ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
1952

МВО СССР

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ив. ФРАНКО

ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. А. М. ГОРЬКОГО

ХАРЬКОВ 1952

Печатается по распоряжению
ректора Львовского государственного университета
члена-корреспондента АН УССР Е. К. Лазаренко.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Двести лет тому назад великий русский ученый и просветитель М. В. Ломоносов сказал в своей замечательной речи «Слово о пользе химии»: «...математика очами физическими по справедливости называться может». Но «не такой требуется математик, который только в трудных выкладках искусен, но который в изобретениях и доказательствах привыкнув математической строгости, в натуре сокровенную правду точным и непоползновенным порядком вывесть умеет».

В унисон этим словам звучат слова другого замечательного ученого прошлого — Галилео Галилея: «Философия написана в грандиознейшей книге, которая открыта для всех и каждого, я говорю о природе, но понять ее может только тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее — математические формулы».

Естественно, что в наше время, в век техники и научного естествознания, роль математики в деле технического и научного прогресса возросла неизмеримо и оценка, данная математике двумя величайшими учеными прошлого, в полной мере сохранила свое значение и в наши дни.

Для советского человека не возникает даже вопроса о необходимости всестороннего развития науки в нашей стране для целей познания природы и овладения ее силами, для дальнейшего развития и процветания нашей Родины, для непрерывного укрепления ее мощи. Эту точку зрения на науку принесла только Великая Октябрьская революция, только социалистические преобразования нашей страны.

В дореволюционный период в нашей стране встречаются имена в высшей степени выдающихся математиков, внесших в науку новые революционные идеи, проложивших новые пути ее развития, но это были одиночки. В наше время, в советское время, перед глазами возникает иная картина: в нашей стране работают уже не одиночки, а большие коллективы талантливых ученых, создавших и создающих новые методы математического исследования, поставившие советскую математику на первое место в мире. Это объясняется тем, что впервые в истории человечества двери университетов и научных учреждений открылись перед всей нашей одаренной молодежью. С другой стороны, научное творчество поставлено на фундамент передового философского мировоззрения. Математика испытала на себе решающее влияние марксистско-ленинской диалектики. Математики стали смотреть на свою науку не как на личное дело, а как на часть общего дела всех советских ученых — познания материального мира и его покорения человеком. Эта точка зрения совершенно противоположна распространенному в современной буржуазной науке формализму и схематизму, стремящемуся оторвать математику от задач познания реального мира, образовать какой-то собственный мир, существующий лишь в математике и для математики. Вот почему в органическом слиянии чистой и прикладной математики проявляется наиболее яркая и философски наиболее значительная, принципиальная особенность советской математики.

Но советская наука не может ограничиться только созданием новых ценностей и при этом замкнуться в себе. Отличительная черта советской науки состоит в том, что она стремится сделать основные свои результаты достоянием широких масс советского народа. Поэтому в нашей стране приобретают особенно важную роль журналы и сборники, пропагандирующие успехи науки, рассказывающие доступным и увлекательным языком о замечательных ученых прошлого и настоящего времени, о развитии крупнейших советских математических школ, о принципиальных методологических проблемах современной математики и о том, как эти проблемы трактуются с точки зрения философии марксизма-ленинизма.

К сожалению, до сих пор у нас нет журнала подобного направления. До войны выходил сборник «Математическое просвещение», преследовавший примерно те же цели, о которых только что говорилось. Его редактор, энтузиаст своего дела — Р. Н. Бончковский, во время Великой Отечественной войны был добровольцем в рядах Советской Армии и погиб на фронте, после чего сборник уже больше не выходил.

Считая крайне полезным издание сборника характера «Математического просвещения» для широкого круга читателей, физико-математический факультет Львовского государственного университета организует издание аналогичного «Математическому просвещению» сборника «Вопросы элементарной и высшей математики». В сборнике предполагается помещать оригинальные научные статьи и заметки, посвященные отдельным вопросам элементарной и высшей математики; статьи по методологии и истории математики, а также статьи, предназначенные для использования в работе математических кружков.

Кроме того, в сборнике будут отделы задач, библиографии и переписки с читателями.

Редакция обращается с просьбой к читателям присылать свои замечания, пожелания и предложения по адресу: г. Львов, Щербакова, 4, Физико-математический факультет ЛГУ, редакции сборника «Вопросы элементарной и высшей математики».

Редакция

И. Ф. ТЕСЛЕНКО

АКАДЕМИК ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ГРАВЕ

В декабре 1939 г., в Киеве умер действительный член Украинской Академии наук и почетный член Академии наук СССР Дмитрий Александрович Граве, талантливый математик, продолжатель дел славной «Петербургской школы», известный алгебраист и общественный деятель.

Д. А. Граве был одним из самых разносторонних русских математиков, автор многочисленных важных исследований в различных областях математики, большого количества книг и монографий; он был создателем одной из крупнейших в Союзе математических школ — Киевской алгебраической школы, большинство учеников которой в настоящее время являются самостоятельными учеными и уже имеют собственных учеников.

В числе учеников Граве были академик О. Ю. Шмидт, члены-корреспонденты АН СССР Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарев, такие крупные ученые как член-корреспондент АН УССР Н. И. Ахиезер, профессора Е. И. Жилинский, А. М. Островский и др.

Доминирующими положениями во всей работе «Петербургской школы», организатором и руководителем которой был знаменитый русский математик П. Л. Чебышев, были: конкретность, четкость в постановке проблем и доведение их решений до конца.

Математические вкусы Дмитрия Александровича определились под влиянием «Петербургской школы» и выявились в решении ряда вопросов прикладной математики, которая не удовлетворяется доказательствами существования решения, а всегда ищет алгорифмов.

Ученик П. Л. Чебышева, Д. А. Граве, постоянно руководствуясь в своей работе мыслью, что «надо заниматься не тем, что интересно и любопытно, а тем, что важно и необходимо», посвящал свой талант всегда важнейшим и актуальнейшим проблемам науки. При этом он обладал широкими математическими интересами. Так, наряду с первыми в России работами, посвященными труднейшим и абстрактнейшим вопросам алгебры, теории чисел и теории групп (теории Галуа), Дмитрий Александрович написал ряд работ по математическим основам картографии, по интегрированию диференциальных уравнений в частных производных и другим вопросам.

Д. А. Граве родился в 1863 году в городе Кириллове, Новгородской губернии. Десяти лет поступил в С.-Петербургскую частную гимназию О. Бычкова, автора известного сборника алгебраических задач, и окончил ее в 1881 году с золотой медалью. Осенью того же года Граве поступил в число студентов физико-математического факультета Петербургского университета и успешно закончил его в 1885 году. В университете учителями его были П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин, Е. Н. Золотарев, А. А. Марков.

Уже на студенческой скамье он начал научную работу, участвуя в издававшихся кружками студентов физико-математического факультета сборниках.[1]

По окончании университета Граве был оставлен при университете «для приготовления к профессорскому званию». Одновременно с прохождением, как мы сказали бы теперь, аспирантуры он работал преподавателем Института Путей Сообщения, а затем — Высших женских курсов (Бестужевских).

Двадцати шести лет он защитил магистерскую диссертацию «Об интегрировании частных диференциальных уравнений первого порядка» (1889 г.). В этой диссертации были обобщены и существенно изменены известные до него методы решения уравнений подобного типа и решена задача о нахождении всех интегралов системы диференциальных уравнений в проблеме трех тел, не зависящих от закона действия сил. При этом пришлось решать систему из четырех уравнений в частных производных, интегрирование которых представляло значительные трудности. При решении этой задачи Граве проявил необычайное искусство в алгебраических выкладках.

Через семь лет после защиты магистерской Д. А. защитил докторскую диссертацию «Об основных задачах математической теории построения географических карт». В ней был решен вопрос, которому неоднократно уделял свое внимание П. Л. Чебышев. До него этим вопросом интересовались среди прочих Эйлер и Лагранж, а позднее — А. Н. Коркин и А. А. Марков.

Д. А. Граве в своей диссертации дает решение ряда общих проблем диференциальной геометрии, хотя по заглавию ее можно было бы подумать, что она посвящена узкому конкретному вопросу.

Д. А. Граве поставил себе задачу, предложенную А. Н. Коркиным, найти всевозможные эквивалентные (т. е. сохраняющие площади) проекции шара на плоскость, при которых меридианы и параллели изображаются прямыми или кругами.

Лагранж дал решение этой задачи, но лишь для случая, когда проекция одновременно и конформная.

Дмитрий Александрович дал полное решение задачи. Оказалось, что имеется 11 единственно возможных таких проекций,[2] из которых наивыгоднейшими автор считает те, при применении которых меридианы и параллели взаимно ортогональны; все понадобившиеся при этом исследовании трудные вычисления проведены Д. А. с необычайным алгебраическим мастерством. Практическое значение решенной Д. А. задачи связано в частности с тем, что вычерчивание карт, где меридианы и параллели имеют форму кривых, отличных от прямых и окружностей, технически весьма сложно.

Эта работа произвела громадное впечатление на математиков того времени.

Вторая часть диссертации решала вопрос, поставленный Чебышевым, о нахождении наивыгоднейших из всех проекций, сохраняющих подобие в бесконечно малых частях.

---

[1] «Записки Физико-Математического общества студентов С.-Петербургского Университета», т. I, 1884—1885 гг.

[2] См. приложение в конце статьи.

П. Л. Чебышев дал ответ на свой вопрос в 1853 году в виде теоремы без доказательства, полученной из приложения теории функций, наименее уклоняющихся от нуля к уравнениям с частными производными, в следующем виде:

«Окончательное решение задачи о наивыгоднейшей проекции карт очень просто: наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину».[1]

Д. А. в диссертации доказал эту замечательную теорему. В 1911 г. он снова вернулся к этой задаче и обобщил свое доказательство на любые поверхности, имеющие гауссову кривизну постоянного знака, и значительно упростил доказательство.

Кроме этого, Дмитрий Александрович дал в своей докторской диссертации новый способ решения задачи Дарихле для алгебраических контуров и решил ряд частных задач по картографии.

Подробное изложение содержания обеих диссертаций и их оценку можно найти в статье Н. Г. Чеботарева («Успехи математических наук», вып. III, 1937 г., стр. 222—228).

После нескольких лет преподавания математики в Петербурге Д. А. Граве получает кафедру в Харьковском университете. Там он печатает свою написанную также в духе чебышевской школы работу «Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных», в которой, между прочим, развивает теорию особых «полиэдральных» функций, предвосхищая некоторые методы Лебега. Понятие об этих функциях Д. А. Граве позднее сумел включить даже в свою популярную книгу «Энциклопедия математики».

В первые годы двадцатого века Д. А. почти ничего не писал. Продолжительная болезнь (туберкулез) оторвала его от работы. Переборов болезнь, с 1908 года, когда он был уже профессором Киевского университета, Д. А. вступает во второй период подъема творческой деятельности. В этот период Д. А. направляет свои исследовательские интересы на вопросы алгебры и теории чисел, писательские — на составление большого числа руководств по общим и специальным разделам университетского курса, организационные — на создание школы алгебраистов. По всем этим линиям он достиг чрезвычайных результатов.

К этому периоду относится написание Д. А. большого количества курсов: «Теория групп», «Элементарный курс теории чисел», «Элементы теории эллиптических функций», «Основы аналитической геометрии», «Энциклопедия математики», «Математика страхового дела», «Элементы высшей алгебры» и др.

Как «элементарный» курс теории чисел, так и «элементы» высшей алгебры являлись самыми богатыми по содержанию и самыми свежими по своим идеям курсами, выходившими далеко за пределы дореволюционных университетских программ.

Выход в свет общих курсов Д. А. Граве были событиями в русской математической литературе; событиями исключительного значения были выходы его специальных курсов «Теория групп», «Математика страхового дела» и др. Эти книги пользовались большой популярностью среди учащейся молодежи, так как они отличались свежестью и новизной материала. Ученик Д. А. Граве, крупный математик

---

[1] См. статью П. Л. Чебышева «Черчение географических карт» (1856) в книге П. Л. Чебышева «Избранные труды» (Г. Т. Т. И., 1946).

нашего времени, Н. Г. Чеботарев выразил это такими словами: «А мой учитель Граве! Как он упорно и самоотверженно боролся с академическим средневековьем». (Успехи Математических Наук, 1948). В свои книги Д. А. умел вложить тот научный энтузиазм, которым он сам обладал в высокой степени. Можно без особого преувеличения сказать, что книги Д. А. воспитали и привили вкус к математике большинству современных математиков нашей страны.

Укажем на «Начала алгебры» (Классное руководство для гимназий и других средних учебных заведений, Петербург, 1915) как на единственный русский учебник алгебры для средней школы, стоящий на высоте современных научных требований. Изложенные в этом руководстве вопросы теории рациональных и иррациональных чисел весьма близки к их изложению в нашей средней школе, поэтому «Начала алгебры» полезны преподавателям математики средних школ и теперь.

В дополнение к этому учебнику Д. А. в 1915 г. выпустил брошюру, рассылавшуюся им преподавателям бесплатно: «Проф. Дмитрий Граве. О преподавании алгебры. Методические указания в книге того же автора «Начала алгебры» Д. Граве, изд. К. Л. Риккера, 1915 г.».

С этим полезно ознакомиться нашим учителям математики.

Особо нам хотелось отметить весьма интересно написанную «Энциклопедию математики» (изд. 1912 г., Киев, стр. 600). Она выгодно отличается по содержанию от раньше изданных сочинений такого же рода в русской и иностранной литературе. В ней помещены краткие обзоры всех отделов современной математики, причем обращено особое внимание на идейную сторону дела, указаны цели и основные методы математического исследования. А живое, увлекательное и связное изложение книги делают ее доступной и полезной широким кругам нашей советской интеллигенции, не занимающейся математикой. Здесь читатель может довольно обстоятельно познакомиться и с аналитической геометрией, и с диференциальным и интегральным исчислением и с теорией чисел; получить понятие о невозможных задачах в математике, о наименее уклоняющихся от нуля полиномах, о черчении географических карт, о математической физике, о теории вероятностей и об устройстве и математических принципах рулетки и мн. др.

В предисловии к «Энциклопедии математики» Д. А. пишет: «Посвящаю свою книгу, главным образом, истинным любителям математики, особенно живущим в провинции, вдали от университетских центров, я также хотел бы, чтобы она помогла ученикам старших классов средних учебных заведений, имеющих склонность к математике, при окончательном выборе жизненной деятельности».

Учитель математики средней школы найдет в гл. XV, посвященной вопросам преподавания математики, ценные советы и положения, относящиеся к методике обучения элементарной математике.

Ученик Граве, крупный советский математик член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, пишет:

«Д. А. Граве был замечательным профессором, лекции его отличались глубиной мысли и необыкновенным блеском изложения. Д. А. считал, что и общеобразовательные курсы (аналитическая геометрия, высшая алгебра, теория чисел) должны давать широкую картину предмета, причем надо подчеркивать связи между отдельными математическими предметами».[1]

[1] «Известия АН СССР», т. 4, стр. 349—356.

Д. А. ГРАВЕ

Д. А., чуть ли не первым в России, ввел специальные курсы и семинары по математике, участниками которых были почти все алгебраисты старшего поколения нашей страны. Такие семинары проводились по теории групп, теории идеалов, теории Галуа, квадратичному полю, числам Бернулли, эллиптическим функциям и т. д. и привлекали молодежь с самых первых курсов университета. Все участники семинаров тщательно работали над современными авторами и реферировали всю текущую литературу по интересующим их вопросам и одновременно постоянно изучали работы классиков математики.

В 1918 году в Киеве была основана Украинская Академия наук, в которую Д. А. был приглашен как лучший математик Украины в качестве одного из первых действительных членов. С Академией наук УССР связан большой период деятельности Граве.

Далекий от революционного движения в прошлом, Д. А. с первых дней революции встал на путь сотрудничества с Советской властью, на путь создания науки. С этих пор начался третий период деятельности Д. А. Он характеризуется переключением интересов Д. А. и его энергии на механику и вообще на прикладную математику. В чисто математических работах, близких к математической физике, Д. А. решает весьма общую задачу нахождения линейных диференциальных выражений, инвариантных относительно преобразований линейной группы. Задача решается посредством громадных выкладок, весьма остроумно расположенных. В другой работе Д. А. предложил изящный алгорифм для решения задачи покрытия шара сеткой, пользуясь формулами, выведенными при помощи сферической тригонометрии. Кроме того, Д. А. написал несколько работ по технической и небесной механике, где, вводя в рассмотрение электромагнитные силы, он дал качественное объяснение неравенства движения перигелиев планет, получив для них величины, пропорциональные наблюдаемым; по магнитным возмущениям; по коррозии металлов и т. д.

С последним периодом жизни Д. А. связано также составление его «Трактата по алгебраическому анализу», три тома которого Д. А. успел написать до смерти. Это сочинение вводит читателя, пользуясь элементарными средствами, в круг современных идей алгебры.

Отдавая научной работе много времени и энергии, Д. А. Граве находил время и для общественной работы. Так, в 1923 году он был избран членом Киевского Горсовета.

За научные заслуги Граве в 1929 году был избран почетным членом Академии наук СССР. В 1935 году математический мир и широкая советская общественность организовали торжественное празднование 50-летнего юбилея его научно-педагогической деятельности. Правительство тогда наградило его орденом Трудового Красного Знамени.

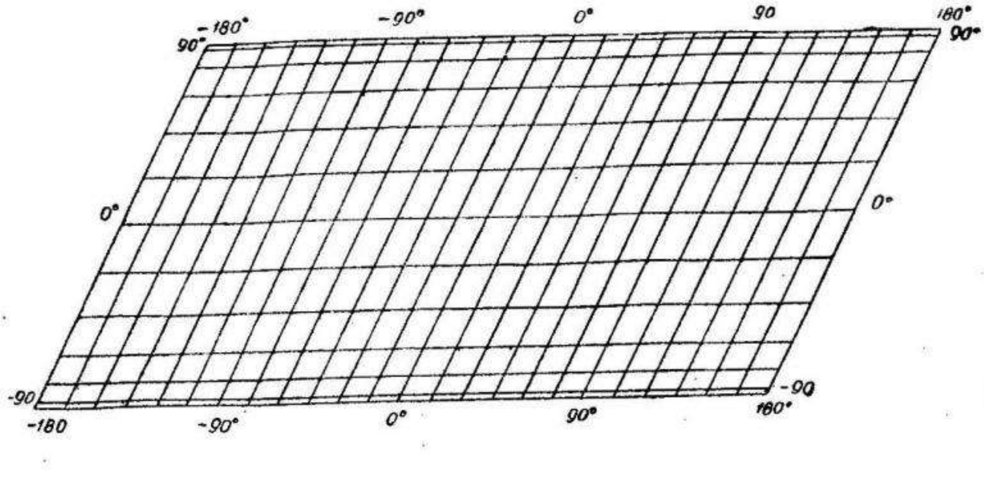
Д. А. Граве прожил 76 лет, до конца жизни не переставая работать на пользу нашей отечественной, советской науки.

