^2\tilde{k}^2$ і $|\lambda_j(k)| \leq L_3\tilde{k}$, де додатні числа L_1, L_2, L_3 — не залежать від k та $\vec{b}$, а залежать від b^*.

З іншого боку, на підставі рівностей $D(k) = 4k_j^2 b(j) - D_1(k)$, де $D_1(k) = 4k_j^2 b(j) - D(k)$ не залежить від $b(j)$ і $k_j^2 = \max(k_1^2, \dots, k_p^2)$, отримаємо оцінки знизу.

Для довільного фіксованого $\varepsilon \in (0,1]$ виберемо послідовність невід'ємних чисел ε_k, які задовольняють умову $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \varepsilon_k^2 = \varepsilon/2$.

Тоді міра множини

$$\tilde{Q}_k\big(b(1), \dots, b(j-1), b(j+1), \dots, b(p)\big), \qquad k \neq 0,$$

елементів $b(j) \in Q^*$, що задовольняють нерівність

$$\Big|b(j) - \frac{D_1(k)}{4k_j^2}\Big| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi^{p/2} b^{*p-1}} \varepsilon_k, \qquad \varepsilon_k \leq 1/2,$$

для довільного фіксованого вектора $\big(b(1), \dots, b(j-1), b(j+1), \dots, b(p)\big) \in Q^{*p-1}$ не перевищує $2\pi^{1-p} b^{*2(1-p)} \varepsilon_k^2$, а міра множини $\tilde{Q}_k$ усіх таких векторів $\vec{b} \in Q^{*p}$ не перевищує $2\varepsilon_k^2$.

Тому на доповненні $Q^{*p} \setminus \tilde{Q}_k$ цієї множини, шо має міру не меншу ніж $\pi^p b^{*(2p-2)} b^{*2} - 2\varepsilon_k^2$, справджується оцінка знизу

$$|D(k)| = 4k_j^2 \Big|b(j) - \frac{D_1(k)}{4k_j^2}\Big| > \frac{4\sqrt{2}k_j^2}{\pi^{p/2} b^{*p-1}} \varepsilon_k \geq \frac{4\sqrt{2}\tilde{k}^2}{(p+1)\pi^{p/2} b^{*p-1}} \varepsilon_k.$$

Розглянемо вираз $\Delta(k) = 1 - \tau^{\lambda_1 - \lambda_2}$, який треба оцінити знизу. Оскільки $\tau > 1$, а $\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \leq 0$, то для $\Delta(k) = 1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau}$ маємо оцінку зверху

$$|\Delta(k)| \leq 1 + e^{\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau} \leq 2$$

для усіх $\vec{b} \in Q^{*p}$, зокрема $|\Delta(k)| = 2$, якщо $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau} = -1$. Якщо ж $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau} = 1$, то $|\Delta(k)| = 0$.

Позначимо $\varepsilon_k^* = \dfrac{\varepsilon_k/\sqrt{\tilde{k}}}{\sqrt{m_0 \pi^p b^{*2(p-1)}}}$, причому $m_0 = \dfrac{12}{11\pi}(L_2 \ln\tau + 1)$, число ε вибираємо таким, щоб $\varepsilon_k^* \leq 1/2$; ще позначимо $z = (\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau$, тоді $\mathrm{Re}\, z \leq 0$ і

$$|z| = \sqrt{|D(k)|}\ln\tau \leq \tilde{k} L_2 \ln\tau,$$

тобто z належить півкругу радіуса $\tilde{k} L_2 \ln\tau$.

Образи прямокутників

$$R_m = \{z = x + iy\colon (x,y) \in [-\varepsilon_k^{**}, 0] \times [-\varepsilon_k^{**} + 2\pi m, \varepsilon_k^{**} + 2\pi m]\}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

де $\varepsilon_k^{**} = \dfrac{\tilde{k}\ln\tau}{pL_2}\varepsilon_k^* = \dfrac{\sqrt{\tilde{k}}\ln\tau \cdot \varepsilon_k/p}{\sqrt{m_0 L_2^2 \pi^p b^{*2(p-1)}}}$, що містять точки $2\pi i m$, при відображенні $w = e^z$ є однаковими, рис. 2; це частина кільця між колами $|z| = e^{-\varepsilon_k^{**}}$, $|z| = 1$ і променями $\arg z = \pm\varepsilon_k^{**}$.

Прямокутник R_m має ненульовий перетин з кругом $|z| \leq \tilde{k} L_2 \ln\tau$, якщо $2\pi|m| - \varepsilon_k^{**} < \tilde{k} L_2 \ln\tau$ або $11\pi|m| < 6\tilde{k} L_2 \ln\tau$. Звідси отримуємо, що кількість таких перетинів не перевищує числа $m_0\tilde{k}$.

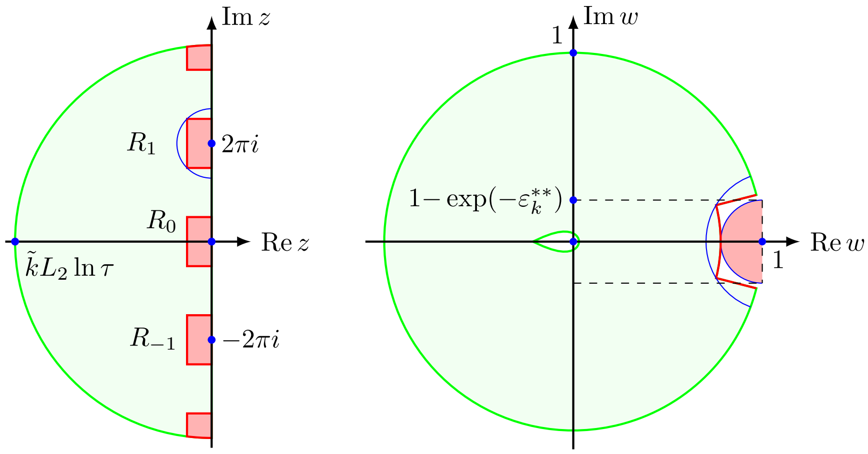


Рис. 2. Образи півкруга без прямокутників при відображенні $w = e^z$

Для довільної точки $z \notin \bigcup_m R_m$ півкруга справджується нерівність

$$|1 - e^z| \geq 1 - e^{-\varepsilon_k^{**}} > \frac{3}{4}\varepsilon_k^{**}.$$

Справді, відстань від одиниці до точок $e^{-\varepsilon_k^{**}} \cdot e^{i\varphi}$ дуги $|\arg z| \leq \varepsilon_k^{**}$ на колі $|z| = e^{-\varepsilon_k^{**}}$ не перевищує $1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}$, оскільки

$$|1 - e^{i\varphi - \varepsilon_k^{**}}|^2 = \left(1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}\cos\varphi\right)^2 + e^{-2\varepsilon_k^{**}}\sin^2\varphi \geq \left(1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}\cos\varphi\right)^2 \geq \left(1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}\right)^2.$$

