Научные работы студентов Львовского университета им. Ив. Франко
Выпуск первый **1948**

А. ВОЛЬПЕРТ
Студент II курса физико-математического ф-та

О ДЕЛИМОСТИ В КОЛЬЦАХ ЛЕВЫХ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Для некоммутативных колец не существует столь общей теории идеалов, как для коммутативного случая. Наиболее детально изучен один частный случай некоммутативных колец — кольца линейных дифференциальных операторов при одном дифференцировании[1]. В настоящей статье рассмотрен более общий тип колец: кольца с единицей без делителей нуля, в которых каждый левый идеал главный, а на правые идеалы ограничения не накладываются. По аналогии с коммутативным случаем такие кольца естественно назвать кольцами левых главных идеалов.

Пусть (M) обозначает левый идеал, порождённый множеством M элементов кольца; $[a_1, \ldots, a_n]$ — наименьшее кратное элементов $a_1, \ldots, a_n$ (здесь, как и в дальнейшем, если это специально не оговорено, рассматривается только правая делимость); $a : b$ — базисный элемент идеала $(a) : b$. Тогда можно доказать, что при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ $a : b$ отличен от нуля и

$$a : b \cdot b = [a, b].$$

Если $(a, b) = (1)$, то элемент $a : b$ назовём подобным элементу a[2].

Оказывается, что подобие элементов рефлексивно, симметрично и транзитивно, и что элемент, подобный произведению, равен произведению элементов, подобных множителям. Простой элемент определяется аналогично коммута-

[1] Наиболее полные результаты даны в статье **Ore** «Theory of noncommutative polynomials» («Annals of mathematics», m. 34, 1933 г.).

[2] Термин перенесен с колец линейных дифференциальных операторов (см. упомянутую статью **Ore**).

тивному случаю; из указанных свойств подобия следует, что элемент, подобный простому, простой. Элементы, имеющие хотя бы одно разложение в произведении конечного числа простых множителей, будут называться элементами конечной длины. Например, в кольцах с теоремой о базисе для правых идеалов каждый элемент имеет конечную длину. Однозначность разложения элементов конечной длины устанавливается следующей теоремой:

Теорема 1-я. Пусть

$$a = p_r \ldots p_2 p_1 \qquad (1)$$

разложение элемента А в произведение простых множителей, и

$$a = a_s \ldots a_2 a_1 \qquad (2)$$

любое разложение элемента а. Тогда $s \leqslant r$. Если $s = r$, то все множители разложения (2) простые и попарно подобны с множителями разложения (1). Если $s < r$, то среди множителей (2) имеются разложимые.

Если L (a) обозначает длину разложения элемента a, d — наибольший общий делитель, m — наименьшее общее кратное элементов a и b конечной длины, то можно доказать, что

$$L(m) + L(d) = L(a) + L(b) = L(ab)$$

Из теоремы 1-й, далее, следует, что условие существования композиционного ряда для идеала (a) равносильно условию конечности длины элемента a, причём длина композиционного ряда равна L (a).

Пересечение конечного или бесконечного числа максимальных идеалов называется вполне приводимым идеалом[1]. Можно доказать, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вполне приводимый идеал (a) мог быть представлен в виде несократимого пересечения конечного числа максимальных идеалов

$$(a) = (p_1) \cap \ldots \cap (p_n)$$

состоит в том, чтобы он имел конечную длину; при этом $n = L(a)$.

Пусть (b) — произвольный идеал (m) — пересечение всех его максимальных делителей. Тогда $b = b_1 m$. Аналогично

[1] Термин Оге.

$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2\mathfrak{m}'$ и т. д. Если $\mathfrak{b}$ имеет конечную длину, то получаем однозначное разложение $\mathfrak{b}$ произведение наибольших вполне приводимых делителей:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_r \ldots \mathfrak{m}_1 \; \mathfrak{m}$$

Если под взаимно простой системой идеалов понимать такую конечную систему идеалов, в которой каждый идеал взаимно прост с пересечением остальных, то можно установить следующий критерий:

чтобы система идеалов была взаимно простой, необходимо и достаточно, чтобы идеалы этой системы могли быть представлены в виде такой последовательности, в которой каждый идеал был бы взаимно прост с пересечением предыдущих. Используя свойства взаимно простой системы идеалов, можно доказать следующую теорему разложения:

Теорема 2-я. Каждый идеал может быть представлен в виде пересечения взаимно простой системы идеалов, каждый из которых уже непредставим в виде пересечения взаимно простых делителей. Для идеалов конечной длины такое разложение однозначно с точностью до подобия, т. е. если (a) — идеал конечной длины и

$$(a) = (b_1) \cap \ldots \cap (b_n)$$

$$(a) = (c_1) \cap \ldots \cap (c_m)$$

два разложения (a) $\mathfrak{b}$ пересечение взаимно простой системы идеалов, то $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ и идеалы обоих разложений попарно подобны. Любой идеал одного разложения может быть заменён подобным идеалом из другого разложения.

Между разложением идеала (a) в пересечение взаимно простой системы идеалов

$$(a) = (b_1) \cap \ldots \cap (b_r)$$

и разложением элемента a в произведение наибольших вполне приводимых длителей

$$a = a_s \ldots a_1 \qquad (3)$$

может быть установлена следующая связь: пусть

$$b_i = m_{s_i}^{(i)} \ldots m_1^{(i)}$$

разложение b_i в произведение наибольших вполне приводимых делителей. Тогда для каждого a_j из (3) имеем:

$$(a_j) = \overline{(m_j^{(i)})} \cap \ldots \cap (\overline{m}_j^{(r)}),$$

где $\overline{m}_j^{(i)}$ подобно $m_j^{(i)}$.

В рассматриваемом кольце может быть установлен следующий критерий неприводимости идеалов: необходимое и достаточное условие для того, чтобы идеал конечной длины был неприводим состоит в том, чтобы его базисный элемент делился слева только на один простой элемент.

Статья выполнена на кафедре высшей алгебры под руководством Я. Б. Лопатинского.