Его жизнь будет долго служить примером для новых поколений советских ученых.

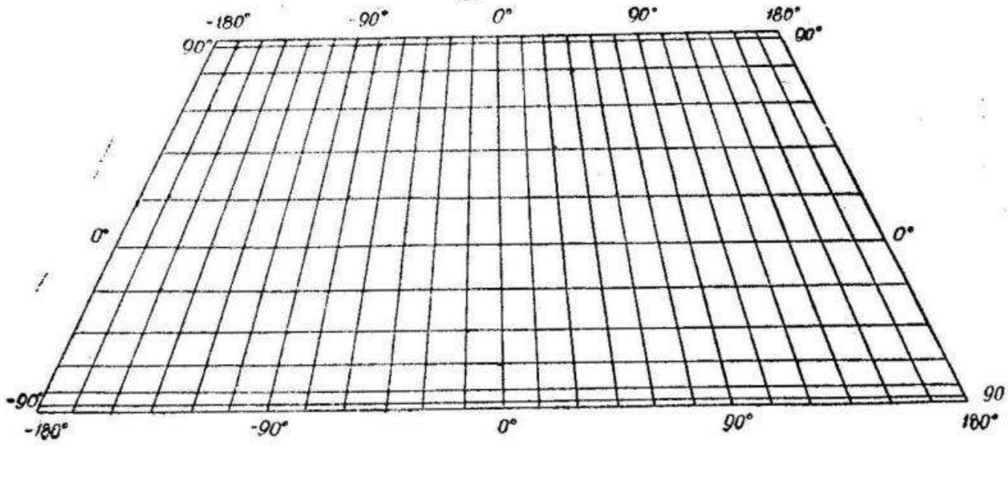
Приложение

ПРОЕКЦИИ И ЧЕРТЕЖИ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ, ДАННЫХ Д. А. ГРАВЕ

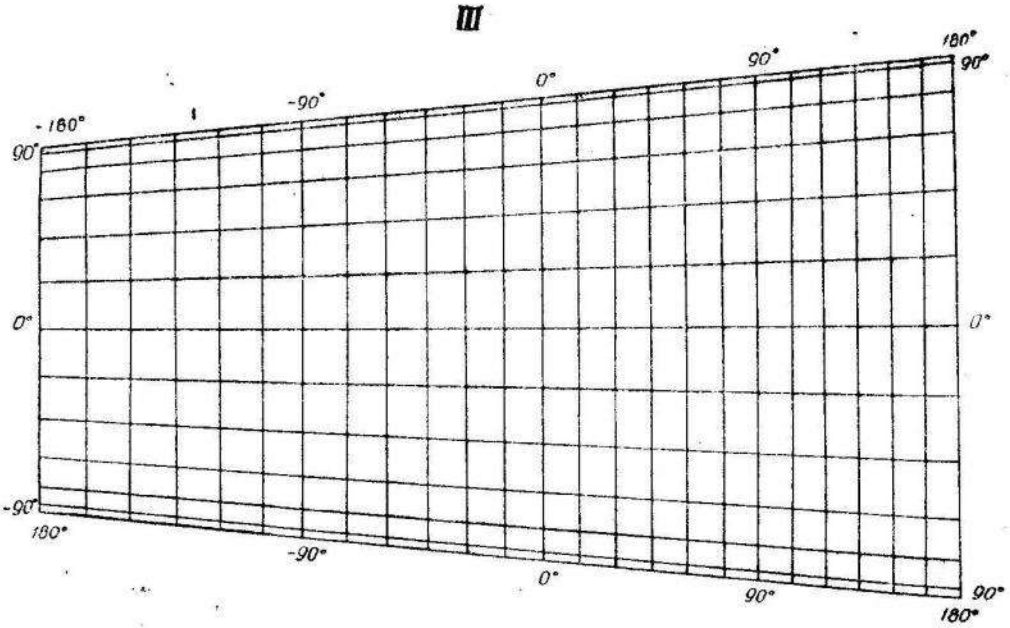
I



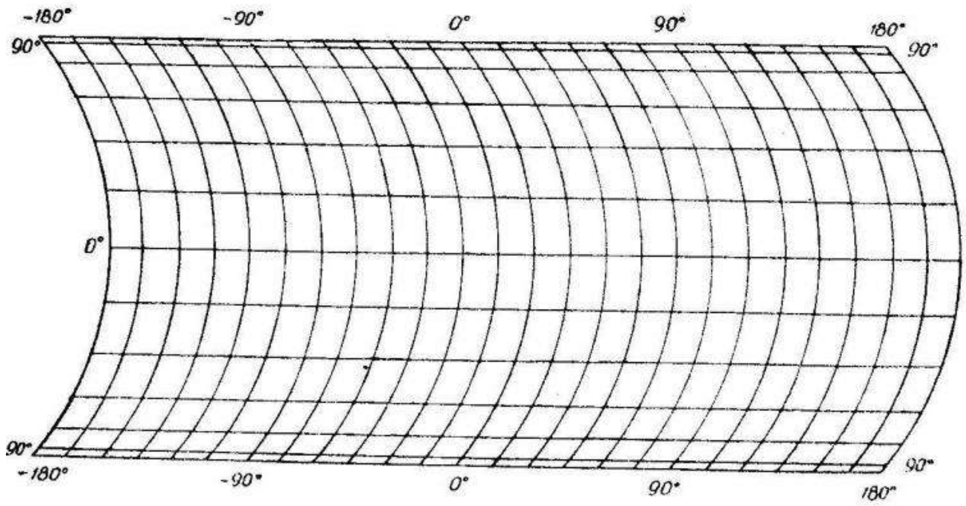
II



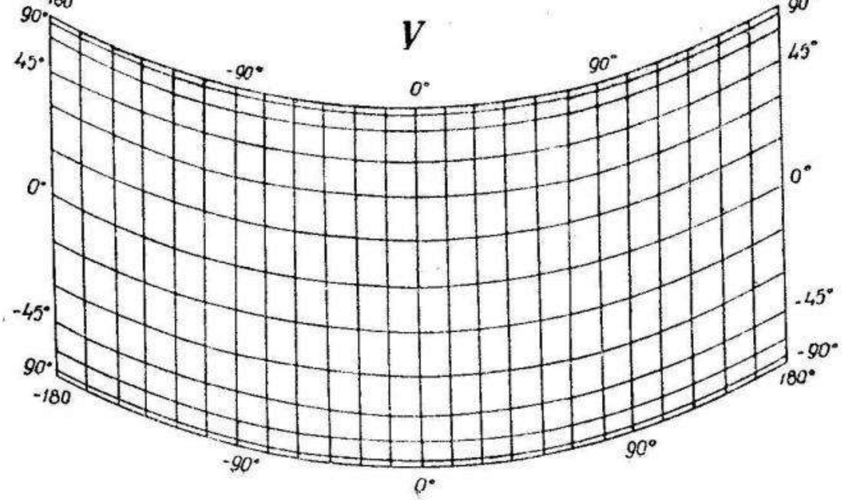
III


-180°
-90°
0°
90°
180°
90°
90°
0°
0°
-90°
180°
-90°
0°
90°
90°
180°

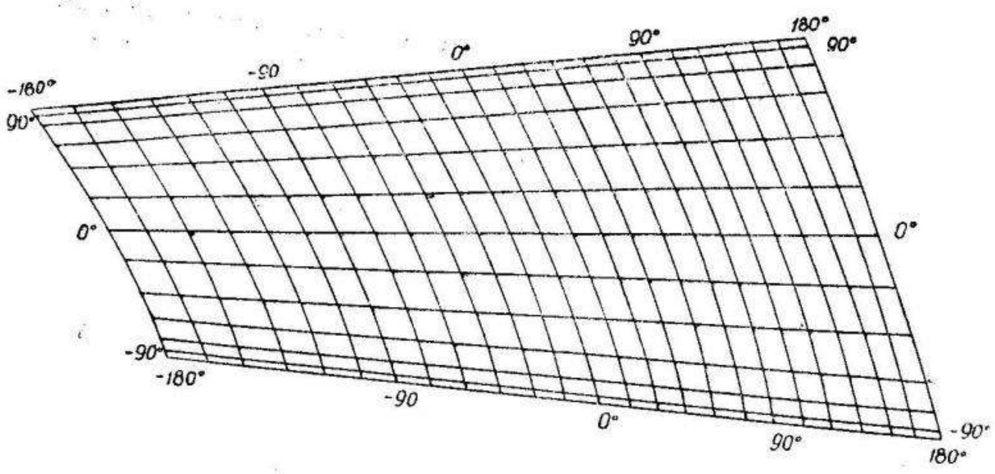
IV


-180°
-90°
0°
90°
180°
90°
90°
0°
0°
90°
-180°
-90°
0°
90°
90°
180°

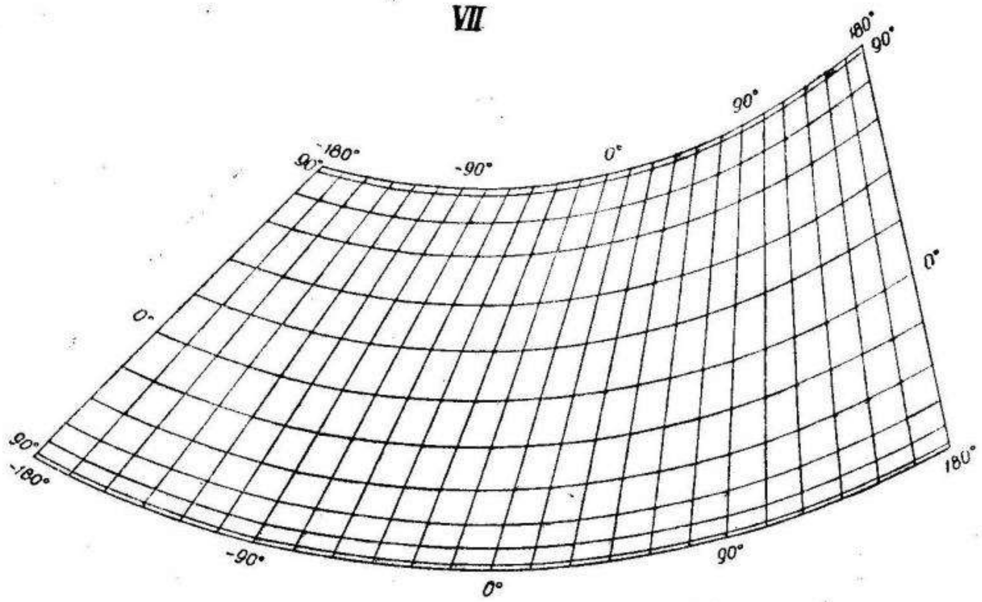
V


-180
90°
45°
-90°
0°
90°
180°
90°
45°
0°
0°
-45°
-45°
90°
-180
-90°
180°
-90°
90°
0°

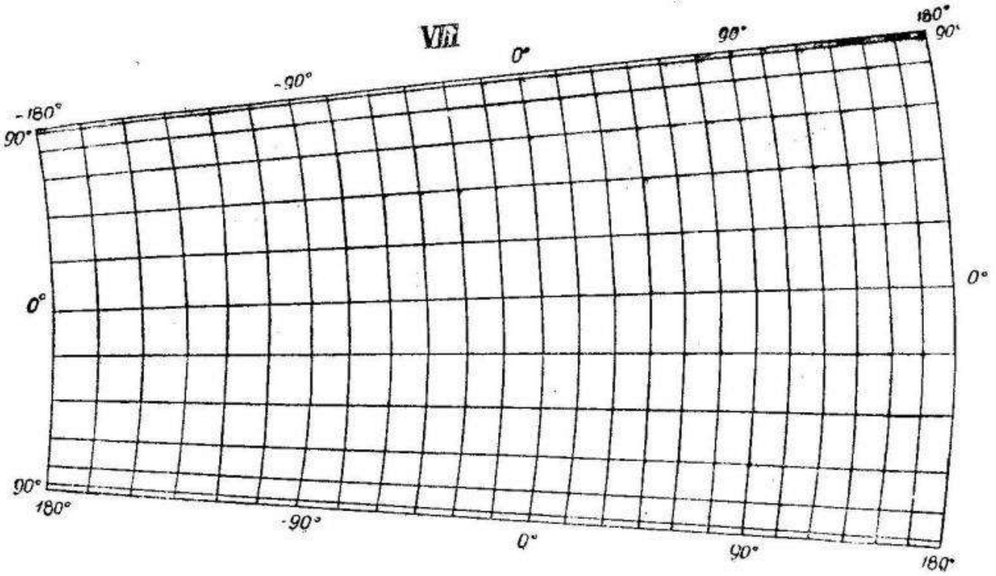
VI


-180°
90°
-90
0°
90°
180°
90°
0°
0°
-90°
-180°
-90
0°
90°
-90°
180°

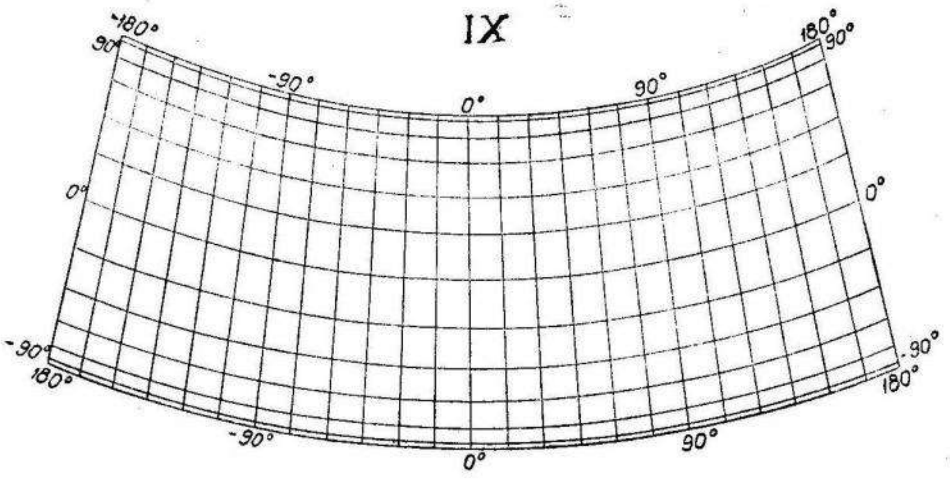
VII


180°
90°
-90°
0°
90°
180°
90°
0°
0°
90°
-180°
-90°
0°
90°
180°

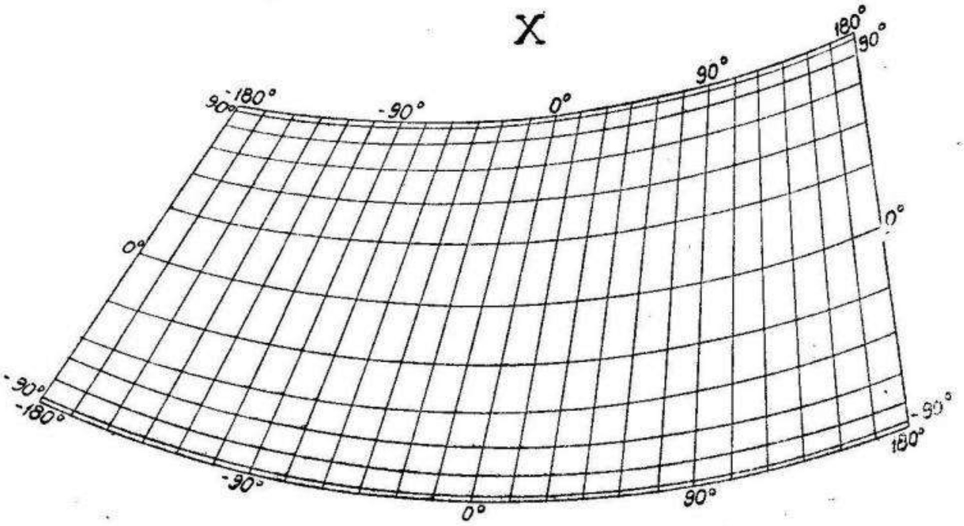
VIII


-180°
90°
-90°
0°
90°
180°
90°
0°
0°
90°
180°
-90°
0°
90°
180°

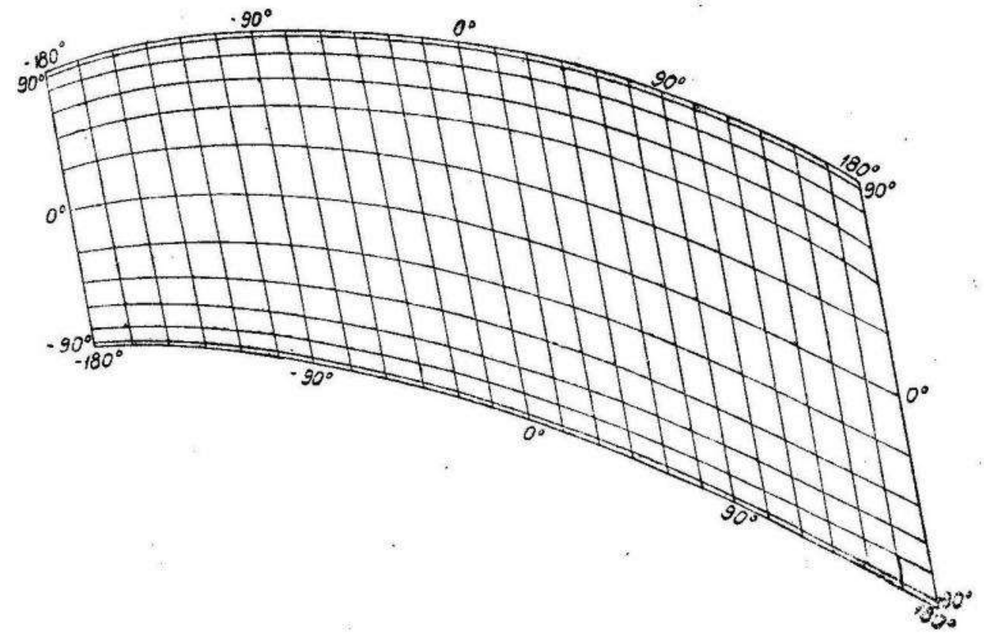
IX


-180°
90°
-90°
0°
90°
180°
90°
0°
0°
-90°
180°
-90°
180°
-90°
0°
90°

X


90°
-180°
-90°
0°
90°
180°
90°
0°
0°
-90°
-180°
-90°
180°
-90°
0°
90°

XI


-180°
90°
-90°
0°
90°
180°
90°
0°
-90°
-180°
-90°
0°
0°
90°

I. $\left.\begin{array}{l} x = au + \alpha v \\ y = bu + \beta v \end{array}\right\} a\beta - b\alpha = 1$ a, b координаты огибающей меридианов