Відстань від одиниці до точок $|z|e^{\pm i\varepsilon_k^{**}}$ відрізка $1 - e^{-\varepsilon_k^{**}} \leq |z| \leq 1$ обох променів $\arg z = \pm\varepsilon_k^{**}$ не перевищує відстані до прямих $y = \pm\operatorname{tg}\varepsilon_k^{**} \cdot x$ відповідно, яка є однаковою і дорівнює $\sin\varepsilon_k^{**}$.

Тому $|1-e^z| \geq \min\left(1-e^{-\varepsilon_k^{**}}, \sin\varepsilon_k^{**}\right)$, оскільки мінімум модуля функції $1-e^z$ на півкрузі з вилученими прямокутниками досягається на розглянутій частині границі кільця.

На відрізку $[0, 1/2]$ маємо нерівності $\sin x > 1 - e^{-x} > 3x/4$, які випливають з формули Маклорена

$$\sin x - (1 - e^{-x}) = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{-\theta x} + \sin\theta x}{24}x^4 > \frac{x^2}{3} \geq 0,$$

$$1 - e^{-x} - \frac{3}{4}x = \left(x - e^{-\theta x}\frac{x^2}{2}\right) - \frac{3}{4}x > \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right) \geq 0,$$

де $\theta = \theta(x)$ належить інтервалу $(0, 1)$.

Використовуємо рівність

$$z - 2\pi im = \frac{D(k)\ln^2\tau + 4\pi^2m^2}{z + 2\pi im} = \frac{b(j) - (D_1(k) - 4\pi^2m^2)/(4k_j^2\ln^2\tau)}{(z + 2\pi im)/(4k_j^2\ln^2\tau)}, \tag{13}$$

де $D_1(k)$ не залежить від $b(j)$. Оскільки міра множини

$$Q_{mk}\big(b(1), \ldots, b(j-1), b(j+1), \ldots, b(p)\big), \qquad k \neq 0,$$

елементів $b(j)\in Q^*$, що при фіксованому m задовольняють нерівність

$$\left|b(j)-\frac{D_1(k)-4\pi^2m^2}{4k_j^2\ln^2\tau}\right|\le\sqrt{2}\varepsilon_k^* \tag{14}$$

для довільного фіксованого вектора $\big(b(1),\dots,b(j-1),b(j+1),\dots,b(p)\big)\in Q^{*p-1}$, не перевищує $2\pi\varepsilon_k^{*2}=\dfrac{2\varepsilon_k^2}{m_0\pi^{p-1}b^{*2(p-1)}\tilde{k}}$, то міра множини $Q_k=\bigcup\limits_m Q_{mk}$ усіх таких векторів $\vec{b}\in Q^{*p}$, що задовольняють нерівність хоча б для одного m, не більша $2\varepsilon_k^2$.

З нерівностей (13), (14) для $\vec{b}\in Q^{*p}\setminus Q_k$ випливає формула

$$|z-2\pi im|\ge 4k_j^2\ln^2\tau\frac{11\sqrt{2}\varepsilon_k^*}{23\tilde{k}L_2\ln\tau}>\sqrt{2}\frac{\tilde{k}\ln\tau}{pL_2}\varepsilon_k^*=\sqrt{2}\cdot\varepsilon_k^{**},$$

яка справджується для всіх $k\ne 0$.

Звідси легко бачити, що $z\notin\bigcup_m R_m$, де $\operatorname{meas}Q_k\le 2\varepsilon_k^2$, і тому маємо такі оцінки знизу: $|1-e^z|\ge 3/8$, якщо $\varepsilon_k^{**}\ge 1/2$, та $|1-e^z|\ge 3\varepsilon_k^{**}/4$, якщо $\varepsilon_k^{**}<1/2$.

Позначимо Q_0 — множину векторів (a_0,b_0), які лежать на комплексних параболах

$$b_0=\Big(\frac{a_0-1}{2}\Big)^2+\Big(\frac{m\pi}{\ln\tau}\Big)^2$$

для цілих чисел m; якщо $(a_0,b_0)\notin Q_0$, то $\Delta(0)\ne 0$.

У припущенні $(a_0,b_0)\notin Q_0$ для довільних достатньо малих $\varepsilon>0$ і послідовності $\varepsilon_k\ge 0$, для яких $\sum_{k\ne0}\varepsilon_k^2=\varepsilon/2$, на множині $\vec{b}\in Q^{*p}\setminus Q$ знаменники у формулі (11) задовольняють нерівність

$$|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}|\ge\min\Big(|\Delta(0)|,\frac{3}{8},\frac{3}{4}L_4\tilde{k}^{1/2}\varepsilon_k\Big)\ge L_5\tilde{k}^{1/2}\varepsilon_k,\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{15}$$

де $Q=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}Q_k$, $\operatorname{meas}Q\le\varepsilon$ і $L_4=\dfrac{\ln\tau}{pL_2b^{*p-1}\sqrt{m_0\pi^p}}>0$, $L_5>0$.

Для заданого ε і невід'ємної послідовності f_k з умовою $0<F=\sum\limits_{k\ne0}f_k^2<\infty$ послідовність ε_k будується за правилом $\varepsilon_k=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2F}}f_k$.

Нехай корені (7) рівняння (6) на множині $\tilde{Q}\subset Q^{*p}\setminus Q$ задовольняють умови

$$-\lambda_0^-\tilde{k}\le\operatorname{Re}(\lambda_1-\lambda_2)\le\lambda_0^+\tilde{k},\qquad -\lambda_j^-\tilde{k}\le\operatorname{Re}\lambda_j\le\lambda_j^+\tilde{k},\quad j=1,2, \tag{16}$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_0^\pm$, $\lambda_1^\pm$, $\lambda_2^\pm$. Тоді $-L_3\le-\lambda_1^-\le-\lambda_2^-\le\lambda_1^+\le\lambda_2^+\le L_3$ і $-2L_2\le-\lambda_0^-\le\lambda_0^+\le 0$, тобто ці умови виконуються на усій множині Q^{*p} для чисел $\lambda_1^\pm=\lambda_2^\pm=L_3$ і $\lambda_0^-=2L_2$, $\lambda_0^+=0$.

Нерівності $\lambda_r^*\le L_6^2\tilde{k}^{2r}$, де $r=0,1,2$, $L_6>0$, і формули (11), (12), (15), (16) дають змогу у разі $t_1\le 1$, за умови $(a_0,b_0)\notin Q_0$, визначити для векторів $\vec{b}\in Q^{*p}\setminus Q$ оцінки

$$t^{2r}\big|\tilde{k}^{-r}t^{\lambda_1^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\big|^2\le\frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\big(\big|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\big|^2+\big|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\big|^2\big),\qquad t\le t_1, \tag{17}$$

$$t^{2r}\big|\tilde{k}^{-r}t^{\lambda_2^-}t_1^{\lambda_0^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\big|^2 \le \frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\big(\big|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\big|^2+\big|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\big|^2\big), \quad t_1<t\le 1, \tag{18}$$

$$t^{2r}\big|\tilde{k}^{-r}t^{-\lambda_2^+}t_1^{\lambda_0^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\big|^2 \le \frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\big(\big|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\big|^2+\big|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\big|^2\big), \qquad t>1. \tag{19}$$

Аналогічні оцінки для u_k, де $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$, визначено також в інших двох випадках.

4. Основний результат

На підставі отриманих нерівностей для функцій u_k і оцінок мір множин векторів $\vec{b}$ доводимо такі твердження.

Теорема 1. *Якщо $\varphi_0\in\Phi_{(p^*+3)/2,g_{0j}}$, $\varphi_1\in\Phi_{(p^*+3)/2,g_{1j}}$, причому вибір g_{0j}, g_{1j} та t_0, t_1 визначає таблиця*

j	1	2	3
$t_0,\ t_1$	$t_1\le 1$	$t_0<1<t_1$	$t_0\ge 1$
g_{0j}	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{L_3}$
g_{1j}	$t_1^{-L_3}$	$t_1^{L_3}$	$t_1^{L_3}$

,

$p^*>p$ і $(a_0,b_0)\notin Q_0$, то для довільного $\varepsilon>0$ існує така множина $Q\subset Q^{*p}$ з мірою $\operatorname{meas}Q\leqslant\varepsilon$, що для довільного $\vec{b}\in Q^{*p}\setminus Q$ існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2) *з простору U_{2,G_j} і справджуються оцінки*

$$\|u\|_{2,G_j}^2 \le \frac{16L_6^2\zeta(p^*)}{\varepsilon L_5^2}\big(\|\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2,g_{0j}}+\|\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2,g_{1j}}\big), \qquad j=1,2,3, \tag{20}$$

де $\zeta(p^*)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{-p^*}$, з функціями

$$G_1(t)=\begin{cases} t^{L_3}, & \text{якщо } t\le t_1,\\ t^{L_3}t_1^{2L_2}, & \text{якщо } t_1\le t\le 1,\\ t^{-L_3}t_1^{2L_2}, & \text{якщо } t\ge 1,\end{cases}$$

$$G_2(t)=\begin{cases} t^{L_3}, & \text{якщо } t\le 1,\\ t^{-L_3}, & \text{якщо } t\ge 1,\end{cases}$$

$$G_3(t)=\begin{cases} t^{L_3}t_0^{-2L_2}, & \text{якщо } t\le 1,\\ t^{-L_3}t_0^{-2L_2}, & \text{якщо } 1\le t\le t_0,\\ t^{-L_3}, & \text{якщо } t\ge t_0.\end{cases}$$

Доведення. Існування. Приймемо $\varepsilon_k^2=\dfrac{\varepsilon}{2\zeta(p^*)}\tilde{k}^{-p^*}$, де $p^*>p$ і $\varepsilon>0$. На підставі оцінок (17), (18), (19), в яких $\lambda_1^\pm=\lambda_2^\pm=L_3$ і $\lambda_0^-=2L_2$, $\lambda_0^+=0$, та означень просторів $\Phi_{q,g}$ і $U_{q,G}$ одержуємо оцінку (20) для $j=1$ з зазначеними сталими g_{01} і g_{11} та функцією $G_1(t)$. З аналогічних оцінок одержують нерівності (20) для $j=2,3$. Формули (20) справджуються для всіх $\vec{b}\in Q^{*p}\setminus Q$ за умови $(a_0,b_0)\notin Q_0$. Отримані нерівності доводять належність розв'язку до просторів U_{2,G_j}, де $j=1,2,3$, у залежності від значень t_0, t_1.

Єдиність. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1 = u_1(t,x)$ і $u_2 = u_2(t,x)$ задачі (1), (2) з простору U_{2,G_j}. Тоді функція $u = u_2 - u_1$ є розв'язком задачі (1) з простору U_{2,G_j} з нульовими умовами

$$u(t_0,x) = 0, \quad u(t_1,x) = 0, \qquad x \in \Omega_{2\pi}^p.$$

Кожний із коефіцієнтів Фур'є функції u є розв'язком відповідної задачі (4), (9) при $\varphi_{0k} = \varphi_{1k} = 0$. Згідно з умовами теореми на коефіцієнти рівняння $(a_0, b_0) \notin Q_0$ і $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ випливає, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, $u_k(t) \equiv 0$ на $[t^-, t^+]$ для усіх k, тому відповідно $u = 0$, тобто $u_1 = u_2$. Теорему доведено. $\square$

Точніший результат отримується під час використання додаткових умов (16) для деякого фіксованого малого числа $\varepsilon > 0$; при цьому $\operatorname{meas}\tilde{Q} \leqslant \pi^p b^{*2p} - \varepsilon$.