II. $\left.\begin{array}{l} x = (av + b)\sqrt{2ku + l} \\ y = (\alpha v + \beta)\sqrt{2ku + l} \end{array}\right\} k\,(a\beta - a\beta) = 1$

III. $\left.\begin{array}{l} x = (au + b)\sqrt{2kv + l} \\ y = (\alpha u + \beta)\sqrt{2kv + l} \end{array}\right\} k\,(b\alpha - a\beta) = 1$

IV. $x = a - \dfrac{u + w}{b}$

$y = y - bv + \beta + \dfrac{1}{b}\sqrt{b^2\varrho^2 - (u + w)^2}$ ϱ зависит от v, y, w зависит от v

V. $x = a - \dfrac{v + w}{b}$

$y = bu + \beta + \dfrac{1}{b}\sqrt{b^2\varrho^2 - (v + w)^2}$

VI. $x = \delta\cos\dfrac{u + \varepsilon}{k} - \sin\dfrac{u + \varepsilon}{k}\sqrt{2kv + e}$

$y = \delta\sin\dfrac{u + \varepsilon}{k} - \cos\dfrac{u + \varepsilon}{k}\sqrt{2kv + e}$

VII. $x = \delta\cos\dfrac{v + \varepsilon}{k} - \sin\dfrac{v + \varepsilon}{k}\sqrt{2ku + e}$

$y = \delta\sin\dfrac{v + \varepsilon}{k} + \cos\dfrac{v + \varepsilon}{k}\sqrt{2ku + e}$

VIII. $\begin{array}{l} x = \sqrt{2kv + e}\left(\dfrac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right) \\ y = \sqrt{2kv + e}\left(\dfrac{\mu}{k} + \sin\varphi\right) \end{array} \quad \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = u + \sigma$

IX. $\begin{array}{l} x = \sqrt{2ku + e}\left(\dfrac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right) \\ y = \sqrt{2ku + e}\left(\dfrac{\mu}{k} + \sin\varphi\right) \end{array} \quad \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = v + \sigma$

X. $\left.\begin{array}{l} x = \cos\dfrac{u+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\varrho^2 + A^2 - R^2}{2A} - \sin\dfrac{u+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A} \\ y = \sin\dfrac{u+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\varrho^2 + A^2 - R^2}{2A} + \cos\dfrac{u+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varrho = \sqrt{2kv + e} \\ \Delta = \sqrt{4A^2\varrho^2 - (\varrho^2 + A^2 - R^2)^2} \end{array}$

XI. $\left.\begin{array}{l} x = \cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\varrho^2 + A^2 - R^2}{2A} - \sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A} \\ y = \sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\varrho^2 + A^2 - R^2}{2A} + \cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\cdot\dfrac{\Delta}{2A} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varrho = \sqrt{2ku + e} \\ \Delta = \sqrt{4A^2\varrho^2 - (\varrho^2 + A^2 - R^2)^2} \end{array}$

И. Г. СОКОЛОВ

ПАМЯТИ ЛЬВА ГЕНРИХОВИЧА ШНИРЕЛЬМАНА

Летом 1938 года умер выдающийся советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР Лев Генрихович Шнирельман.

Л. Г. Шнирельман родился в январе 1905 года в гор. Гомеле, в семье учителя русского языка. Интерес к математике появился у Л. Г. очень рано: в двенадцать лет он самостоятельно детально изучил курс элементарной математики, а к шестнадцати годам овладел основными предметами университетского курса. К 15-летнему возрасту относится и его первая самостоятельная работа, посвященная решению уравнений в радикалах. Развитию математических интересов Л. Г. способствовал гомельский математик Л. И. Креер (впоследствии профессор Северо-кавказского пединститута). О своем учителе Л. И. Креере Лев Генрихович вспоминал всегда с большим уважением.

В 1921 году, еще совсем мальчиком, Л. Г. приехал учиться в Московский университет. Это было время расцвета школы теории функций Н. Н. Лузина. Л. Г. принимает активное участие в научных семинарах Н. Н. Лузина, слушает специальные курсы Лузина по теории функций, Урысона — по топологии, Хинчина — по диофантовым приближениям. Очень скоро Н. Н. Лузин обратил внимание на талантливого юношу и предложил ему темы для самостоятельной научной работы. Модная в то время в школе Лузина проблема континуума заинтересовала и Л. Г. Работая над этой трудной проблемой и не получая конкретных результатов, Л. Г. (как он сам говорил впоследствии) разуверился в своих силах и даже на короткое время оставил занятия математикой. Однако природные способности и интерес к науке помогли ему быстро побороть эти настроения и вновь заняться научной работой.

В студенческие годы Лев Генрихович сделал ряд работ по алгебре и топологии.

В 1924 году Л. Г. был зачислен аспирантом в институт математики и механики I-МГУ. Ко времени его пребывания в аспирантуре относится цикл важных работ (совместно с Л. А. Люстерником) по топологическим методам анализа. Эти работы создали новое направление в топологических методах вариационного исчисления. Это направление развивается и в настоящее время, главным образом, Л. А. Люстерником и его учениками. Закончив аспирантуру и блестяще защитив диссертацию на тему о качественных методах анализа, Л. Г. в 1929 году переезжает в гор. Новочеркасск, где работает около года профессором и зав. кафедрой математики Донского Политехнического института. В Новочеркасске Л. Г. написал свою знаменитую работу по аддитивной теории чисел. Нужной ему литературы для этой работы в библиотеках Новочеркасска не оказалось. Однако, он быстро сумел восстановить доказательства всех нужных ему теоретико-числовых и функциональных теорем. Работа Л. Г. «Об аддитивных свойствах чисел», напечатанная в «Известиях Донского Политехнического института» (1930), сразу выдвинула его в ряды ведущих математиков СССР. Л. Г. возвращается в Москву, где он вскоре становится профессором I-го Московского госуниверситета. В 1933 году за выдающиеся математические исследования Академия наук СССР выбирает Льва Генриховича своим членом-корреспондентом. В Московском университете и в Институте математики АН СССР и протекает работа Л. Г. до его смерти.

Научное творчество Л. Г. протекало в самых разнообразных областях математики. Не имея возможности в краткой статье подробно изложить все стороны научной деятельности Л. Г., мы остановимся на двух циклах его работ: на работах по аддитивной теории чисел и на работах по топологическим методам вариационного исчисления.

Теория чисел издавна привлекала к себе внимание крупнейших математиков. Проблемы этой теории замечательны тем, что обычно они весьма просто формулируются, но решения их зачастую представляют почти непреодолимые трудности. При этом существенные сдвиги в теории чисел сопровождаются появлением новых теорий и методов. Значение методов, применяемых для решения теоретико-числовых задач, выходит далеко за пределы теории чисел. Достаточно напомнить теорию идеалов Золотарева и Кронекера, которая была вызвана к жизни при попытке доказать великую теорему Ферма. Приведем примеры двух знаменитых проблем аддитивной теории чисел.

I. ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

В письме от 17/VI 1742 года член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах сообщил Эйлеру следующее предположение:

«Любое целое число есть сумма не более чем трех простых чисел».

Л. Г. Шнирельману принадлежит заслуга получения первых важных результатов в этой проблеме. Наиболее законченные результаты в проблеме Гольдбаха принадлежат акад. И. М. Виноградову, почти полностью разрешившему эту проблему.

II. ПРОБЛЕМА ВАРИНГА

«Каждое целое число может быть представлено как сумма ограниченного числа m *— тых степеней чисел натурального ряда. При этом потребное число слагаемых не зависит от разлагаемого числа, а зависит только от показателя* «m».

Проблема Варинга, поставленная также в XVIII веке, получила полное решение уже в наше время. Впервые ее решение было дано Гильбертом в 1907 г. Затем было дано еще несколько различных решений (акад. Виноградовым, Харди и Литльвудом, Шнирельманом). Наиболее простое и элементарное решение этой проблемы было получено применением метода Шнирельмана (в 1942 г.) советским математиком Линником.

Для удобства дальнейшего изложения введем некоторые определения.

Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН
(1905 — 1938)

Пусть нам даны k последовательностей целых чисел, начинающихся с нуля:

$$0 = n_0^{(1)}, n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \ldots, n_m^{(1)}, \ldots$$

$$0 = n_0^{(2)}, n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_m^{(2)}, \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = n_0^{(k)}, n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \ldots, n_m^{(k)}, \ldots$$

Выберем по одному числу из каждой последовательности и сложим между собою эти числа. Совокупность всех построенных таким образом чисел можно расположить в виде некоторой новой последовательности, пусть $\{e_m\}$, называемой *суммой данных последовательностей.* Таким образом, последовательность $\{e_m\}$ состоит из всех чисел вида:

$$n_i^{(1)} + n_j^{(2)} + \ldots + n_p^{(k)}$$

и, следовательно, в частности, содержит все члены данных последовательностей (чтобы их получить нужно складывать члены одной последовательности с нулевыми членами остальных (k—1) последовательностей).

Если сумма k *одинаковых последовательностей* $\{n_i\}$ *охватывает все натуральные числа, но сумма* (k—1) *последовательностей* $\{n_i\}$ *этим свойством не обладает, то последовательность* $\{n_i\}$ *называется базисом (натурального ряда)* k*-го порядка.* Другими словами, последовательность $\{n_i\}$ называется базисом k-го порядка, если всякое натуральное число можно представить как сумму k членов (возможно с повторениями) последовательности $\{n_i\}$ и если существует по крайней мере одно натуральное число, которое не входит в сумму k—1 последовательностей $\{n_i\}$.

Легко видеть, что не всякая последовательность является базисом. Так, например, последовательность четных чисел

$$0, 2, 4, \ldots$$

при складывании самой с собой не может дать ни одного нечетного числа и, следовательно, не является базисом никакого порядка. В связи с этим возникают следующие две важные задачи, имеющие основное значение для аддитивной теории чисел:

1) *Дана последовательность* $\{n_i\}$. *Определить, является ли эта последовательность базисом* и, если да, то

2) *определить порядок этого базиса.*

Простая и вместе с тем глубокая идея Л. Г. Шнирельмана при рассмотрении задачи 1-ой заключается в том, что основную роль при этом играет не только арифметическая природа чисел $\{n_i\}$, а густота или плотность распределения этих чисел в натуральном ряду. Например, числа двух последовательностей, одинаково густо расположенных в натуральном ряду,

$$p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_m,\ \ldots \qquad (p_0 = 0;\ p_1 = 1),$$

$$p_0,\ p_0 + 1,\ p_1 + 1,\ \ldots,\ p_m + 1,\ \ldots$$

обладают, очевидно, различной арифметической природой. В то же время, если первая последовательность есть базис, то вторая также всегда будет базисом (быть может, более высокого порядка). Л. Г. вводит следующее определение плотности.

Последовательность натуральных чисел

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m,\ \ldots\ (n_0 = 0;\ n_1 = 1) \tag{1}$$

имеет плотность α*, если*

$$\inf_{1 \leqslant n < \infty} \frac{A(n)}{n} = \alpha,$$

где $A(n)$ *число членов последовательности* (1), *не превосходящих числа* n *(при подсчете* $A(n)$ *нуль не считается.*[1] Мы принимаем $n_1 = 1$, так как в противном случае $\alpha = 0$.

Основная теорема Шнирельмана следующая:

Если $\alpha > 0$, *то последовательность* (1) *есть базис натурального ряда.*

Наметим вехи доказательства этой теоремы. Пусть сначала $\alpha > \frac{1}{2}$. Рассмотрим произвольное целое число n и пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ члены нашей последовательности, не превосходящие n. Числа

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k;\ n - n_k,\ n - n_{k-1},\ \ldots,\ n - n_1 \tag{3}$$

все не больше n. С другой стороны из равенства (2) и условия $\alpha > \frac{1}{2}$ получаем

$$\frac{A(n)}{n} = \frac{k}{n} > \frac{1}{2} \qquad \text{или} \quad 2k > n,$$

следовательно, ряд (3) содержит равные члены, т. е. для некоторой пары индексов i и j имеем равенство

$$n - n_i = n_j \qquad \text{или} \quad n = n_i + n_j. \tag{4}$$

Равенство (4) показывает, что последовательность (1) есть базис 2-го порядка. Общий случай теоремы (для любого положительного α) легко сводится к нашему случаю с помощью следующей леммы:

Плотность суммы двух последовательностей не меньше чем сумма плотностей этих последовательностей.

Эта лемма в несколько ослабленной форме (достаточной для доказательства нашей теоремы) была доказана Шнирельманом. Доказательство леммы в форме, в которой она только что высказана, представило значительные трудности, и было получено значительно позднее.

---

[1] $\inf \frac{A(n)}{n}$ означает нижнюю границу чисел $\frac{A(n)}{n}$, т. е. наибольшее число, не превосходящее всех чисел $\frac{A(n)}{n}$.

Возвращаясь к проблеме Гольдбаха, заметим, что применить указанную теорему непосредственно нельзя, так как плотность последовательности простых чисел равна нулю. Шнирельман остроумным приемом показывает, что плотность суммы двух последовательностей, состоящих из простых чисел, уже положительна и поэтому последовательность простых чисел есть базис натурального ряда. Отсюда, в частности, вытекало, что каждое целое число может быть представлено в виде суммы ограниченного числа простых чисел. Сам Шнирельман показал, что эта грань не превышает 800 000. Исследование метода Шнирельмана различными математиками показало, что последовательность простых чисел есть базис не выше 67 порядка. Таким образом, метод Шнирельмана не дал полного решения проблемы Гольдбаха. Однако это был первый существенный сдвиг в этой, до тех пор казавшейся неприступной, проблеме. Глубина идей, заложенных в работе Шнирельмана, соединенная с полной элементарностью метода, произвела огромнейшее впечатление в математическом мире. Крупнейший специалист по теории чисел Э. Ландау писал: «Работа Л. Г. Шнирельмана содержит одно из величайших достижений в теории чисел, до которого мне удалось дожить».

Дальнейший принципиальный сдвиг, как мы уже указывали, был сделан акад. И. М. Виноградовым. Пользуясь своим методом, академик Виноградов доказал, что всякое, достаточно большое нечетное число может быть представлено как сумма трех простых чисел.

Работы Шнирельмана по теории чисел содержат еще целый ряд значительных результатов: доказательство обобщенной теоремы Варинга, достаточные условия для того, чтобы целочисленные значения диференцируемых функций в целых точках образовали базис и т. д.

Метод Шнирельмана в теории чисел получил широкое распространение во всем математическом мире. Изложение работы Л. Г. (напечатанной в мало распространенном журнале «Труды Донского политехнического института»), было вскоре дано в статье Э. Ландау. В 1933 г. Шнирельман публикует (со значительными добавлениями) свою работу в „Mathematische Annalen". Многие математики как в СССР, так и за границей (Романов, Хинчин, Линник, Ландау, Хейльброн, Риччи, Артин, Шрек, Манн и др.) развивают идеи Л. Г. Шнирельмана. Возникает новая область теории чисел — арифметика числовых последовательностей. Эта новая область быстро развивается, ее методы переносятся из теории чисел в общую теорию множества. В самой теории чисел метод Шнирельмана получает широкое распространение и делает быстрые успехи. В частности, как мы уже указывали, проблема Варинга, решение которой у Гильберта занимает более сотни страниц, занимает у Линника, действовавшего методом Шнирельмана, около 20 страниц. Из других работ Л. Г. Шнирельмана, имеющих отношение к теории чисел, следует отметить его исследование: «О функциях в нормированных алгебраических телах» (Изв. АН СССР, № 5—6, 1938). Л. Г. Шнирельман строит теорию функций в этих телах, аналогичную обычной теории аналитических функций. Эта работа должна была быть продолжена в направлении применения развитого аппарата к решению алгебраических уравнений в целых числах. Ряд работ Л. Г. Шнирельман по различным вопросам теории чисел остались неопубликованными. В частности, в работе, которая велась совместно с А. О. Гельфондом, изучались полиномы с целыми коэфициентами, наименее уклоняющими от нуля. Изучение этих полиномов привело авторов к важным теоретико-числовым результатам относительно распределения простых чисел.

В 1929 г. в сборнике работ математического раздела секции естественных и точных наук Комакадемии публикуется работа Л. Г. Шнирельмана (написанная, вероятно, много раньше): «О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых». В этой работе доказывается, в частности, следующая теорема: «На всякой простой, замкнутой, плоской, жордановой кривой, имеющей непрерывную кривизну, можно отыскать четыре точки, лежащих в вершинах квадрата».

Идея доказательства этой интересной теоремы следующая: прежде всего доказывается, что если кривая, несущая на себе квадрат, аналитическая в некоторых окресностях вершин квадрата, то и всякая кривая, удовлетворяющая условиям теоремы и находящаяся в достаточной близости от данной, также несет на себе квадраты (достаточно близкие к первоначальному). Затем строится однопараметрическое семейство кривых, содержащее некоторый эллипс и апроксимирующих исследуемую кривую С. Каждая кривая семейства несет на себе лишь конечное число квадратов. При этом при переходе от одной кривой семейства к близкой к ней число квадратов изменяется на четное число. Так как на эллипсе имеется один квадрат, то кривая семейства достаточно близкая к кривой С содержит нечетное число квадратов и, следовательно, на кривой С имеется хотя бы один квадрат.

Подобного рода рассуждения (метод аналитического продолжения) применялись Пуанкаре в знаменитой задаче о числе замкнутых геодезических на выпуклых поверхностях рода нуль. Он вводит в уравнение исследуемой поверхности параметр таким образом, что при непрерывном изменении этого параметра можно перейти от эллипсоида к заданной поверхности. При этом доказывается, что при переходе от одной поверхности к другой число решений меняется на четное число, а так как на эллипсоиде имеется нечетное число замкнутых геодезических, то отсюда делается заключение о существовании замкнутых геодезических на поверхности рода нуль.

Против этого рассуждения Пуанкаре было выдвинуто следующее возражение. Для некоторых особых значений параметра число замкнутых геодезических может стать бесконечным, а затем четным или нулем. В ряде работ, написанных Л. Г. Шнирельманом и Л. А. Люстерником за период 1927—1929 гг., задача о числе замкнутых геодезических получила окончательное разрешение.