Теорема 2. *Якщо $\varphi_0 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{0j}}$, $\varphi_1 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{1j}}$, причому вибір g_{0j}, g_{1j} та t_0, t_1 визначає таблиця*

j	1	2	3
$t_0,\ t_1$	$t_1 \le 1$	$t_0 < 1 < t_1$	$t_0 \ge 1$
g_{0j}	$t_0^{-\lambda_1^+}$	$t_0^{-\lambda_1^+}$	$t_0^{\lambda_2^-}$
g_{1j}	$t_1^{-\lambda_1^+}$	$t_1^{\lambda_2^-}$	$t_1^{\lambda_2^-}$

$p^* > p$ та $(a_0, b_0) \notin Q_0$ і виконується умова (16), то для довільного $\varepsilon > 0$ існує така множина $Q \subset Q^{*p}$ з мірою $\operatorname{meas} Q \leqslant \varepsilon$, що для довільного $\vec{b} \in \tilde{Q} \subset Q^{*p} \setminus Q$ існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2) з простору U_{2,G_j} і справджуються оцінки

$$\|u\|_{2,G_j}^2 \le \frac{16 L_6^2 \zeta(p^*)}{\varepsilon L_5^2} \left(\|\varphi_0\|_{(p^*+3)/2, g_{0j}}^2 + \|\varphi_1\|_{(p^*+3)/2, g_{1j}}^2 \right), \qquad j = 1,2,3, \tag{21}$$

де $\zeta(p^*) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \tilde{k}^{-p^*}$, з функціями

$$G_1(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & \text{якщо } t \le t_1, \\ t^{\lambda_2^-} t_1^{\lambda_0^-}, & \text{якщо } t_1 \le t \le 1, \\ t^{-\lambda_2^+} t_1^{\lambda_0^-}, & \text{якщо } t \ge 1, \end{cases}$$

$$G_2(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & \text{якщо } t \le 1, \\ t^{-\lambda_2^+}, & \text{якщо } t \ge 1, \end{cases}$$

$$G_3(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-} t_0^{-\lambda_0^-}, & \text{якщо } t \le 1, \\ t^{-\lambda_1^+} t_0^{-\lambda_0^-}, & \text{якщо } 1 \le t \le t_0, \\ t^{-\lambda_2^+}, & \text{якщо } t \ge t_0. \end{cases}$$

5. Висновки

Використовуючи нерівності $-L_3 \le -\lambda_1^- \le -\lambda_2^- \le \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ \le L_3$ і $-2L_2 \le -\lambda_0^- \le \lambda_0^+ \le 0$ можна порівняти простори отримані в теоремі 1 та теоремі 2. Для

$j = 1$, тобто $t_0 < t_1 \leqslant 1$, отримуємо

$$t_0^{-\lambda_1^+} \leqslant t_0^{-L_3}, \quad t_1^{-\lambda_1^+} \leqslant t_1^{-L_3}, \quad t^{\lambda_1^-} \geqslant t^{L_3} \quad \text{для} \quad t \leq t_1,$$
$$t^{\lambda_2^-} t_1^{\lambda_0^-} \geqslant t^{L_3} t_1^{2L_2} \quad \text{для} \quad t_1 \leq t \leq 1, \quad t^{-\lambda_2^+} t_1^{\lambda_0^-} \geqslant t^{-L_3} t_1^{2L_2} \quad \text{для} \quad t \geq 1.$$

Аналогічно отримуються такі ж нерівності для $j = 2, 3$. З отриманих нерівностей можна побачити, що простори $\Phi_{(p^*+3)/2, g_{0j}}$ та $\Phi_{(p^*+3)/2, g_{1j}}$ у разі виконання умови (16) є ширшими, а простори розв'язків U_{2,G_j} — вужчими в теоремі 2 у порівнянні з просторами теореми 1.

Зауважимо, що отримані результати переносяться на випадок багатоточкових задач для рівнянь і систем рівнянь високого порядку типу Ейлера.

Список використаної літератури

1. І. О. Бобик, Б. Й. Пташник, *Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, Укр. мат. журн. **46** (1994), no. 7, 795–802; **English version:** I. O. Bobyk and B. I. Ptashnyk, *Boundary-value problems for hyperbolic equations with constant coefficients*, Ukr. Math. J. **46** (1994), no. 7, 869–877. DOI: 10.1007/BF01056663
2. І. О. Бобик, М. М. Симотюк, *Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними*, Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. (2010), no. 625, 11–19.
3. П. І. Каленюк, І. В. Когут, З. М. Нитребич, *Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **52** (2009), no. 4, 7–17; **English version:** P. I. Kalenyuk, I. V. Kohut, and Z. M. Nytrebych, *An investigation into a problem with homogeneous local two-point conditions for a homogeneous system of partial differential equations*, J. Math. Sci. **174** (2011), no. 2, 121–135. DOI: 10.1007/s10958-011-0285-y
4. З. М. Нитребич, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле–Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі*, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. "Математика і інформатика" **25** (2014), no. 1, 94–105.
5. З. М. Нитребич, О. М. Маланчук, *Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними*, Укр. мат. вісник **13** (2016), no. 4, 514–531; **English version:** Z. M. Nytrebych and O. M. Malanchuk, *The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation*, J. Math. Sci. **224** (2017), no. 4, 541–554. DOI: 10.1007/s10958-017-3434-0
6. Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, and P. Ya. Pukach, *On the solvability of two-point in time problem for PDE*, Ital. J. Pure Appl. Math. **38** (2017), 715–726.
7. В. Н. Павленко, Т. А. Петраш, *Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. **18** (2012), no. 2, 199–204.
8. Б. И. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, Наук. думка, Киев, 1984.
9. Б. И. Пташник, П. И. Штабалюк, *Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным*, Дифференц. уравнения. **22** (1986), no. 4, 669–678.
10. Б. Й. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами*, Прикл. проблеми механіки і математики **10** (2012), 7–14.

11. Б. И. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **56** (2013), no. 3, 15–28; **English version:** B. Yo. Ptashnyk and S. M. Repetylo, *Dirichlet-Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients*, J. Math. Sci. **205** (2015), no. 4, 501–517. DOI: 10.1007/s10958-015-2263-2
12. Б. И. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле–Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **57** (2014), no. 2, 25–31; **English version:** B. Yo. Ptashnyk and S. M. Repetylo, *Dirichlet–Neumann problem for systems of hyperbolic equations*, J. Math. Sci. **215** (2016), no. 1, 26–35. DOI: 10.1007/s10958-016-2819-9
13. С. М. Репетило, М. М. Симотюк, *Задача Діріхле-Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами*, Прикл. проблеми механіки і математики. **16** (2018), 147–153.
14. М. М. Симотюк, *Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами*, Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. **7** (2002), 96–107.
15. М. М. Симотюк *Двоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **4**8 (2005), № 1, 44–58.
16. М.М. Симотюк, *Задача з двома кратними вузлами для систем лінійних рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання*, Матем. вісник НТШ **1** (2004), 130–148.