В работе „Sur un principe topologique en analyse" (C. R. de l'Ac. des Sc., t. 188; 1929) было дано существенное обобщение метода минимума максимумов Куранта. Как известно (см., например, Курант-Гильберт: «Методы математической физики», т. 1), Курантом была развита теория собственных значений, которая позволяла в некоторых случаях провести доказательство существования и действительности собственных значений без вычислений. Рассмотрим для простоты простейшую алгебраическую задачу. Пусть F — квадратическая форма n переменных.

$$F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (1)$$

и M — единичная сфера, заданная уравнением:

$$E = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \qquad (2)$$

Обозначим через $[M_i]$ класс всех $(i+1)$ — размерных сфер радиуса единица, заключенных в сфере M. Курант определяет собственное значение λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ как минимум максимумов формы F на сферах класса $[M_i]$; λ_i есть i-ое по величине собственное значение.

Система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (3)$$

разрешима, если вместо параметра λ подставить собственное значение.

Систему уравнений (3) можно записать в виде

$$d(F - \lambda E) = 0, \qquad (4)$$

поэтому, если рассматривать F как функцию, заданную на единичной сфере M, то в точках, где удовлетворяется уравнение (3), градиент F на M исчезает. Такие точки называются особыми точками F, а значение функции F в этих точках — особыми значениями.

Метод Куранта дал ряд интересных приложений в теории линейных уравнений. Люстерник и Шнирельман существенно обобщая этот метод, получают новый принцип «особой точки», который уже можно прилагать и к нелинейным уравнениям.

Вместо единичной сферы и квадратичной формы рассматривается некоторое компактное пространство[1] R и функция F, определенная на R, имеющая непрерывные производные до второго порядка. Роль классов $[M_i]$ играют так называемые замкнутые топологические классы.[2] Функция F достигает на каждом из множеств A некоторого класса [A] своего максимума. Нижняя грань этих максимумов по данному классу (называемая особым значением) достигается, по крайней мере, на одном из множеств A_0 класса [A]. Назовем это множество минимальным. Принцип особой точки заключается в следующей теореме:

Если пересечение гиперповерхности F=C (где C — особое значение) с минимальным множеством A_0 заключено внутри R, то это пересечение содержит, по крайней мере, одну особую точку гиперповерхности F=C, т. е. точку, где dF=O.

Для определения числа решений вариационной задачи вводится важное понятие категории замкнутого множества (L. Schnirelman:

[1] Компактное множество — это такое множество, для которого имеет место принцип Больцано-Вейерштрасса: из всякой бесконечной последовательности элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Сфера M в n - мерном пространстве компактна.

[2] Определим деформацию замкнутого множества A в пространстве R как однозначное и непрерывное преобразование множества, зависящее, кроме того, непрерывно от параметра t. При некотором значении параметра $t=t_0$ мы получаем заданное множество, а при $t=t_1$ = деформированное. Замкнутым топологическим классом [A] называется наименьшая совокупность замкнутых множеств, обладающая свойствами: 1) если класс [A] содержит множество A, то он содержит в себе и все множества, получаемые из A с помощью деформаций; 2) предельные множества для последовательности множеств из класса [A] также принадлежат к [A].

„Über eine neue kombinatorische Invariante", Wiener Berichte, 1929). В простейшем случае это понятие определяется так: замкнутое множество A называется множеством первой категории относительно R, если оно сводится к точке при помощи деформации в R; A называется k-ой категории, если его можно разбить на K замкнутых частей (могущих пересекаться) первой категории и нельзя разбить на K=1 часть первой категории. Понятие категории позволяет оценить снизу число решений вариационной задачи.

Эти методы затем переносятся на функциональные пространства и позволяют доказать следующую теорему:

На каждой поверхности рода нуль, коэфициенты линейной формы которой обладают частными производными до 3-го порядка включительно, существуют, по крайней мере, 3 замкнутых геодезических линии (Люстерник и Шнирельман: „Existence de trois lignes geodesiques fermés sur chaque surface de genre O", C. R. de l' Ac. Sc., t. 181, 1929).

Сводка результатов этих работ была дважды издана в Советском Союзе (в 1930 г. отдельной книгой: «Топологические методы в вариационных задачах» и под тем же заголовком в «Успехах математических наук», т. II, вып. I) и переведена на французский язык под редакцией известного математика Ж. Адамара.

В дальнейшем была доказана более сильная теорема о существовании трех замкнутых самонепересекающихся геодезических. На всякой поверхности рода нуль существует, по крайней мере: 1) или три самонепересекающихся замкнутых геодезических различной длины, 2) или однопараметрическое семейство таких линий равной длины и одна такая линия отличной длины, 3) или двупараметрическое семейство линий равной длины (второй случай осуществляется, например, на поверхностях вращения, третий — на поверхности сферы).

Из других работ Л. Г. Шнирельмана следует отметить работы геометрического и общетопологического характера. В работе 1931 г. (совместно с Л. С. Понтрягиным) дается оригинальное определение размерности компактного множества. В работе, опубликованной в «Известиях Донского политехнического института», строится интересный пример непрерывного преобразования, при котором множество точек, остающееся инвариантным, сводится к одной точке. Этот пример показывает, насколько существенна разница между диференцируемыми и просто непрерывными преобразованиями. Как показал ранее Л. Г. Шнирельман, если функция, дающая преобразование, имеет производные до второго порядка включительно в окрестности инвариантной точки, то существует инвариантная линия, выходящая из инвариантной точки.

Л. Г. Шнирельман был глубоким и разносторонним математиком. Будучи первоклассным вычислителем (работы по аддитивной теории чисел), он, с другой стороны, создал ряд важных работ в абстрактных областях математики. Эрудиция Л. Г. в различных областях математики была поразительна даже в дни его молодости. Так, например, он рассказал в поезде (в течение двух дней) автору этих строк чрезвычайно сложное и трудное решение Гильберта проблемы Варинга. Решение было изложено с большими тонкостями, хотя Л. Г. в то время (в 1929 г.) еще не являлся специалистом по теории чисел. По утверждению специалистов, изложение подобной теории потребовало бы целого курса лекций. Нередко на заседениях математического общества и Института математики Л. Г. поражал присутствующих своими глубоками и тонкими замечаниями. Часто он тут же давал новые доказательства и намечал существенные обобщения докладываемых результатов. К своим собственным результатам Л. Г. относился чрезмерно критически. Он занимался обычно задачами, для решения которых необходимы длительные изыскания, где нужно создавать новые методы и нельзя сказать заранее, получится ли окончательный результат. Предварительных результатов Л. Г., как правило, не публиковал, хотя они зачастую представляли значительный интерес. Это объясняет тот факт, что математик подобной силы, как Л. Г., оставил сравнительно небольшое число работ. Многие результаты Л. Г. так и остались неизвестными, некоторые были восстановлены и опубликованы после его смерти. Так, например, Л. Г. довольно долго пытался создать аппарат для исключения неизвестных из систем уравнений высших степеней, аппарат, который в какой-то степени мог бы заменить при переходе от линейных к нелинейным задачам определители. В процессе этих поисков Л. Г. доказал целый ряд существенных алгебраических теорем, но ни одной из них он не опубликовал.

Л. Г. был скромным, отзывчивым, глубоко принципиальным и общественно активным человеком.

Пламенный патриот своей Родины, Л. Г. необычайно гордился расцветом советской науки и культуры, для развития которых он и сам немало поработал. Л. Г. многое сделал и для подъема математического образования в СССР. Он выступал на страницах газеты «Правда» с критикой некоторых учебников, участвовал в разработке новых программ, писал популярные книги для учителей и школьников, выступал с публичными лекциями.

Советская наука — самая передовая наука в мире. Одним из лучших представителей этой науки был Л. Г. Шнирельман. Советские математики еще долго будут изучать его труды и развивать созданные им методы.

Б. В. ГНЕДЕНКО

О ПОЛНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. В современном математическом анализе большую роль играют системы так называемых ортогональных функций. Функции последовательности

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

называются ортогональными в промежутке (a, b), если для них выполняются следующие условия:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\ \varphi_k(x)\ dx = 0, \quad \text{если } i \neq k,$$

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)\ dx = c_i \neq 0.$$

Среди всевозможных ортогональных систем функций особенно важны полные системы, т. е. такие, к которым нельзя добавить ни одной новой функции, отличной от тождественного нуля и ортогональной ко всем остальным функциям системы. Доказывается, что полнота системы может быть охарактеризована иначе. Именно, чтобы система (1) была полной необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом можно было подобрать последовательность постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ такую, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left\{ f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right\}^2 dx = 0.$$

Словами это обстоятельство выражают следующим образом: любая функция с интегрируемым квадратом может быть апроксимирована в среднем с любой степенью точности посредством линейных выражений с постоянными коэфициентами из ортогональных функций полной системы.

Известно, что в промежутке $(0,2\pi)$ тригонометрические функции

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \ldots \qquad (2)$$

ортогональны и образуют полную систему. Во всех курсах анализа обычно указывается, что в промежутке $(0, \pi)$ следующие системы

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx, \ldots$$

и

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$$

также являются полными и ортогональными. Это замечание служит упрощению вычислений коэфициентов при разложении периодических функции в ряды Фурье. Изменением масштаба мы можем интервал $(0, \pi)$ привести к интервалу $(0,2\pi)$; последние системы при этом запишутся в таком виде:

$$\sin \frac{x}{2},\ \sin x,\ \ldots,\ \sin \frac{n}{2} x,\ \ldots \qquad (3)$$

$$1,\ \cos \frac{x}{2},\ \cos x,\ \ldots,\ \cos \frac{n}{2} x,\ \ldots \qquad (4)$$

В диссертации академика Н. Н. Лузина, появившейся в 1916 г. [3], было замечено, что свойства ортогональных систем функций еще недостаточно хорошо изучены и в качестве нерешенной задачи был поставлен вопрос: известно, что система тригонометрических функций (2) обладает таким свойством — система производных от функций системы (2) с точностью до постоянных множителей совпадает с функциями исходной системы. Обладают ли этим свойством какие-нибудь другие ортогональные системы? Казанский математик Б. М. Гагаев в 1929 году опубликовал решение этого вопроса [1]. Внимательное изучение выводов Гагаева привело меня [2] к новой системе функций, так же решающей вопрос Лузина, но несовпадающей с системой (2) и незамеченной Гагаевым. Вот эта система функций

$$\sin \frac{x}{2},\ \cos \frac{x}{2},\ \sin \frac{3x}{2},\ \ldots,\ \sin \frac{2n-1}{2} x,\ \cos \frac{2n-1}{2} x,\ \ldots \qquad (5)$$

Функции этой системы ортогональны в интервале $(0,2\pi)$, кроме того, система (5) является полной в этом промежутке. Других полных систем функций, дающих решение вопроса Лузина, не существует. Если строго отнестись к полученному решению, то только система (5) и будет переходить сама в себя при диференцировании, так как система производных от функций системы (2) не будет содержать единицы и, следовательно, уже не будет полной.

Легко видеть, что в интервале $(0,2\pi)$ существуют еще две ортогональные и полные системы тригонометрических функций, а именно

$$\sin \frac{x}{4},\ \sin \frac{3x}{4},\ \sin \frac{5x}{4},\ \ldots,\ \sin \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)x, \ldots \qquad (6)$$

и

$$\cos \frac{x}{4},\ \cos \frac{3x}{4},\ \cos \frac{5x}{4},\ \ldots,\ \cos \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) x,\ \ldots \qquad (7)$$

Цель настоящей заметки состоит, во-первых, в доказательстве того, что перечисленными системами (2) — (7) исчерпываются полные ортогональные в интервале $(0, 2\pi)$ системы тригонометрических функций вида

$$\{\sin \alpha_n x,\ \cos \beta_n x\}, \tag{8}$$

$$\{\sin \alpha_n x\} \tag{9}$$

и

$$\{\cos \beta_n x\} \tag{10}$$

с рациональными коэфициентами α_n и β_n. Во вторых, мы докажем, что кроме систем (2) и (5) не существует полных ортогональных систем вида (8) уже не только с рациональными, но и с какими угодно коэфициентами α_n и β_n. Наконец мы покажем, что существует бесконечное множество полных ортогональных систем вида (9) и (10), но уже с трансцендентными коэфициентами α_n и β_n. Полноту этих последних систем мы доказывать не будем, так как это заставило бы нас использовать неэлементарные приемы.

Содержание настоящей заметки совершенно элементарно и вполне доступно студенту 2-го курса высшего технического учебного заведения. Надеюсь, что приводимые мной здесь результаты могут пригодиться в педагогической практике.

2. Лемма. Функции $F(x)$ с интегрируемым квадратом в интервале $(0, \pi)$ удовлетворяющие одному из условий

а) $f(x) = f(\pi - x)$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

б) $f(x) = -f(\pi - x)$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

аппроксимируются в среднем с любой степенью точности при помощи линейных выражений, составленных из функций системы

$$\{\sin (2n - 1)\, x,\ \cos (2n - 1)\, x\}. \tag{11}$$

Доказательство. Прежде всего легко проверить, что функции системы (11) ортогональны в промежутке $(0, \pi)$. Действительно, имеем при $i \neq j$

$$\int_0^\pi \sin (2i - 1)\, x \sin (2j - 1)\, x\, dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos 2 (i - j)\, x - \cos 2 (i + j - 1)\, x]\, dx = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin (2i - 1)\, x \,.\, \cos (2j - 1)\, x\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin 2 (i + j - 1) x + \sin 2 (i - j) x] \, dx = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos (2i - 1) x \cdot \cos (2j - 1) x \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos 2 (i + j - 1) x + \cos 2 (i - j) x] \, dx = 0.$$

а) Строим далее в промежутке $(-\pi, \pi)$ функцию $\varphi(x)$ посредством следующих равенств

$$\varphi(x) = f(x) \qquad \text{для} \quad 0 < x < \pi;$$

$$\varphi(x) = -f(-x) \qquad \text{для} \quad -\pi < x < 0.$$

Пишем для функции $\varphi(x)$ ряд Фурье относительно системы (2)

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Коэфициенты a_n и b_n вычисляются по известным формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx.$$

Так как функция $\varphi(x)$ — нечетная, то

$$a_n = 0 \qquad \text{при любом } n,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Исследуем внимательнее значения коэфициентов b_n при n четных и n нечетных. Имеем при n четных $(n=2к)$.

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2kx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \sin 2kx \, dx.$$

Полагаем во втором интеграле $x = \pi - y$, тогда

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2k x\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \sin 2k(\pi - y)\, dy =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2kx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin 2ky\, dy = 0.$$

Аналогичный расчет показывает, что при n нечетных ($n=2к-1$)

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k - 1)\, x\, dx. \qquad (12)$$

Вычисляем теперь разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье в промежутке $(0, \pi)$ для системы (11)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(2n - 1)\, x + \beta_n \sin(2n - 1)\, x.$$

Коэфициенты α_n и β_n определяются равенствами

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos(2n - 1)\, x\, dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin(2n - 1)\, x\, dx.$$

Несложный расчет показывает, что

$$\alpha_n = 0 \qquad \text{при любом } n,$$

$$\beta_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n - 1)\, x dx.$$

Из полноты системы (2) следует, что при $n \to \infty$

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} \sin(2k - 1)\, x \right\}^2 dx \to 0,$$

где b_{2k-1} определяются формулами (12). Но

$$J_n = \int_0^{2\pi} \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} \sin(2k-1)x \right\}^2 =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin(2k-1)x \right\}^2 dx,$$

поэтому полиномы

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin(2k-1)x,$$

составленные из функций системы

$$\{\sin(2k-1)x\} \tag{13}$$

аппроксимируют в среднем функцию $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$ с любой степенью точности.

Так как в промежутке $(0, \pi)$ функция $f(x)$ произвольна (лишь интегрируема в квадрате), то мы заключаем, что система функций (13) полна в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Строим теперь функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{для} \quad 0 < x < \pi,$$

$$\varphi(x) = f(-x) \quad \text{для} \quad -\pi < x < 0.$$

Легкие подсчеты показывают, что ряд Фурье по функциям системы (2) в этом случае принимает такой вид

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_{2k} = 0,$$

$$a_{2k-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k-1)x\,dx.$$

Разложив функцию $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд Фурье по функциям системы (11), находим, что

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(2k-1)x\,dx,$$

где

$$\alpha_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k-1)\,x\,dx.$$

Подобно предыдущему, мы и в этом случае доказываем, что функция $f(x)$ аппроксимируется в среднем с любой степенью точности полиномами

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(2k-1)\,x,$$

составленными из функций системы (11). Это же обстоятельство означает ничто иное как полноту системы функций

$$\{\cos(2k-1)\,x\} \tag{14}$$

в интервале $(0, \pi)$.

3. Доказательство полноты системы функций (11) в промежутке $(0, \pi)$ получается теперь в двух словах. Действительно, каждая функция $f(x)$, определенная в $(0, \pi)$, может быть представлена в виде суммы

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

слагаемые которой удовлетворяют условиям

$$\text{а)}\qquad f_1(x) = f_1(\pi - x) \qquad (0 < x < \pi),$$

$$\text{б)}\qquad f_2(x) = -f_2(\pi - x) \qquad (0 < x < \pi).$$

Убедиться в этом можно, взяв в качестве функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, например, такие функции

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(\pi - x)],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(\pi - x)].$$

Если функция $f(x)$ — интегрируема в квадрате, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ согласно предыдущей лемме, аппроксимируются с любой степенью точности многочленами, составленными из функций системы (11). Этим же свойством, очевидно, обладает и их сумма, т. е. функция $f(x)$. Таким образом полнота системы (11) в промежутке $(0, \pi)$ доказана.

Положив $z=2x$, мы растягиваем интервал $(0, \pi)$ в интервал $(0,2\pi)$ и преобразуем систему (11) в систему (5). Так как свойство полноты при таком преобразовании не нарушается, то мы доказали, таким образом, полноту системы (5) в интервале $(0,2\pi)$.

Точно так же, положив $z=4x$, мы растягиваем интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в интервал $(0,2\pi)$ и преобразуем систему (13) в систему (6) и систему (14) в систему (7). Этим, очевидно, доказана полнота систем (6) и (7) в промежутке $(0,2\pi)$.

Предыдущие результаты позволяют нам сделать небольшое методическое указание. Пусть нам следует разложить периодическую функцию $f(x)$, имеющую период 2π в ряд Фурье по функциям системы (5). Если функция $f(x)$ нечетна, т. е., если для нее выполнено равенство

$$f(x) = -f(-x),$$

то разложение содержит только синусы, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Если кроме того $f(x)$ удовлетворяет равенству

$$f(x) = -f(\pi - x), \qquad (0 < x < \pi),$$

то разложение $f(x)$ в ряд Фурье содержит только члены вида $b_{2k-1} \sin (2k-1) x$.

Точно так же, если функция $f(x)$ четна, т. е. для нее выполняется равенство

$$f(x) = f(-x),$$

то разложение $f(x)$ содержит только члены вида $a_n \cos nx$. Если же кроме того $f(x)$ удовлетворяет равенству

$$f(x) = f(\pi - x),$$

то все коэфициенты a_n с четными номерами обращаются в нуль и разложение $f(x)$ в ряд Фурье принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos (2n-1) x.$$

Мы видели при этом, что для вычисления коэфициентов разложения нужно пользоваться формулами (12) и (12′).

4. Докажем теперь, что функции последовательности

$$\{\cos \alpha_n x\}$$

могут быть ортогональными в интервале $(0,2\pi)$ только в одном из следующих случаев: все α_n или

а) имеют вид $\alpha_n = \frac{s_n}{2}$, где s_n — целые числа, или

б) имеют вид $\alpha_n = \frac{1}{4}(2s_n - 1)$, где s_n — целые числа, или

в) являются корнями уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} 2\pi\alpha = C,$$

где C — отличное от нуля постоянное.

В самом деле, из ортогональности $\cos \alpha_n x$ и $\cos_m x$ заключаем что

$$\int_0^{2\pi} \cos \alpha_n x \cos \alpha_m x \, dx = 0.$$

Так как $\alpha_n \neq \alpha_m$ при $n \neq m$, то это условие приводится к виду

$$\frac{\sin (\alpha_n + \alpha_m) 2\pi}{\alpha_n + \alpha_m} + \frac{\sin (\alpha_n - \alpha_m) 2\pi}{\alpha_n - \alpha_m} = 0.$$

Легкими преобразованиями мы приводим последнее равенство к такой форме

$$\alpha_n \sin 2\pi \alpha_n \cos 2\pi \alpha_m - \alpha_m \sin 2\pi \alpha_m \cos 2\pi \alpha_n = 0. \qquad (15)$$

Могут представиться три подслучая.

α) $$\cos 2\pi \alpha_n = 0.$$

Так как при этом

$$\sin 2\pi \alpha_n = \pm 1,$$

то также

$$\cos 2\pi \alpha_m = 0.$$

Отсюда следует, что все величины α_n имеют вид

$$\alpha_n = \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{4},$$

где s_n — целые числа.

β) $$\sin 2\pi \alpha_n = 0.$$

В этом случае и

$$\sin 2\pi \alpha_m = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha_n = \frac{1}{2} s_n,$$

где s_n — целое число.

γ) $\sin 2\pi \alpha_n$ и $\cos 2\pi \alpha_n$ отличны от нуля.

Равенство (15) в этом случае эквивалентно следующему:

$$\alpha_n \operatorname{tg} 2\pi \alpha_n = \alpha_m \operatorname{tg} 2\pi \alpha_m.$$

Отсюда мы заключаем, что если α_n не будет вида $\frac{s_n}{2}$ или $\frac{s_n}{2} - \frac{1}{4}$, то ни при одном n не может быть равенства $\alpha_n = 0$. Последнее равенство поэтому означает, что произведение

$$\alpha_n \operatorname{tg} 2\pi \alpha_n$$

сохраняет постоянное значение и, следовательно, существует такое постоянное C, для которого все α_n будут удовлетворять равенству

$$\alpha_n \operatorname{tg} 2\pi \alpha_n = C.$$

Теорема таким образом доказана. Известно, что при отличных от нуля C последнее уравнение не имеет рациональных решений.

5. Повторяя рассуждения предыдущего §, мы можем доказать, что функции последовательности

$$\{\sin \beta_n x\}$$

могут быть ортогональны только в одном из следующих случаев: все β_n или

а) имеют вид $\frac{s_n}{2}$, где s_n — целые числа, или

б) имеют вид $\frac{s_n}{2} - \frac{1}{4}$, где s_n — целые числа, или

в) являются корнями уравнения

$$\alpha \operatorname{ctg} 2\pi \alpha = C,$$

где C — отличное от нуля постоянное.

6. Среди всевозможных систем функций

$$\{\sin \beta_n x, \cos \alpha_n x\} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

существуют только две ортогональные в $(0,2\pi)$ системы:

а) $$\alpha_n = \beta_n = n,$$

б) $$\alpha_n = \beta_n = n + \frac{1}{2}.$$

Действительно, в силу ортогональности $\sin \beta_n x$ и $\cos \alpha_m x$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin \beta_n x \cos \alpha_m x \, dx = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1-\cos(\alpha_m+\beta_n)2\pi}{\alpha_m+\beta_n} + \frac{1-\cos(\alpha_m-\beta_n)2\pi}{\alpha_m-\beta_n}\right] = \tag{16}$$
$$= \frac{\sin^2 \pi(\alpha_m+\beta_n)}{\alpha_m+\beta_n} + \frac{\sin^2 \pi(\alpha_m-\beta_n)}{\alpha_m-\beta_n} = 0.$$

Мы рассматриваем случай, когда наша система содержит бесконечное множество как синусов, так и косинусов. Согласно предыдущему найдется такое α_m, что для данного n мы будем иметь

$$\alpha_m > \beta_n.$$

Таким образом, чтобы при любых m и n имело место равенство (16), необходимо, чтобы одновременно

$$\sin \pi (\alpha_m + \beta_n) = 0$$

и

$$\sin \pi (\alpha_m - \beta_n) = 0.$$

Это означает, что

$$\alpha_m + \beta_n = p,$$
$$\alpha_m - \beta_n = q,$$

где p и q — целые числа. Отсюда

$$2\alpha_m = p + q,$$
$$2\beta_n = p - q$$

и, следовательно, одновременно $2\alpha_m$ и $2\beta_n$ являются либо оба четными, либо оба нечетными. Этим, очевидно, наше утверждение доказано.

Заметим, что мы доказали сейчас несколько больше, чем сформулировали, а именно, если $\beta \geqslant \alpha$, то две функции $\sin\beta x$ и $\cos\alpha x$ могут быть ортогональны в интервале $(0,2\pi)$ только в одном из двух случаев: $\alpha = r$ и $\beta = s$ или $\alpha = r - \frac{1}{2}$, $\beta = s - \frac{1}{2}$ где r и s — целые числа.

ЛИТЕРАТУРА

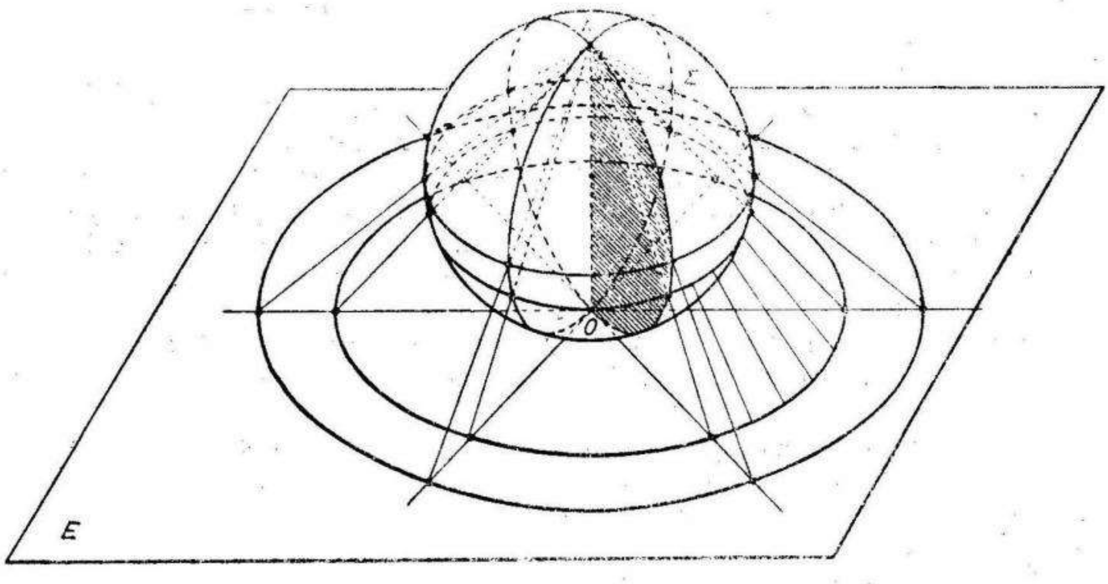
1. Гагаев Б. М. Sur l'unisité du systéme de fonctionc orthogonales invariant relativement à la dérivation. C. R. Acad. Sci. 188, 222—226, 1929.
2. Гнеденко Б. В. О единственности системы ортогональных функций инвариантной относительно диференцирования. ДАН СССР, т. 14, 159—162, 1937.
3. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд, Математический сборник, т. XXX, 1916 (имеется новое издание 1951 года).

Л. И. ВОЛКОВЫСКИЙ

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

§ 1.

1. Определение стереографической проекции. Пусть E — плоскость и Σ — сфера, касающаяся E в точке O. Обозначая через N точку на Σ, диаметрально противоположную точке O, поставим в соответствие каждой точке P на Σ, отличной от N, точку P′ на E, лежащую с P на одном и том же луче, выходящем из N. Такое отображение сферы Σ на плоскость E называется *стереографической проекцией;* точка N называется *полюсом проекции* и плоскость E *плоскостью проекции.*[1]

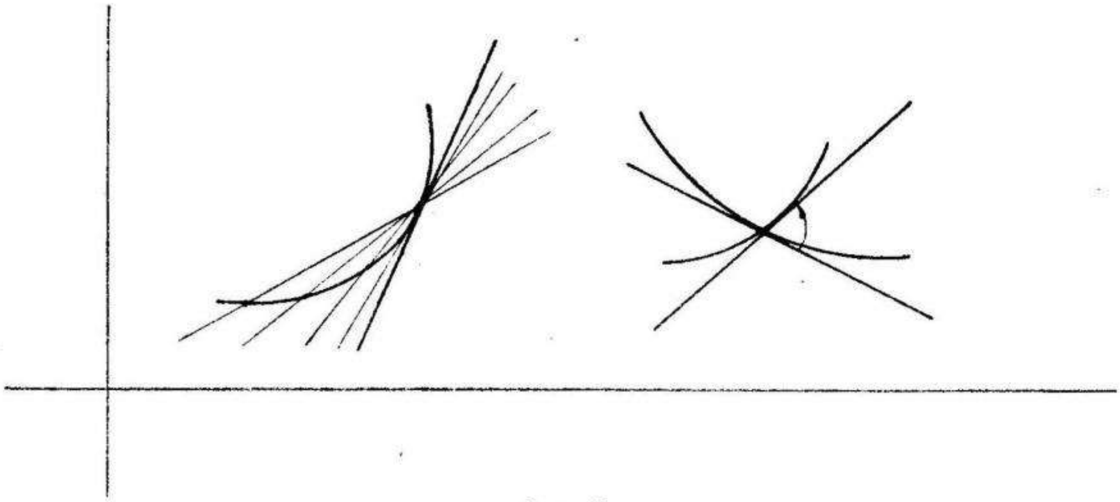


Фиг. 1.

Отметим следующие очевидные свойства стереографической проекции:

[1] Более широко под стереографической проекцией понимается отображение сферы Σ с помощью лучей, выходящих из точки N на произвольную плоскость, параллельную плоскости, касательной к Σ в N. Так, например, в проекции Меркатора (см. ниже, § 2, п. 1) берут плоскость, проходящую через центр сферы Σ. Стереографическую проекцию относят еще к древнегреческому астроному Гиппарху (160—125 гг. до н. э).

1) Между точками сферы Σ с выключенным полюсом N и точками плоскости E устанавливается взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Последнее означает, что при неограниченном приближении точек P_1, P_2, ..., на Σ к точке P, отличной от N, соответствующие точки P'_1, P'_2, ..., на E неограниченно приближаются к точке P', соответствующей P и наоборот.



Фиг. 2.

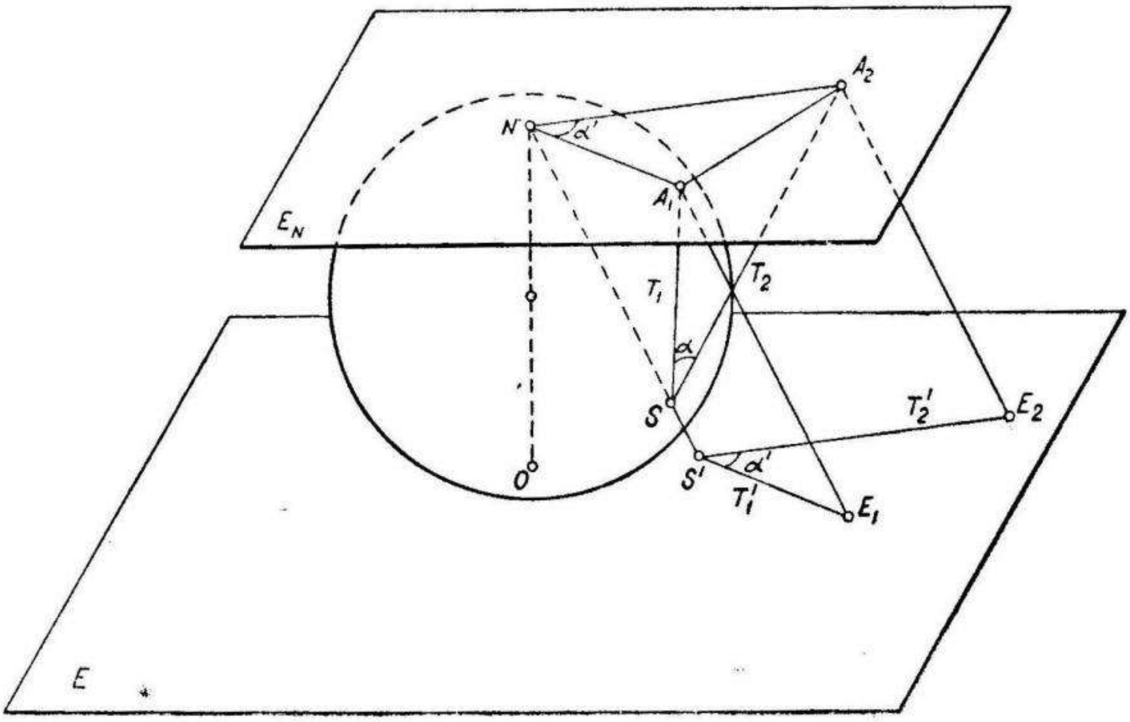
2) Географические круги широты на Σ переходят в концентрические окружности с центром в точке O, а меридианы — в лучи, выходящие из точки O (фиг. 1).

3) Окружности на Σ, проходящие через полюс N, переходят в прямые на E и обратно, каждой прямой на E соответствует на Σ окружность, проходящая через полюс N. В самом деле, плоскость окружности γ на Σ проходящей через N, пересекает плоскость E по прямой γ' являющейся стереографическим образом окружности γ; плоскость же, проходящая через данную прямую γ' на E и полюс N пересекает Σ по окружности γ, проходящей через N и стереографически соответствующей γ'.

2. Сохранение углов при стереографической проекции. Как известно, касательная к кривой в некоторой ее точке определяется как предельное положение секущей, проходящей через данную точку и точку кривой, неограниченно приближающуюся к данной точке. Угол же между двумя пересекающимися кривыми определяется как угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения (фиг. 2).

Пусть Г — кривая на сфере Σ, M — фиксированная ее точка, M_1 — переменная ее точка, приближающаяся к M и пусть Γ', M' и M'_1 — стереографические их образы на плоскости E. Секущей кривой Г, определяемой точками M, M_1, поставим в соответствие на плоскости секущую кривой Γ', определяемую точками M', M'_1. Так как точки M' и M'_1 лежат на лучах, выходящих из полюса N и проходящих соответственно через точки M и M_1, то обе секущие MM_1 и $M'M'_1$ лежат в одной и той же плоскости, проходящей через N, поэтому и предельные положения этих секущих, т. е. касательные, пусть T и T', к кривым Г и Γ' в точках M и M' соответственно также лежат в одной плоскости, проходящей через N, и, следовательно, T' является стереографическим образом T. Отсюда следует, что *касательная к кривой Γ' на плоскости E, являющейся стереографическим образом кривой Γ на сфере Σ, совпадает со стереографическим образом на E касательной к Γ.*

Пусть теперь Γ_1 и Γ_2 две кривые на Σ, пересекающиеся в точке S; T_1 и T_2 — касательные к Γ_1 и Γ_2 в S и α — величина угла между T_1 и T_2.



Фиг. 3.

Соответствующие величины в плоскости E обозначим соответственно через Γ'_1, Γ'_2, S', T'_1, T'_2 и α'.

Обозначим еще через E_1 и E_2 плоскости, проходящие через полюс N и соответственно через касательные T_1 и T_2. По предыдущему эти плоскости проходят соответственно и через касательные T'_1 и T'_2, поэтому угол α' между T'_1 и T'_2 совпадает с пересечением плоскости E с двугранным углом между плоскостями E_1 и E_2, содержащем угол α между T_1 и T_2.

Обозначая через E_N плоскость, касательную к сфере Σ в N, мы замечаем, что в пересечении E_N с тем же двугранным углом E_1 и E_2 образуется угол с вершиной N, также равный α'. С другой стороны, легко видеть, что полученный при полюсе N угол равен α. В самом деле, это следует из равенства (по трем сторонам) треугольников A_1NA_2 и A_1SA_2, где A_1 и A_2 точки пересечения T_1 и T_2 соответственно со сторонами угла с вершиной в N, рассматриваемого в плоскости E_N (фиг. 3).

Таким образом $\alpha' = \alpha$ и, следовательно, углы между кривыми Γ_1, Γ_2 и их стериографическими образами Γ'_1, Γ'_2 — равны.

Итак, мы доказали, что *при стереографической проекции углы сохраняются.*

3. Бесконечная удаленная точка плоскости. В стереографической проекции полюсу N не соответствует никакая точка плоскости E. Это и понятно, так как при неограниченном приближении точек сферы к N соответствующие точки на плоскости E неограниченно удаляются от точки O. Отсутствие на плоскости точки, соответствующей полюсу N, не позволяет говорить о стереографической проекции всей сферы без исключения на плоскость E, равно как не позволяет говорить о сохранении углов при стереографической проекции, если эти углы имеют вершины в N.