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 18.05.2021

THE TWO-POINT PROBLEM FOR EULER TYPE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Volodymyr ILKIV, Yaroslav SLONOVSKYI

Lviv Polytechnic National University,
Stepana Bandery Str., 12, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

A two-point problem for partial differential equations of the second order with coefficients dependent only on time variable (Euler type equation) is considered. This problem is ill-posed, and its solvability is related to the problem of small denominators. Existence and uniqueness of the solution are established, based on lower bounds estimations for the small denominators.

Key words: partial differential equations, two-point problem, small denominators, ill-posed problems.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 99–104
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 99–104
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.099-104

УДК 519.2

ПОБУДОВА СТАТИСТИЧНИХ КРИТЕРІЇВ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Ярослав ЄЛЕЙКО, Оксана ЯРОВА, Святослав ГОЛОВАТИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

Досліджено вплив зовнішнього середовища на випадкові події та їхні функції розподілу. Розглянуто вибірку випадкових величин, яка залежить від випадкового середовища й описується за допомогою повної групи подій із заданими ймовірностями для кожної події. Основну вибірку розділено на k вибірок, залежно від подій, якими вони описуються. Для кожної з вибірок побудовано емпіричну функцію розподілу та застосовано критерій Колмогорова. В результаті отримано суміш розподілів. Також, розглянуто приклад застосування цієї теорії. Для вибірки знайдено суміш розподілу та параметри отриманих функцій розподілів.

Ключові слова: критерій Колмогорова, функція розподілу, суміш розподілів, показниковий розподіл.

Розглянемо вибірку $X_1, X_2, \ldots, X_n$, яка залежить від зовнішнього середовища, що описується за допомогою повної групи подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, відповідно. При чому

$$\sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Сортуємо вибірку за подіями так:
$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1r_1}$ для події A_1, за умови, що функція розподілу $F_1(x)$;
$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2r_2}$ для події A_2, за умови, що функція розподілу $F_2(x)$;
. . . . ,
$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kr_k}$ для події A_k, за умови, що функція розподілу $F_k(x)$.

2020 Mathematics Subject Classification: 60J25

Тоді вибірка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ буде описуватись функцією розподілу, яка визначається за допомогою суміші розподілів

$$F(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + \cdots + p_kF_k(x).$$

Побудуємо емпіричні функції розподілів для кожної з вибірок за критерієм Колмогорова. Найперше, впорядкуємо вибірку $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1r_1}$, у підсумку отримаємо $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$. Кількість елементів вибірки позначимо n_1. Далі, розділимо вибірку на $\sqrt{n_1}$ інтервалів і знайдемо кількість елементів у кожному з інтервалів. Позначимо n_{1i} — кількість елементів в i-му інтервалі. Отже, емпірична функція розподілу для першої вибірки матиме вигляд:

$$F^1_{em}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{n_{11}} \\ \frac{n_{11}}{n_1}, & x_{n_{11}} < x \leqslant x_{n_{12}} \\ \frac{n_{11}+n_{12}}{n_1}, & x_{n_{12}} < x \leqslant x_{n_{13}} \\ \ldots & \ldots \\ 1, & x > x_{n_{1n}} \end{cases}$$

Аналогічно будуємо всі емпіричні функції розподілів.

Застосуємо критерій Колмогорова. Для цього розглянемо таку різницю:

$$\left|F_{em}(x) - F(x)\right| =$$
$$= \left|\frac{n_1}{n}F^1_{em}(x) + \frac{n_2}{n}F^2_{em}(x) + \cdots + \frac{n_k}{n}F^k_{em}(x) - (p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + \cdots + p_kF_k(x))\right|$$

Оцінимо такий вираз

$$\left|\frac{n_i}{n}F^i_{em}(x) - p_iF_i(x)\right| \leqslant \left|\frac{n_i}{n}F^i_{em}(x) - \frac{n_i}{n}F_i(x)\right| + \left|\frac{n_i}{n}F_i(x) - p_iF_i(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n_i}{n}\left|F^i_{em}(x) - F_i(x)\right| + |F_i(x)| \cdot \left|\frac{n_i}{n} - p_i\right|.$$

$F_i(x)$ — функція розподілу, тому $|F_i(x)| \leqslant 1$, $\frac{n_i}{n} \to p_i$, тому

$$\left|\frac{n_i}{n}F^i_{em}(x) - p_iF_i(x)\right| \leqslant \frac{n_i}{n}\left|F^i_{em}(x) - F_i(x)\right|.$$

Розглянемо критерій Колмогорова з наступними гіпотезами

$$H_0 : F^i_{em}(x) = F_i(x) H_1 : F^i_{em}(x) \neq F_i(x).$$

Позначимо

$$D_{n_i} = \sup_j \left|F^{in_i}_{em}(x) - F_{in_i}(x)\right|.$$

Побудуємо критичну область

$$\tau_\alpha = \{t \geqslant t_\alpha\}.$$

Тоді

$$P\{D_{n_i} \in \tau_\alpha | H_0\} = P\left\{\sqrt{n_i}D_{n_i} \geqslant \lambda_\alpha | H_0\right\} \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha.$$

За великих $n_i, n_i \geqslant 20$ та вибраному рівні значущості α число λ_α визначається співвідношенням

$$K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91

нульова гіпотеза приймається, якщо

$$D_{n_i} \leqslant \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n_i}}.$$

Отже,

$$|F^i_{em}(x) - F_i(x)| \leqslant \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n_i}}.$$

Тоді

$$\frac{n_i}{n}|F^i_{em}(x) - F_i(x)| \leqslant \frac{n_i}{n}\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n_i}} = \frac{\sqrt{n_i}}{n}\lambda_\alpha.$$

Вибираємо такі $N_{01}, \ldots, N_{0k}$, що $n_{11} > N_{01}, \ldots, n_{1k} > N_{0k}$.