Эти и подобные пробелы стереографической проекции были бы устранены, если бы плоскость E была дополнена еще одной точкой, которая естественным образом могла бы быть поставлена в соответствие полюсу. Для этого новая «идеальная» точка, которую мы хотим присоединить к плоскости E, должна определяться точками этой плоскости, неограниченно удаляющимися от ее начала O, подобно тому, как прообразы[1] этих точек на сфере Σ неограниченно приближаются к полюсу N. В соответствии с этим мы будем говорить, что точки плоскости E, неограниченно удаляющиеся от ее начала O, определяют одну единственную, дополнительную точку для плоскости E, называемую *бесконечно удаленной точкой плоскости* E.[2] Бесконечно удаленную точку плоскости E мы и будем считать стереографическим образом полюса N.

С введением бесконечно удаленной точки соответствие между Σ и E становится взаимно однозначным и непрерывным всюду. При этом непрерывность отображения в бесконечно удаленной точке плоскости E означает лишь то, что неограниченно удаляющимся точкам плоскости O соответствуют точки на Σ, неограниченно приближающиеся к полюсу N. Таким образом, неограниченное удаление точек на E означает их «приближение» к бесконечно удаленной точке.

Определим теперь понятие угла между прямыми в бесконечно удаленной точке. Для этого рассмотрим произвольный угол α в плоскости E с вершиной s и сторонами l_1, l_2. Углу α на сфере Σ соответствует двуугольник, ограниченный соответствующими l_1 и l_2 дугами окружностей γ_1 и γ_2, соединяющими точку S — прообраз s на Σ с полюсом N. Углы этого двуугольника при S и N очевидно равны и так как, по доказанному выше, углы при S и s, как стереографически соответствующие друг другу, равны, то угол при S, а значит и угол при N, оба равны α. Но последний угол соответствует углу между l и l_2 в бесконечности, поэтому естественно считать что величина плоского угла между l_1 и l_2 в бесконечно удаленной вершине также равна α. Другими словами, *всякие две пересекающиеся прямые в конечной точке их пересечения и в ∞ образуют равные по величине углы.*

В соответствии с этим определением угла в ∞ мы скажем, что две плоские кривые γ_1 и γ_2, уходящие в ∞ встречаются там под углом α, если прообразы Γ_1 и Γ_2 этих прямых на сфере встречаются в полюсе N под углом α, т. е. имеют там касательные, пересекающиеся

[1] Если точке P сферы Σ соответствует точка P′ плоскости E, то P называется *прообразом* P′ на сфере.

[2] Указанное дополнение плоскости одной только точной в ∞ не является единственно возможным расширением плоскости. Так, например, в проективной геометрии плоскость дополняется не бесконечно удаленной точкой, а бесконечно удаленной прямой (см. любой учебник по высшей или проективной геометрии).

под углом α. Тогда, понятно, свойство стереографической проекции сохранять углы, доказанное выше для случая, когда точка пересечения кривых на Σ, отлична от полюса N, остается справедливым и для случая пересечения кривых в полюсе.

4. Сохранение окружностей при стереографической проекции. Расширенная дополнением бесконечно удаленной точкой плоскость E приобрела ряд новых качеств и потеряла ряд прежних качеств.

Одним из новых качеств является приобретение плоскостью E свойства замкнутости. Это свойство выражается в том, что для всякой бесконечной последовательности точек расширенной плоскости существует по крайней мере одна предельная точка, конечная или бесконечно удаленная, т. е. точка, в сколь угодно малой окрестности которой имеется бесконечно много точек последовательности.[1] В случае последовательности точек расположенной в ограниченной части плоскости это предложение составляет так называемый принцип Больцано—Вейерштрасса.[2] Если же последовательность не ограничена, то для нее бесконечно удаленная точка всегда является предельной.

Из потерянных свойств отметим следующее: если раньше через всякие две точки можно было провести только одну прямую, то теперь в случае, когда одна из двух точек есть бесконечно удаленная точка, число таких прямых бесконечно велико. Однако сохраняется свойство плоскости, что через всякие три ее точки проходит одна и только одна окружность, если условиться прямые рассматривать как окружности бесконечно большого радиуса.

Аналогичное предложение справедливо для сферы, именно, что через всякие три ее точки можно провести одну и только одну окружность. В связи с этим особый интерес приобретает следующее важное свойство стереографической проекции: *при стереографической проекции окружности на сфере переходят в окружности и прямые на плоскости: в прямые, если окружности на сфере проходят через полюс и в окружности, если они через полюс не проходят.*

Соответствие между окружностями на сфере Σ проходящими через ее полюс N, и прямыми на плоскости E было установлено еще выше (§ 1, свойство (3)). Поэтому для доказательства указанного свойства стереографической проекции нам достаточно рассмотреть случай, когда окружности на Σ не проходят через N.

Пусть γ такая окружность на Σ, отличная от большой окружности, S — вершина конуса, огибаемого касательными плоскостями к Σ в точках окружности γ, P — произвольная точка на γ и S′, P′ — стереографические образы точек S и P на плоскости проекции. Обозначим еще через M' и M, точки пересечения прямой, проходящей через S и P с плоскостью E и параллельной ей плоскостью E_N, касающейся Σ

---

[1] Под сколь угодно малой окрестностью произвольной точки P плоскости E понимается совокупность всех точек этой плоскости, лежащих внутри круга сколь угодно малого радиуса с центром в точке P. Для бесконечно удаленной точки «сколь угодно малая окрестность» определяется как совокупность точек расширенной плоскости E, лежащих *вне* круга сколь угодно большого радиуса с центром в точке O.

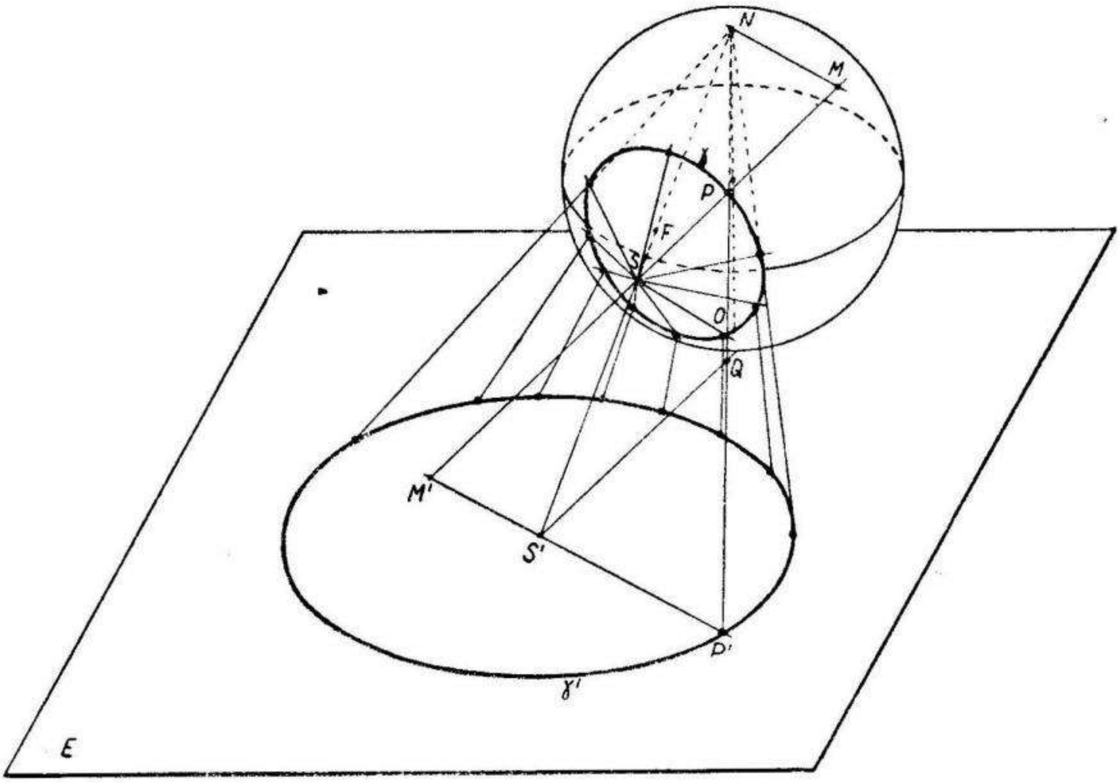
[2] Больцано (1781—1899) — известный чешский математик; Вейерштрасс (1815—1897) — знаменитый немецкий математик. С принципом Больцано—Вейерштрасса можно ознакомиться по любому учебнику математического анализа.

в полюсе N. Покажем, что расстояние S′, P′ не зависит от выбора точки P на γ (теорема Шаля).[1]

Для этого в плоскости, определяемой лучами SP и SN, проведем из точки S′ прямую, параллельную SP, до встречи в точке Q с прямой P′P (фиг. 4). Из рассмотрения подобных треугольников S′NQ и SNP следует, что

$$S'Q = S'N \cdot \frac{SP}{SN}.$$

Далее, так как MN=MP (касательные к Σ) и MN параллельна M′P′, то M′P′=M′P, поэтому S′Q=S′P′ и из предыдущего следует, что



Фиг. 4.

$$S'P' = S'N \cdot \frac{SP}{SN}$$

и, следовательно, не зависит от выбора точки P на γ.

Из доказанного следует, что окружности γ на Σ в плоскости проекций E соответствует окружность с центром в точке S′ и радиусом

$$R_\gamma = S'N \cdot \frac{SR}{SN}.$$

Если теперь γ — большая окружность на Σ, то, рассматривая ее как предельное положение параллельных ей рассмотренных выше окружностей при $S \to \infty$, заключаем, что

[1] Шаль (1793—1880) — известный французский математик. Другое доказательство см. в книге Четверухина — Введение в высшую геометрию (1936 г.) или в книге Гильберта и Кон-Фоссена — Наглядная геометрия (1936 г.).

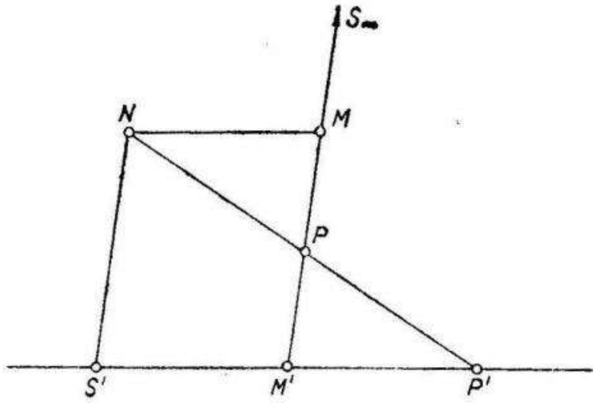
$$\lim_{S\to\infty}\frac{SP}{SN}=1$$

и, следовательно, в этом случае

$$R_{\gamma}=S'N,$$

что, впрочем, легко доказывается и непосредственно (фиг. 5).

Примечание. Подчеркнем, что теорема Шаля не только доказывает, что окружность γ на сфере Σ переходит в окружность γ' на плоскости E, но указывает одновременно простой геометрический способ нахождения центра окружности γ', именно, согласно этой теореме центр окружности γ' совпадает с точкой S' — образом вершины S рассмотренного выше конуса, касающего Σ вдоль γ.



Фиг. 5.

Пользуясь теоремой Шаля, читатель легко найдет окружность на Σ, соответствующую данной окружности на плоскости E.

5. Упражнения. В заключение § 1 приведем несколько упражнений.

1) Исследовать расположение на сфере Σ окружностей, которым на плоскости E соответствуют параллельные прямые.

2) Найти условия, при которых две точки плоскости E являются образами двух диаметрально противоположных точек на Σ.

3) Для двух данных точек на E (не исключая и бесконечно удаленной точки) построить окружность, «сферически равноудаленную» от этих точек, т. е. приобретающую такую равноудаленность при переходе от E к Σ.

4) Исследовать геометрические особенности преобразования плоскости E, соответствующего преобразованию вращения сферы Σ.

Примечание. Решение последних задач упрощается при исследовании комплексной плоскости (см., например, Форд, Автоморфные функции, 1936). Интересно, однако, дать элементарное чисто геометрическое решение указанных задач.

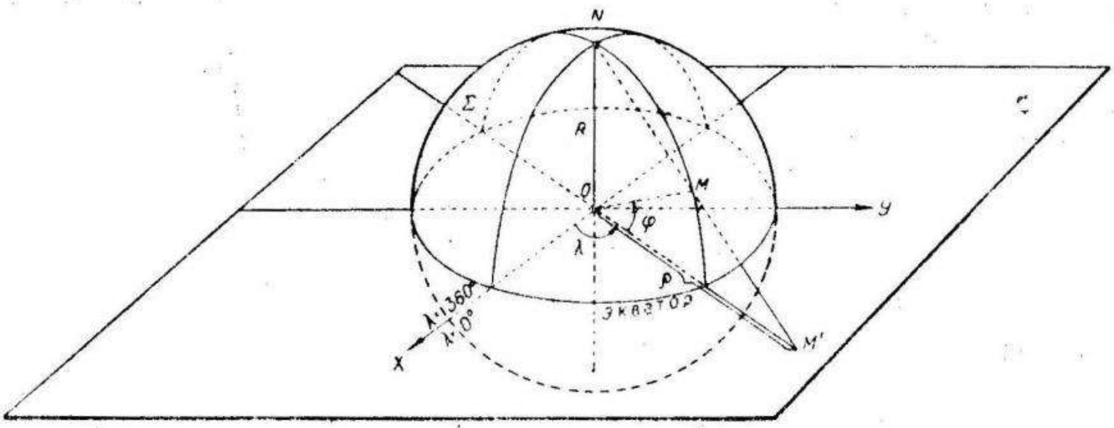
§ 2.

1. Проекция Меркатора.[1] Проекция Меркатора, называемая также равноугольной цилиндрической проекцией, приводящая к особенно удобным для целей мореплавания картам, представляет отображение поверхности шара на вертикальную полосу шириной 2π,

[1] Герхард Кремер или Меркатор (1512—1594) — известный голландский картограф. Придуманная им в 1569 проекция, названная затем его именем, представляет один из видов равноугольных проекций (проекций сохраняющих углы, а следовательно, и подобие в малом). Проекцию Меркатора можно рассматривать как предельный случай равноугольной конической проекции, принадлежащей Ламберту (1728—1777). Относительно этих и других картографических проекций см. любой учебник математической картографии.

при котором круги широты переходят в горизонтальные сечения полосы, а меридианы — в перпендикулярные к ним прямые. Нулевому меридиану соответствуют обе граничные прямые полосы. Полюсам сферы (Земли) соответствуют бесконечно удаленные точки полосы. Наконец, что особенно важно, отображение строится так, чтобы оно было равноугольным или конформным, т. е. обладало свойством сохранения углов.

Чтобы получить проекцию Меркатора строится сперва стереографическое отображение сферы на плоскость E, проходящую через центр сферы (фиг. 6). Затем проводится разрез по нулевому меридиану сферы и его образу на плоскости проекций E, после чего строится указанное выше конформное отображение на полосу шириной 2π для плоскости E с разрезом.



Фиг. 6.

Если λ и φ долгота и широта точки M на сфере Σ радиуса R, то соответствующая точка M' на E имеет полярные координаты ϱ и λ, где ϱ определяется из соотношения

$$\varrho = R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \tag{1}$$

которое читатель легко докажет сам. Полагая

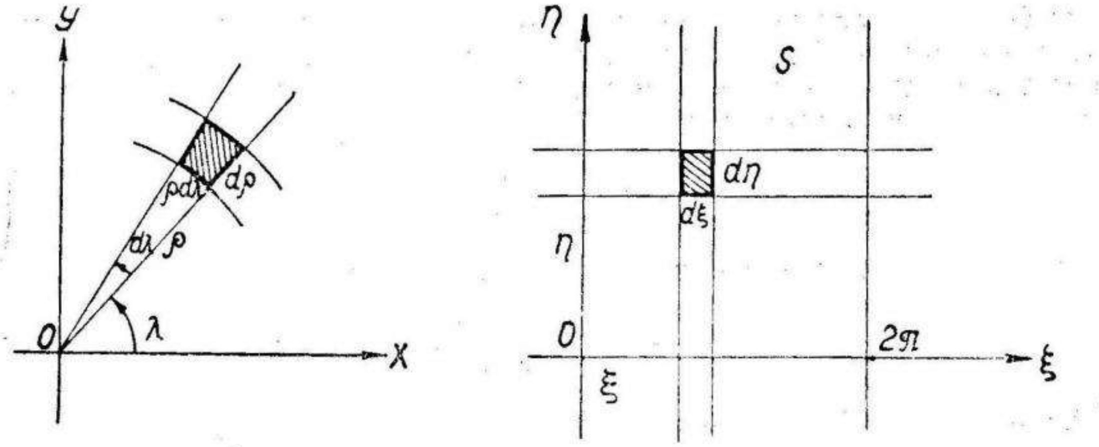
$$\xi = \lambda,\ \eta = f(\varrho), \tag{2}$$

где $f(\varphi)$ пока неизвестная функция, мы получим отображение плоскости E с разрезом по положительной полуоси (образ нулевого меридиана) на полосу S: $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$, расположенную в плоскости (ξ, η), причем окружности $x^2 + y^2 = \varrho^2$ и лучи, выходящие из начала, переходят в горизонтальные, соответственно вертикальные сечения S. Остается подобрать функцию $f(\varrho)$ так, чтобы выполнялось требование конформности. Так как сохранение углов в целом влечет за собой подобие в малом (т. е. бесконечно малый треугольник переходит в подобный бесконечно малый треугольник) и обратно, из подобия в малом следует сохранение углов, то нам достаточно подобрать функцию $f(\varrho)$ так, чтобы бесконечно малому прямоугольнику на плоскости E соответствовал подобный бесконечно малый прямоугольник на S. В силу (2) бесконечно малому прямоугольнику E, взятому в полярной системе координат (ϱ, λ), соответствует бесконечно малый прямоугольник на S в прямоугольной системе координат (ξ, η). Из подобия этих прямоугольников (см. фиг. 7) следует, что

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\varrho}{\varrho d\lambda}$$

и, так как очевидно

$$d\xi = d\lambda \quad \text{и} \quad d\eta = f'(\varrho)\, d\varrho,$$



Фиг. 7.