Нехай $\widetilde{N_0} = \max\{N_{01}, N_{02}, \ldots, N_{0k}\}$. Позначимо $\dfrac{\sqrt{\widetilde{N_0}}}{n}\lambda_\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$, $\forall \varepsilon > 0$. Тоді

$$|F_{em}(x) - F(x)| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Отож

$$F_{em}(x) \to F(x).$$

Тому сформулюємо теорему.

Теорема 1. *Нехай вибірка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ залежить від зовнішнього середовища, що описується за допомогою повної групи подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тоді, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, що відбуваються за умови A_i, мають функцію розподілу F_i.*

Розглянемо вибірку з 150 даних 0,889 0,340 0,398 0,060 0,084 0,381 0,145 1,517 0,396 0,237 0,274 0,014 0,322 0,260 0,041 0,185 0,277 0,325 0,097 0,902 0,064 0,263 0,849 0,082 0,889 0,090 0,166 0,239 0,801 0,612 0,066 0,033 0,189 1,084 0,054 0,308 0,327 0,174 0,160 0,273 0,096 0,317 2,047 0,380 0,162 0,235 0,030 0,539 0,526 0,399 2,058 0,401 1,457 0,912 0,199 0,562 0,664 0,060 0,125 1,255 0,008 1,049 0,080 0,204 0,486 0,099 0,927 0,421 0,398 0,647 0,438 0,070 0,729 0,461 0,493 0,097 0,354 0,370 0,062 0,080 0,149 0,549 6,172 1,094 0,354 2,214 0,168 2,042 0,563 0,867 0,375 3,624 1,703 1,127 0,048 0,597 1,476 2,759 0,669 0,636 0,261 1,840 1,750 1,389 1,333 0,004 0,962 5,455 0,137 0,634 4,362 0,034 1,664 0,065 1,464 0,656 1,178 3,615 0,435 1,655 0,566 1,137 0,736 3,114 0,008 0,102 0,651 0,186 0,697 0,324 2,164 0,063 0,931 0,540 0,710 0,263 3,619 0,984 0,877 1,574 3,736 0,908 0,547 0,819 0,759 0,026 0,937 2,617 0,440 0,078

Сортуємо цю вибірку щодо двох подій A_1 та A_2. Подія A_1 визначається такими випадковими величинами
0,008 0,014 0,030 0,033 0,041 0,054 0,060 0,060 0,062 0,064 0,066 0,070 0,078 0,080 0,082 0,084 0,090 0,096 0,097 0,097 0,099 0,125 0,145 0,160 0,162 0,166 0,174 0,185 0,189 0,199 0,204 0,235 0,237 0,239 0,260 0,263 0,273 0,274 0,277 0,308 0,317 0,322 0,325 0,327 0,340 0,354 0,370 0,380 0,381 0,396 0,398 0,398 0,399 0,401 0,421 0,438 0,461 0,486 0,493 0,526 0,539 0,562 0,612 0,647 0,664 0,729 0,801 0,849 0,889 0,889 0,902 0,912 0,927 1,049 1,084 1,255 1,457 1,517 2,047 2,058

Обсяг вибірки 80. Подію A_2 описує вибірка обсягом 70 випадкових величин
0,004 0,008 0,026 0,034 0,048 0,063 0,065 0,080 0,102 0,137 0,149 0,168 0,186 0,261 0,263 0,324 0,354 0,375 0,435 0,440 0,540 0,547 0,549 0,563 0,566 0,597 0,634 0,636 0,651 0,656

0,669 0,697 0,710 0,736 0,759 0,819 0,867 0,877 0,908 0,931 0,937 0,962 0,984 1,094 1,127 1,137 1,178 1,333 1,389 1,464 1,476 1,574 1,655 1,664 1,703 1,750 1,840 2,042 2,164 2,214 2,617 2,759 3,114 3,615 3,619 3,624 3,736 4,362 5,455 6,172

Побудуємо емпіричну функцію розподілу для першої вибірки.

$$F^1_{em}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,27; \\ 0,45, & 0,27 < x \leqslant 0,53; \\ 0,75, & 0,53 < x \leqslant 0,8; \\ 0,825, & 0,8 < x \leqslant 1,06; \\ 0,925, & 1,07 < x \leqslant 1,33; \\ 0,95, & 1,33 < x \leqslant 1,6; \\ 0,975, & 1,6 < x \leqslant 2,1; \\ 1, & x > 2,1. \end{cases}$$

Проведемо критерій Колмогорова для перевірки гіпотези
H_0 : емпіричний розподіл статистично не відрізняється від показникового.
Застосувавши критерій, отримаємо $D(80) = 0,032$, $\lambda_{0,05} = 1,3581$.
Отже, на рівні значущості 0,05 розподіл приймаємо нульову гіпотезу.
Знайдемо параметр розподілу.
За методом моментів для показникового розподілу

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{EX} = \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_1} n_i} = 2,4.$$

Побудуємо емпіричну функцію розподілу для другої вибірки.

$$F^2_{em}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,78; \\ 0,5, & 0,78 < x \leqslant 1,56; \\ 0,728, & 1,56 < x \leqslant 2,3; \\ 0,857, & 2,3 < x \leqslant 3,1; \\ 0,886, & 3,1 < x \leqslant 3,9; \\ 0,957, & 3,9 < x \leqslant 4,7; \\ 0,971, & 4,7 < x \leqslant 6,2; \\ 1, & x > 6,2. \end{cases}$$

Проведемо критерій Колмогорова для перевірки гіпотези
H_0 : емпіричний розподіл статистично не відрізняється від показникового.
Застосувавши критерій, отримаємо $D(70) = 0,034$, $\lambda_{0,05} = 1,3581$.
Тому на рівні значущості 0,05 розподіл приймаємо нульову гіпотезу.
Знайдемо параметр розподілу.
За методом моментів

$$\hat{\lambda} = 0,81.$$

Знайдемо суміш розподілів

$$F(x)=\frac{8}{15}\begin{cases}0, & x\leqslant 0,27\\ 0,45, & 0,27<x\leqslant 0,53\\ 0,75, & 0,53<x\leqslant 0,8\\ 0,825, & 0,8<x\leqslant 1,06\\ 0,925, & 1,07<x\leqslant 1,33\\ 0,95, & 1,33<x\leqslant 1,6\\ 0,975, & 1,6<x\leqslant 2,1\\ 1, & x>2,1\end{cases}+\frac{7}{15}\begin{cases}0, & x\leqslant 0,78\\ 0,5, & 0,78<x\leqslant 1,56\\ 0,728, & 1,56<x\leqslant 2,3\\ 0,857, & 2,3<x\leqslant 3,1\\ 0,886, & 3,1<x\leqslant 3,9\\ 0,957, & 3,9<x\leqslant 4,7\\ 0,971, & 4,7<x\leqslant 6,2\\ 1, & x>6,2.\end{cases}$$