то для определения неизвестной функции $f(\varrho)$ получаем уравнение

$$f'(\varrho) = \frac{1}{\varrho},$$

откуда, интегрируя, получаем

$$f(\varrho) = \ln \varrho + C.$$

Постоянную C подбираем так, чтобы экватору $(\varrho = R)$ соответствовало горизонтальное сечение S, расположенное на оси абсцисс, следовательно, чтобы $f(R)=0$, что дает $C=-\ln R$. Тогда $f(\varrho)=\ln\frac{\varrho}{R}$ и, возвращаясь к сфере, имеем для проекций Меркатора соотношение

$$\xi = \lambda, \; \eta = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{2}$$

2. Локсодрома. Под локсодромой понимают линию на поверхности Земли, которая со всеми пересекающими ее меридианами образует один и тот же угол. В мореплавании этот угол называется курсом корабля; следовательно, пока корабль не меняет курса, он идет по локсодроме. Так как на карте Меркатора — обозначим снова ее через S — меридианы изображаются параллельными вертикальными прямыми и отображение на S — конформно, то образ локсодромы на карте Меркатора есть прямая, образующая с вертикалью тот же угол $\varkappa$, что локсодрома с меридианами.

Одна из задач по мореплаванию состоит в следующем: требуется определить, во-первых, курс $\varkappa$, по которому должен двигаться корабль, чтобы попасть из точки $M_1(\lambda_1, \varphi_1)$ в точку $M_2(\lambda_2, \varphi_2)$ и, во-вторых, расстояние s по локсодроме между M_1 и M_2.

Р е ш е н и е. Если (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) соответствующие M_1 и M_2 точки на карте Меркатора, то

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{R} \frac{1}{\ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)}}. \tag{4}$$

Рассматривая бесконечно малый прямоугольный треугольник, образуемый элементарной дугой для локсодромы с кругом широты, проходящим через один конец ds, и меридианом, проходящим через другой ее конец, легко убеждаемся, что

$$ds = \frac{R\, d\varphi}{\cos \varkappa},$$

откуда вся длина s локсодромы от M_1 до M_2 равна

$$s = \frac{R\,(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varkappa}. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) решают задачу.

ЛИТЕРАТУРА ПО КАРТОГРАФИИ

1. Г р а у р. Математическая картография, Учпедгиз, 1938.
2. Ю щ е н к о. Картография, 1941.
3. Л и о д т. Картоведение, 1948
4. К а р а в а й с к и й. Математическая картография, 1946.

И. Ф. ТЕСЛЕНКО

ОБ ИНВЕРСИИ

§ 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНВЕРСИИ И ОСНОВНЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

Инверсией относительно данной окружности K *с центром в точке* O *и радиусом* R *называется такое точечное преобразование плоскости, при котором всякой точке* A, *отличной от* O, *ставится в соответствие точка* A_1 *так, что, во-первых, абе точки* A *и* A_1 *расположены на одном и том же луче, выходящем из точки* O, *и, во-вторых, расстояния* OA *и* OA_1 *связаны соотношением:*

$$OA \cdot OA_1 = R^2.$$

Точки A *и* A_1 *называются взаимообратными или инверсными относительно окружности* K, *называемой окружностью инверсии; величина* R^2 *называется степенью инверсии; точка* O — *центром или полюсом инверсии.*

Из определения инверсии непосредственно вытекают следующие ее свойства:

1. Свойство симметрии: если точка A преобразуется в точку A_1, то A_1 преобразуется в A.

2. Точки, лежащие внутри окружности инверсии, преобразуются в точки, расположенные вне окружности инверсии и наоборот. Исключение составляет полюс инверсии, не имеющий инверсной к нему точки, расположенной на конечном расстоянии.[1]

3. Точки, лежащие на окружности инверсии, преобразуются сами в себя.

Примечание. Если на прямой OA взять точку A_2 (фиг. 1), симметричную A_1, относительно центра симметрии O, то абсолютная величина произведения $OA \cdot OA_2$ равна произведению $OA \cdot OA_1 = R^2$, но так как точки A и A_2 расположены по разные стороны от полюса O, то произведению при $OA \cdot OA_2$ приписывают отрицательный знак, т. е. $OA \cdot OA_2 = -R^2$.

[1] Из (1) видно, что если $OA \to 0$, то $OA_1 \to \infty$, следовательно, если точка A приближается к точке O — полюсу инверсии, то инверсная точка A_1 удаляется в бесконечность. Поэтому представляется естественным распространить преобразование инверсии и на ее полюс, отнеся к этому полюсу в качестве инверсной точки бесконечно удаленную точку плоскости. О введении бесконечно удаленной точки для плоскости см. в этом сборнике статью Л. И. Волковыского «Стереографическая проекция» (§ 1, п. 3).

Очевидно, если фигуры F и F_1 взаимно инверсны относительно полюса инверсии O при степени инверсии R^2, то фигура F_2, симметричная фигуре F_1 относительно центра симметрии O, и инверсна фигуре F относительно полюса инверсии O при степени инверсии — R^2.

Решим теперь следующую задачу: Построить точку A_1, инверсную к данной точке A относительно данной окружности K.

Если точка A лежит вне K, то проводим из нее две касательные к K (фиг. 1) и через точки их касания B и C с окружностью проводим прямую BC. Точка пересечения BC с лучом OA есть искомая точка A_1. В самом деле, из прямоугольного тр-ка OBA имеем $OA \cdot OA_1 = R^2$.

Если же точка A лежит внутри K, то восстанавливаем из нее перпендикуляр к лучу OA и проводим касательную к окружности инверсии в одной из ее точек пересечения с этим перпендикуляром. Точка пересечения этой касательной с лучом OA есть искомая точка A_1.

Рассмотрим теперь, как преобразуются при инверсии окружности и прямые.

Прежде всего, ясно, что прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется сама в себя.

Покажем, что прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии (фиг. 2). Для этого из центра инверсии O опустим перпендикуляр OA на прямую l и построим точку A_1, инверсную A. Пусть также точка B_1 инверсная точке B прямой l. Тогда $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$ и тр-к OAB подобен тр-ку OA_1B_1, откуда вытекает, что $\angle OB_1A_1 = 90°$. Следовательно, точка B_1 лежит на окружности диаметра OA_1, которая и соответствует прямой l.

Построение окружности, инверсной данной прямой, можно выполнить, как показано ниже.

Предположим, что даны полюс инверсии O, степень инверсии R^2 и прямая l, не проходящая через полюс инверсии.

Рассмотрим два случая:

а) R меньше расстояния от полюса инверсии O до данной прямой l, т. е. $R < OB$ (фиг. 3) и, следовательно, $R > OB_1$, ибо $OB \cdot OB_1 = R^2$. Опускаем из полюса O перпендикуляр OB на l, строим полуокружность на диаметре OB и проводим хорду $OP = R$. Перпендикуляр, опущенный из точки P на диаметр OB, дает точку B_1, инверсную B. На диаметре OB_1 строим окружность O_1, инверсную l.

б) R больше расстояния от полюса инверсии O до данной прямой l, т. е. $R > OB$ (фиг. 4), и, следовательно, $R < OB_1$. Опускаем из полюса инверсии O перпендикуляр OB на прямую l. Затем строим на прямой l такую точку P, чтобы $OP = R$, и при точке P — $\angle OPB_1 = 90°$; находим точку B_1, инверсную точке B ($OB \cdot OB_1 = R^2$). Окружность, построенная на диаметре OB_1 и есть искомая окружность, инверсная прямой l при данной инверсии R^2.

Заметим, что точки дуги QB_1P являются отображениями точек хорды QP; точки дуги QO являются отображениями точек луча QM (от точки Q вверх до бесконечно удаленной точки луча QM); точки дуги PO являются отображениями точек луча PN (от точки P вниз до бесконечно удаленной точки луча PN); точки P и Q преобразуются сами в себя, а точка O отображает бесконечно удаленную точку прямой l.

Из предыдущего следует: 1) При удалении прямой l от центра инверсии обратная ей фигура — окружность уменьшается и обращается в точку O, когда прямая l — бесконечно удаленная прямая.

2) Если l касается окружности инверсии, то и инверсная ей окружность внутренне касается окружности инверсии.

3) При приближении прямой l к полюсу инверсии O, инверсная ей окружность O_1 увеличивается и сливается с прямой l, когда последняя проходит через центр инверсии O.

Убедимся дальше, что окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую (фиг. 4а).

Действительно, пусть точка A будет центром данной окружности, проходящей через полюс O, а точки A_1 и B_1 инверсны A и B. Два треугольника OAB и OA_1B_1 подобны, а так как OA=AB, то $OB_1=A_1B_1$. Точка B_1 равноудалена от неподвижных точек O и A_1. Следовательно, геометрическим местом точек B_1, инверсных точке B, будет прямая l, проходящая через середину OA_1 и перпендикулярная к ней.

Примечание. Если A, A_1 и B, B_1 две пары взаимно инверсных точек, то имеем соотношение $OA:OA_1=OB:OB_1$, откуда следует, что тр-ки OAB и OA_1B_1, а также тр-ки OA_1B и OAB_1 между собой попарно подобны, т. е.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB_1}{OA_1} \quad \text{и} \quad \frac{OB}{OA_1} = \frac{OA}{OB_1}.$$

Нетрудно видеть, что A, B и A_1, B_1 являются также двумя парами взаимно инверсных точек относительно полюса O_1 (фиг. 5), лежащим на пересечении прямых AB и A_1B_1, и образуют тр-ки O_1AA_1 и O_1BB_1, O_1BA_1 и O_1B_1A, также между собой попарно подобные.

Заметим, что отрезки A_1B и AB_1, пересекаясь в точке O_2, определяют третий полюс для тех же двух пар взаимно инверсных точек A_1, B и A, B_1 с отрицательной степенью инверсии.

Из подобия рассмотренных тр-ков следует, что

$$\angle 1 = \angle 2;\ \angle 3 = \angle 2;\ \angle 4 = \angle 6;\ \angle 5 = \angle 7;$$

$$\angle 6 + \angle 7 = \angle 8 + \angle 2 = 2d.$$

Две пары пересекающихся прямых AB и A_1B_1, AA_1 и BB_1 (фиг. 5), образующие при пересечении равные углы $\angle 1=\angle 2$, называются парами *антипараллельных* прямых, одна пара относительно другой.

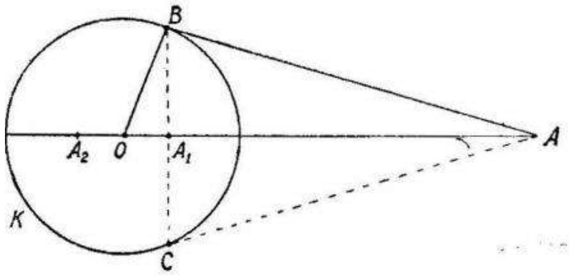
Если пара антипараллельных прямых AB и A_1B_1 пересекает стороны $\angle A_1OB_1$, то имеем (фиг. 6) $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3=2d$ и

$$\frac{OA}{OB_1} = \frac{OB}{OA_1}.$$

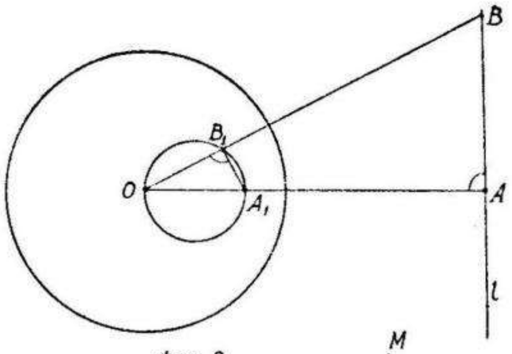
Таким образом, пара антипараллельных прямых, пересекая стороны угла, отсекает от них обратно пропорциональные отрезки (OA, OB, OA_1, OB_1), а четыре точки пересечения (A, B, A_1, B_1) лежат на одной окружности (конциклические точки).

Если антипараллельные прямые AB и A_1B_1 (фиг. 7), пересекая стороны $\angle AOB$, образуют пары равных углов: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, а, следовательно, и пары равных отрезков OA=OB и $OA_1=OB_1$, то антипараллельные прямые AB и A_1B_1 параллельны между собою, т. е. отрезки OA, OB, OA_1 и OB_1 прямо и обратно пропорциональны.

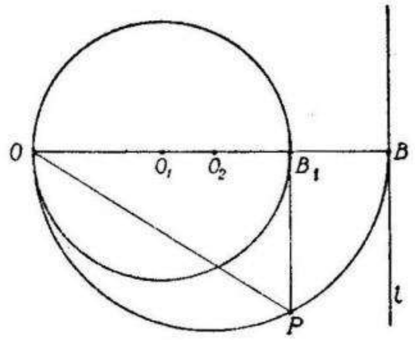
В таком особенном случае две параллельные прямые AB и A_1B_1,



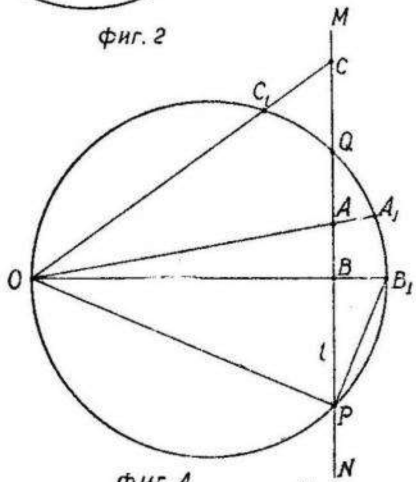
Фиг. 1



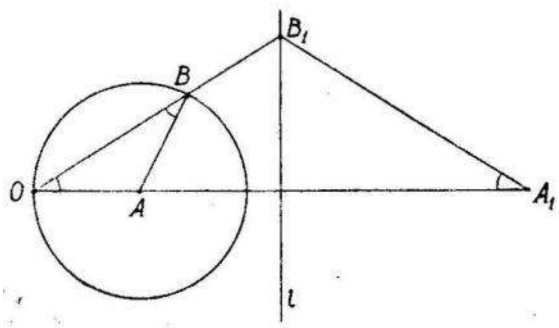
Фиг. 2



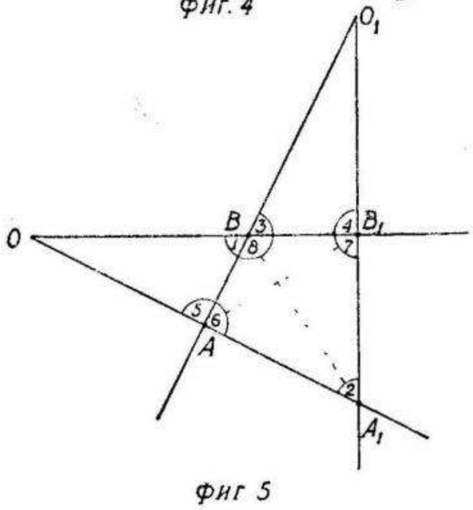
Фиг. 3



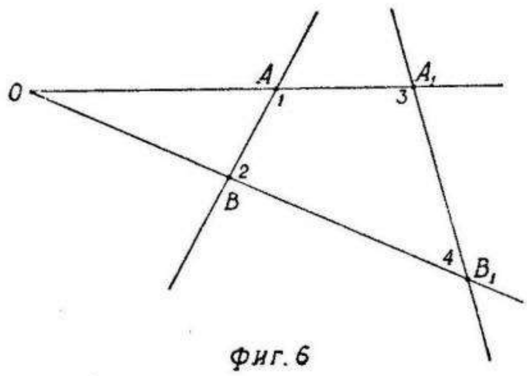
Фиг. 4



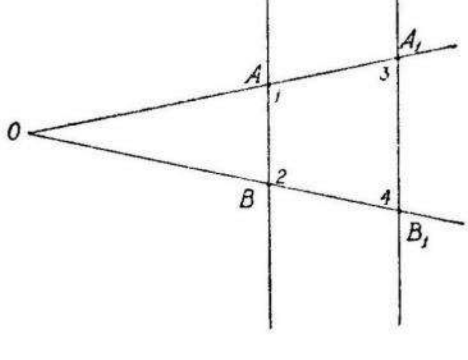
Фиг. 4а



Фиг 5



Фиг. 6



Фиг. 7

пересекая стороны $\angle AOB$, дают концикличеcкие точки (A, B, A_1, B_1); в общем случае пара параллельных прямых этого свойства не имеет.[1]

Докажем теперь, что окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность.

Пусть дана окружность с диаметром AB и центр инверсии O. Построим точки A_1 и B_1, инверсные концам диаметра AB, проходящего через центр инверсии O (фиг. 8). Возьмем произвольную точку C данной окружности и построим ей инверсную C_1. Тогда CA — антипараллельна C_1A_1, следовательно, $\angle CAB = \angle A_1C_1Д$; CB антипараллельна C_1B_1, следовательно $\angle OC_1B_1 = \angle OBC$, но $\angle CAB + OBC = 90$, т. к. $\angle ACB = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр.

Следовательно, $\angle OC_1B_1 + \angle A_1C_1Д = 90°$; но тогда и угол им смежный $\angle B_1C_1A_1$ должен быть прямым. Таким образом, точка C_1 лежит на окружности с диаметром A_1B_1.

Заметим, что центры O_1 и O_2 не являются инверсными точками потому, что если $OM \cdot OM_1 = R^2$, то $OO_1OO_2 \neq R^2$, ибо $OO_1 > RM$ и $OO_2 > RM_1$ как гипотенузы прямоугольных тр-ков OMO_1 и OM_1O_2 (см. также ниже задачу № 5).

Следствие: центр инверсии O можно рассматривать как центр подобия окружностей O_1 и O_2; при этом инверсные точки не являются соответствующими друг другу в подобии.

Решим задачу на построение.

Даны: окружность O_1, лежащая вне окружности инверсии, центр инверсии O и степень R^2; построить O_2, инверсную O_1.

Решение. Найдем точки A_1 и B_1 (фиг. 9), инверсные соответственно точкам A и B, строим окружность на диаметре A_1B_1. Построенная окружность O_2 инверсна O_1.

Читателю рекомендуем рассмотреть остальные случаи задачи, именно: а) окружность O_1 касается окружности инверсии; б) окружность O_1 лежит внутри окружности инверсии, но не концентрична с ней; в) окружность O_1 и инверсионная — концентричны.

Рассмотренные свойства инверсии позволяют утверждать, что: а) окружность и прямая всегда инверсны друг другу, б) совокупность прямых и окружностей преобразуется инверсией в совокупность прямых и окружностей.

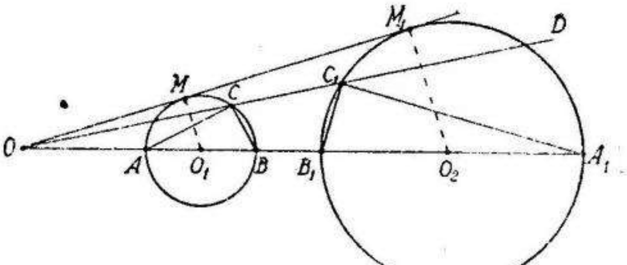
Наконец, докажем, что преобразование инверсии сохраняет углы.