Визначимо розподіл суміші за допомогою критерію Колмогорова з гіпотезою H_0 : емпіричний розподіл статистично не відрізняється від гамма-розподілу. Значення статистики $D(150)=0,038$.
Отже, на рівні значущості 0,05 розподіл приймаємо гіпотезу H_0.
За методом моментів для гамма-розподілу

$$\hat{\alpha}=\frac{(\bar{x})^2}{\bar{x^2}-(\bar{x})^2}=0,6$$

$$\hat{\beta}=\frac{\bar{x^2}-\bar{x})^2}{\bar{x}}=1,3.$$

Побудуємо емпіричну функцію розподілу

$$F_{em}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,58\\ 0,58, & 0,58<x\leqslant 1,17\\ 0,8, & 1,17<x\leqslant 1,75\\ 0,89, & 1,75<x\leqslant 2,3\\ 0,93, & 2,3<x\leqslant 2,9\\ 0,94, & 2,9<x\leqslant 3,5\\ 0,95, & 3,5<x\leqslant 4\\ 0,98, & 4<x\leqslant 4,7\\ 0,986, & 4,7<x\leqslant 5,8\\ 0,99, & 5,8<x\leqslant 6,2\\ 1, & x>6,2\end{cases}$$

На підставі цієї праці побудовано суміш розподілу для вибірки випадкових величин, яка залежить від впливу зовнішнього середовища.

Список використаної літератури

1. Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, *Введение в математическую статистику*, Москва, ЛКИ, 2010, 600с.
2. Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, А. В. Чистяков, *Сборник задач по матиматической статистике*, Москва, Высшая школа, 1989, 255с.

3. А. В. Скороход, *Лекції з теорії випадкових процесів*, Навч. посібн., Київ, Либідь, 1990, 168с.
4. В. М. Руденко, *Математична статистика*, Навч. посібн., Київ, Центр учбової літератури, 2012, 304с.

Стаття: надійшла до редколегії 21.04.2021
прийнята до друку 18.05.2021

CONSTRUCTION OF STATISTICAL CRITERIA TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF THE EXTREMAL ENVIRONMENT

Yaroslav YELEYKO, Oksana YAROVA, Sviatoslav HOLOVATYY

Ivan Franko Lviv National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

The paper is devoted to the study of the influence of the external environment on random events and their distribution functions. A sample of random variables is considered, which depends on the random environment and is described using a complete group of events with given probabilities for each event. The main sample is divided into k samples depending on the events they describe. An empirical distribution function was constructed for each of the samples and the Kolmogorov criterion was applied. The result is a mixture of distributions. Also, an example of application of this theory is considered. A mixture of distributions and parameters of the obtained distribution functions are found for the sample.

Key words: Kolmogorov criterion, distribution function, mixture of distributions, exponential distribution.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 105–106
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 105–106
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.105-106

О. М. КІНАШ (21.05.1964-13.02.2021)

(1964-2021)

Тринадцятого лютого 2021 року на 56 році життя передчасно відійшов у вічність відомий вчений і педагог, кандидат фізико-математичних наук, доцент Орест Михайлович Кінаш.

Орест Михайлович народився 21 травня 1964 року в місті Щирці Пустомитівського району Львівської області. Батько інженер, мати — вчителька української мови та літератури. Мама Ореста Михайловича померла, коли йому було 7 років. В 1971 року О. М. Кінаш пішов у перший клас Щирецької середньої школи. З 1975 року переїхав до Львова, де навчався в середній школі № 31 міста Львова, яку закінчив у 1981 році. Цього ж року став студентом механіко-математичного факультету Львівського державного університету імені Івана Франка, який закінчив у 1986 році. Після закінчення університету у 1986—1988 працював інженером і стажистом-дослідником обчислювального центру університету.

У 1988 році вступив до аспірантури Інституту Математики АН УРСР у відділ теорії випадкових процесів на спеціальність 01.01.05 – «Теорія ймовірностей та математична статистика» до доктора фізико-математичних наук В. М. Шуренкова. У 1991 році Орест Михайлович успішно закінчив аспірантуру, а наступного року захистив кандидатську дисертацію на тему "Перехідні явища для марковських процесів зі скінченною множиною станів". Педагогічну роботу О. М. Кінаш почав у 1992 році на кафедрі теорії функцій та теорії ймовірностей Львівського державного університету імені Івана Франка, спочатку асистентом, а з 1995 року — доцентом. З 2002 року він викладав на кафедрі теоретичної та прикладної статистики, а після реорганізації факультету – з 2020 року – був доцентом кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь.

Коло наукових інтересів О. М. Кінаша — перехідні явища для марковських процесів s матричнозначних еволюцій, прикладні задачі фінансової та актуарної математики, прикладні задачі теорії надійності та контроль якості, теорія ризику в страхуванні, гравітаційні моделі економіки. Він є автором понад 50 наукових статей, навчально-методичних посібників і підручників.

Орест Михайлович активно займався громадською роботою. Був членом Українського актуарного товариства, членом Ради механіко-математичного факультету, заступником завідувача кафедрою. Входив до складу науково-методичної комісії зі статистики сектору вищої освіти Науково-методичної ради Міністерства освіти і науки України.

У житті Орест Михайлович був веселим і життєрадісним. Його цінували колеги, любили і поважали студенти. Пам'ять про Ореста Михайловича Кінаша назавжди залишиться в наших серцях.

О. Бугрій, О. Гутік.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 107–108
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 107–108
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.107-108

М. І. БУГРІЙ (10.09.1948-24.04.2021)

(1948-2021)

Двадцять четвертого квітня 2021 року після важкої хвороби пішов з життя відомий український вчений і педагог, кандидат фізико-математичних наук, доцент Микола Іванович Бугрій.

М. І. Бугрій народився 10 вересня 1948 року в селі Ягнятин Ружинського району Житомирської області в селянській сім'ї. У 1967 році, після закінчення Ягнятинської середньої школи, розпочав свій трудовий шлях у Київському комбінаті будіндустрії, звідки і бувйого призвали в армію до лав Військово-морського флоту. Після завершення служби у 1971 році переїхав до Львова і вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка, який закінчив у 1976 році за спеціальністю "Математика", отримавши кваліфікацію "Математик. Викладач математики".

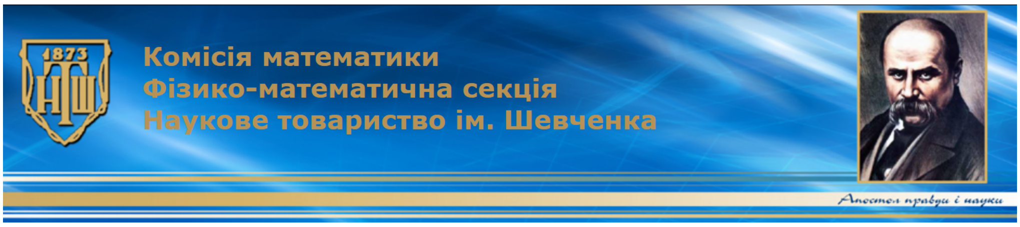
З 1976 року М.І. Бугрій працював у Львівському державному університеті імені Івана Франка: спершу як старший механік обчислювального центру, а з 1-го грудня 1976 року — як асистент кафедри диференціальних рівнянь. У 1981 році перейшов на посаду асистента кафедри математичного моделювання, де активно працював у галузі математичного моделювання континуальних систем, оптимізації розв'язків крайових задач математичної фізики, використання варіаційних підходів у побудові ефективних наближених моделей розв'язування спряжених термомеханічних систем. За результатами наукових досліджень у 1994 році Микола Іванович успішно захистив кандидатську дисертацію на тему "Оптимізація термопружного стану товстостінних оболонок" за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла (науковий керівник — член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. Я. Й. Бурак). З 1995 року М. І. Бугрій працював доцентом кафедри математичного моделювання, а з 2015 року — доцентом кафедри теорії функцій та теорії ймовірностей. У 2016 році Микола Іванович виходить на пенсію.

Микола Іванович Бугрій був талановитим педагогом, який користувався повагою колег і студентів. Поряд з класичними курсами з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, варіаційного числення та методів оптимізації активно займався впровадженням сучасних дисциплін е навчальний процес, розробляв і читав курси з фінансової математики, теорії і практики фінансово-банківських розрахунків, актуарної математики, керував студентською науковою роботою. Микола Іванович автор навчального посібника "Основи фінансово-кредитного аналізу", багатьох наукових, навчальних і методичних праць.

Світла пам'ять про талановитого вченого і педагога, чесну та порядну людину – Миколу Івановича Бугрія – назавжди залишиться у наших серцях.

О. Бугрій, О. Гутік, М. Заболоцький.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 109
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 109
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.109



БЕРЕЗНЕВЕ ЗАСІДАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМІСІЇ НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

26 березня 2021 року відбулося березневе "он-лайн" засідання Математичної комісії Наукового товариства імені Тараса Шевченка на платформі ZOOM.

1. **Вступне слово та анонс доповідей.**
2. **"Наближення аналітичних функцій неперервними дробами"**.
   Христина Кучмінська, провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь і теорії функцій Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.
3. **"Інтегровні потоки типу Концевича на асоціативних некомутативних алгебрах"**.
   Анатолій Прикарпатський, професор кафедри економічної кібернетики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.
4. **"Кожна площина Банаха має властивість Мазура-Улама"**.
   Тарас Банах, завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного ініверситету імені Івана Франка.
5. **Обговорення доповідей. Різне.**

Відеозапис цього засідання Математичної комісії НТШ викладено на Youtube-каналі **Puzyna Readings**: `https://youtu.be/ftOVmqnhdhA`.

О. Гутік, Я. Притула.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською чи англійською мовами. До редакційної колегії потрібно подавати:

електронний варіант статті та резюме на веб-сторінку
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
та варто надіслати за адресою *lnu.visn.mm@gmail.com*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, адресу українською та англійською мовами, телефон, електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 20 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – 190 mm, ширина – 135 mm.

3. Вимоги до набору.

Текст статті створювати у версії LaTeX з кодуванням кириличних шрифтів „Кирилиця (Windows)" (кодова сторінка 1251).

На першій сторінці статті потрібно зазначити номер **УДК** та **MSC 2020**.

Номери формул ставити з правого боку та нумерувати лише формули, на які є посилання.

У посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх треба створювати засобами LaTeX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.):

Список використаної літератури

1. Ja. B. Pesin, *An example of a nonergodic flow with nonzero characteristic exponents*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 3, 81–82 (Russian).
2. M. Ogura and C. F. Martin, *Generalized joint spectral radius and stability of switching systems*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2222–2239.
3. A. Martínez-Finkelshtein, K. T.-R. McLaughlin, and E. B. Saff, *Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle*, Int. Math. Res. Not., posted on (2006), Art. ID 91426, pp. 43.
4. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
5. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Colloquium Publications, Vol. **XXIII**, American Mathematical Society, R.I., 1975.
6. O. L. V. Costa, M. D. Fragoso, and R. P. Marques, *Discrete-time Markov jump linear systems*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.

7. Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман, *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*, Геометрия — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **29**, ВИНИТИ, Москва, 1988, с. 147–259; англ. пер.: E. B. Vinberg, O. V. Shvartsman, *Discrete groups of motions of spaces of constant curvature*, Geometry. II: Spaces of constant curvature, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, Springer, Berlin, 1993, p. 139–248
8. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, Москва, 1974, 455 с.; пер. з англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., 13, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 p.
9. V. Bovdi, *Free subgroups in group rings*, arXiv:1406.6771, 2014, preprint.
10. S. N. Ethier, *An error estimate for the diffusion approximation in population genetics*, Ph.D. thesis, Wisconsin Univ., 1985.
11. K. Sato, *Diffusion operators in population genetics and convergence of Markov chains*, Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977) Lecture Notes in Math., vol. **695**, Springer, Berlin, 1978, pp. 127–137.