Лемма. Касательные в соответственных (инверсных) точках к двум инверсным кривым образуют равные углы с лучом, соединяющим эти точки с центром инверсии.

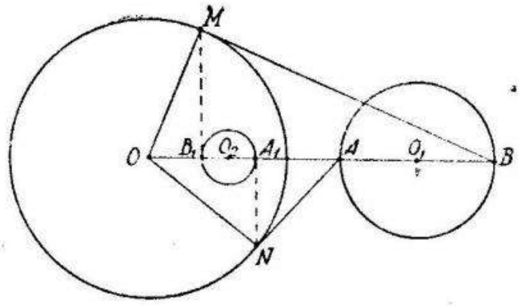
Берем взаимоинверсные точки A и A_1 (фиг. 10), B и B_1 двух взаимоинверсных фигур F и F_1. Прямые AB и A_1B_1 антипараллельны, а потому $\angle OAB = \angle OB_1A_1$. Если луч OB_1 вращать вокруг центра O против часовой стрелки и приближать к совпадению точки B с A и B_1 с A_1, то хорды AB и A_1B_1, оставаясь все время антипараллельными, будут вращаться в противоположных направлениях и приближаться к совпадению с касательными ST и S_1T_1. В предельном положении будем иметь:

---

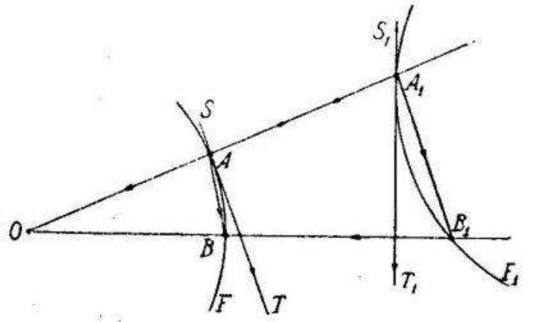
[1] Укажем на три построения прямой, антипараллельной стороне AC в данном тр-ке ABC: 1) при произвольной точке $Д$ стороны AB строим $\angle BДЕ = \angle ACБ$; прямая $ДЕ$ антипараллель со стороной AC; 2) через вершины A и C проводим произвольную окружность O, пересекающую стороны AB и BC, соответственно в точках $Д$ и $Е$. Хорда $ДЕ$-антипараллель со стороной AC; 3) касательная $ДЕ$ в вершине B тр-ка ABC к окружности O, описанной около тр-ка ABC-антипараллель со стороной AC этого тр-ка ABC. При этом касательная $ДЕ$ — предельное положение секущей.



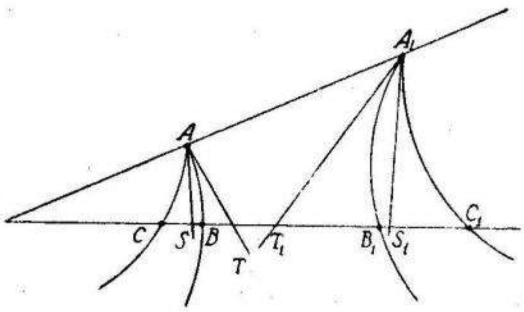
Фиг. 8



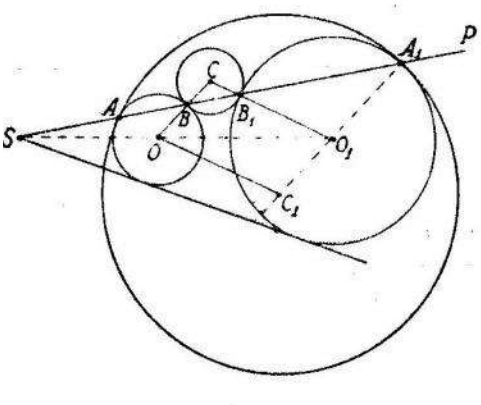
Фиг. 9



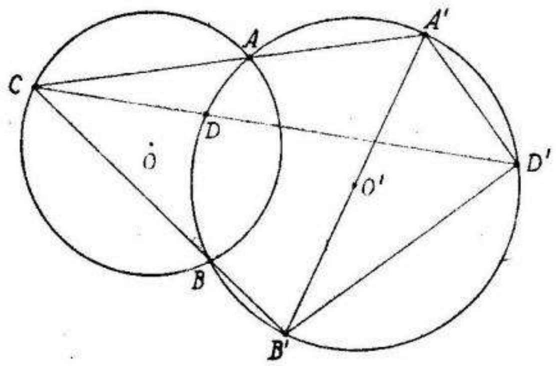
Фиг 10



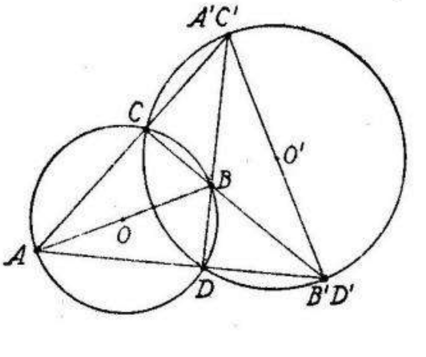
Фиг. 11



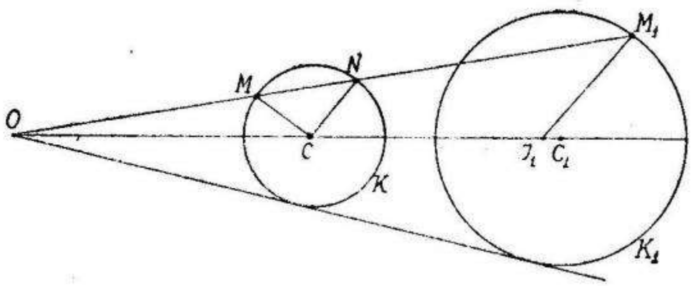
Фиг 12



Фиг. 13



Фиг. 14



Фиг. 15

$$\angle OAT = \angle OA_1S_1 \quad \text{и} \quad \angle TAA_1 = \angle T_1A_1A.$$

Докажем теперь, что преобразование инверсии сохраняет углы (фиг. 11). Пусть пары линий AB и A_1B_1, AC и A_1C_1 взаимно инверсны и пары точек A и A_1, B_1 и B, C и C_1 — взаимно инверсны.

Проведя в точках A и A_1 касательные к линиям AB и AC, A_1B_1 и A_1C_1, на основании леммы имеем: $\angle SAA_1 = \angle S_1A_1A$ и $\angle TAA_1 = \angle T_1A_1A$. Вычтя по частям второе равенство из первого, получим:

$$\angle SAA_1 - \angle TAA_1 = \angle S_1A_1A - \angle T_1A_1A, \quad \text{т. е.} \ \angle SAT = \angle S_1A_1T_1.$$

Если $\angle SAT$ образован вращением луча AS около вершины A, а $\angle S_2A_1T_1$ — вращением луча A_1S_1 около вершины A_1, то замечаем, что направления вращений отрезков при образовании равных углов $\angle SAT$ и $\angle S_1A_1T_1$ противоположны (против движения часовой стрелки и по движению часовой стрелки). Таким образом, преобразование инверсии сохраняет углы по величине, но меняет их по направлению.

Следствие. Вторичное преобразование одной из фигур при помощи инверсии дало бы не только равенство соответственных углов, но и одинаковое направление вращения соответственных сторон при их образовании, т. е. четное число инверсии двух кривых не меняет угла их пересечения; нечетное же число инверсий двух кривых меняет только знак этого угла.

§ 2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВЕРСИИ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Свойствами инверсии пользуются при решении многих геометрических задач на построение. Сюда относятся задачи о проведении окружностей, касательных к данным прямым и окружностям, а также окружностей, пересекающих данные прямые или окружности под данными углами. Сюда же относятся задачи о треугольниках, стороны которых суть дуги окружности.

В дальнейшем нам придется пользоваться понятиями ортогональности и изогональности окружностей.

Две окружности, пересекающиеся под прямым углом, называются ортогональными друг другу.

Окружность, пересекающая две данные окружности под равными углами, называется по отношению к ним изогональною.

Из этих определений следует, что

1) если окружность O_1 ортогональна окружности инверсии, то $OA \cdot OB = R^2 = OC^2$, т. е. точка A инверсна точке B и наоборот; следовательно, окружность O_1 инверсна сама себе.

2) Окружность, касательная одновременно к двум данным окружностям, изогональна по отношению к ним, так как образует с каждой из них угол, равный O°.

Задача 1. Построить окружности, ортогональные данной окружности O.

Решение. Всякая окружность, проходящая через две инверсные относительно O точки, пересекает окружность O под прямым углом. Радиусы построенных окружностей равны длинам касательных, проведенных из центров окружностей к окружности O.

Задача 2. Даны две окружности O и O_1; построить касательные к ним окружности.

Решение: построим внешний центр подобия S и секущую SP (фиг. 12), которая пересекает окружность O в точках A и B и окружность O_1 в точках A_1 и B_1. Точка S является одновременно и центром инверсии со степенью инверсии $R^2 = SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$. Произвольная окружность, проходящая через две взаимно инверсные точки будет решением поставленной задачи. Для определения ее центра продолжим радиусы OB и O_1B_1 до пересечения в точке C. Полученный таким образом тр-к CBB_1 будет равнобедренным, т. к. $\angle OAB = \angle OBA = \angle O_1A_1B_1 = \angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Если принять точку C за центр, а $CB = CB_1$ за радиус, то получим окружность, внешним образом касающуюся к данным двум O и O_1. Наименьшей из всех окружностей, касающихся данных окружностей O и O_1 внешним образом, т. е. проходящих через пары инверсных точек (типа B и B_1), является окружность с центром на линии центров OO_1. Совершенно так же убедимся, что и точка C_1, в которой пересекаются продолжения радиусов OA и O_1A_1 другой пары инверсных точек, является центром окружности, касающейся данных окружностей в точках A и A_1. Заметим еще, что в обоих случаях окружности C и C_1 будут касаться обеих данных окружностей одинаковым образом: окружность C внешним, а окружность C_1 внутренним.

Случай, когда S будет внутренним центром подобия двух окружностей O и O_1 рекомендуем рассмотреть читателю. Укажем только, что в этом случае построенные окружности касаются данных неодинаковым образом.

Предлагаем читателю показать, что если изогональная окружность проходит через две взаимно инверсные точки двух окружностей, то она инверсна сама себе.

Задача 3. Даны две ортогональные окружности (фиг. 13) O и O_1, пересекающиеся в точках A и B. Возьмем произвольные точки C на O и Д на O_1. Доказать, что окружности АСД и ВСД ортогональны.

Решение. Пусть точка C есть полюс инверсии, квадрат касательной, проведенной из C к окружности O_1 — степень инверсии. Тогда окружность O_1 преобразуется сама в себя, а окружности O, АСД, ВСД, как проходящие через полюс инверсии, преобразуются в прямые A′Б′, A′Д′, B′Д′, причем точки A′, B′, Д′ инверсны соответственно точкам A, B, Д. И так как окружность O ортогональна окружности O_1, то прямая A′B′ пересечет O_1 под прямым углом, т. е. пройдет через ее центр. Легко видеть, что A′Д′ и B′Д′ взаимно перпендикулярны, следовательно, им инверсные окружности АСД и ВСД ортогональны.

Задача 4. Даны две ортогональных окружности (фиг. 14) O и O_1 с взаимно перпендикулярными диаметрами AB и A′B′. Показать, что четыре прямые, соединяющие точки A, B, A′, B′ проходят попарно через две постоянные точки.

Решение. Пусть точка A есть полюс инверсии, квадрат касательной, проведенной из A к O_1 — степень инверсии. Тогда окружность O_1 преобразуется сама в себя, а окружность O в прямую C′Д′, ортогональную к окружности O_1, следовательно, проходящую через ее центр. А так как C′Д′ должна быть перпендикулярна к AB, то она сливается с A′B′. Отсюда следует, что AA′ и BB′ проходят через точку C, а A′B и AB′ — через точку Д. Если принять за полюс точку B, то придем к тем же результатам.

Задача 5. Доказать, что центры O_1 и O_2 двух взаимно инверсных окружностей не являются инверсными точками.

Решение. Действительно, пусть даны две взаимно инверсные окружности K и K_1 и их центр инверсии O и пусть луч OM пересекает окружность K в точках M и N, а окружность K_1 в точке M_1. Тогда $OM \cdot ON = P$, где P степень точки O относительно окружности K (фиг. 15), а $OM \cdot OM_1 = R^2$, где R^2 степень инверсии. Разделив одно из этих равенств на другое, получим: $\frac{OM_1}{ON} = \frac{R^2}{P} = \text{const}$, а это показывает, что точки M и N гомотетичные с центром гомотетии в точке O и коэфициентом гомотетии $\frac{R^2}{P}$. Известно, что коэфициент гомотетии двух окружностей с радиусами R_1 и R_0 равен $\frac{R_1}{R_0}$, отсюда $\frac{R_1}{R_0} = \frac{R^2}{P}$ или $R_1 = \frac{R^2}{P} R_0$. Если же C и C_1 центры этих окружностей, то $\frac{OC_1}{OC} = \frac{R^2}{P}$ или $OC_1 = \frac{R^2}{P} \cdot OC$.

Пусть точка J_1, отличная от C_1, инверсна центру C, тогда на основании вышеизложенного $OJ_1 = \frac{R^2}{OC}$.

С другой стороны, $OC_1 = \frac{R^2}{P} OC$. А для того, чтобы точки C и C_1 были инверсными, необходимо, чтобы точки J_1 и C_1 слились, т. е. $OJ_1 = OC_1$ или $\frac{R^2}{OC} = \frac{R^3}{P} \cdot OC$, откуда $P = OC^2$. Но P есть степень точки O относительно окружности K, которая всегда равна $OC^2 - R_0^2$, тогда $P = OC^2 = OC^2 - R_0^2$, откуда $R_0^2 = O$. Следовательно, точки J_1 и C_1 сливаются только в том случае, когда радиус R_0 окружности K равен нулю.

В справедливости доказанного можно было бы убедиться и так: если точки J_1 и C взаимно инверсны, то тр-к OMC $\sim$ тр-ку OJ_1M_1, откуда $\frac{OC}{MC} = \frac{OM_1}{J_1M_1}$ или $\frac{M_1O}{J_1M_1} = \frac{OC}{MC} = \frac{OC}{R} = \cos t$. А это показывает, что отношение расстояний точки M_1 от точек O и J_1 есть величина постоянная. Тогда геометрическим местом точки M_1 будет окружность K_1 (окружность Аполлония).

Задача 6. Дана окружность O и две точки A и B (фиг. 16). Проведем секущую BCD. Прямые AD и AC пересекают окружность O в точках E и F. Найти геометрическое место центров окружностей AEF.

Решение. Преобразуем нашу фигуру инверсно, взяв за полюс точку A, а квадрат касательной, проведенной из A к O — за степень инверсии. Окружность O преобразуется сама в себя, точки E и F соответственно в точки C и D, а окружность AEF инвертируется в прямую CD. Так как прямая CD проходит через неподвижную точку B, то инверсная ей окружность AEF также проходит через неподвижную точку B′, инверсную точке B.

Таким образом, окружности AEF проходят через две постоянные точки; следовательно, геометрическим местом их центров будет прямая, перпендикулярная к середине отрезка AB′.

Задача 7. Даны: точка S и две прямые AB и BC. Провести секущую S╳Y так, чтобы Sx . Sy = R^2 (фиг. 17).

Решение. Примем S за центр, а R^2 за степень инверсии. Преобразовав инверсно точку X мы совместим ее с точкой Y, следовательно, искомая точка Y лежит на пересечении BA с кривой, инверсной прямой BC с центром в S и степенью инверсии R^2. Поэтому проведем SL ⊥ BC радиусом SN=R, засечем прямую BC в точке N и проведем MN ⊥ SN до пересечения с SL в M. Окружность, описанная на диаметре MS пересечет AB в искомых точках Y.

Задача 8. Даны: угол BCD и внутри него точка A. Провести через эту точку прямую так, чтобы отрезки AM и AN этой прямой, встречающей стороны CB и CD данного угла в точках M и N удовлетворяли уравнению $AM \cdot AN = R^2$.

Задача 9. Даны две окружности O и O_1 и точка A. Провести через A прямую так, чтобы отрезки AM и AN этой прямой, встречающей окружность O в точках M и M_1, а окружность O_1 в N и N_1 удовлетворяли уравнению $AM \cdot AN = R^2$.

Задача 10. Даны точка A, прямая BC и окружность O, проходящая через точку A. Провести через A прямую так, чтобы отрезки AM и AN этой прямой, встречающей окружность O и прямую BC в точках M и N, удовлетворяли уравнению: $AM \cdot AN = R^2$. Указание: предельный случай задачи 8.

Задача 11. Даны две окружности O и O_1, пересекающиеся в точке A. Через эту точку провести прямую так, чтобы хорды AM и AN, отсекаемые на этой прямой окружностями O и O_1, удовлетворяли уравнению $AM \cdot AN = R^2$. Указание: тоже частный случай задачи 8.

Задача 12. Даны две окружности O и O_1 и точка A. Через данную точку A провести окружность, касательную к двум данным.

Решение. Приняв A за центр инверсии, степень инверсии выберем так, чтобы одна из окружностей O или O_1 была сама себе инверсной. Для этого степень инверсии примем равной квадрату длины касательной AT, где T точка касания. Тогда линия, инверсная искомой окружности, представляет собою общую касательную к окружностям O' и O'_1, инверсным данным окружностям O и O_1.

Задача 13. Провести окружность, проходящую через данную точку A и пересекающую данные окружности O и O_1 под данными углами α и β.

Решение. Точку A возьмем за центр инверсии, степень выберем произвольно. Тогда данные окружности преобразуются в новые окружности, а искомая окружность преобразуется в прямую, которая пересекает две новые окружности под известными углами α и β. Но угол между прямой и окружностью определяет длину хорды их пересечения. Поэтому задача приводится к такой: даны две окружности O' и O'_1, расположенные одна вне другой. Провести секущую так, чтобы части ее внутри окружностей (хорды) равнялись данным отрезкам. (Если отрезки меньше диаметров, то будет четыре решения). Преобразовав, таким образом, построенную секущую с помощью инверсии, получим искомую окружность.

Задача 14. Провести через данную точку A окружность, касательную к данной окружности O и пересекающуюся с другой данной окружностью O_1 под данным углом α. Указание: частный случай задачи 12.

Задача 15. Провести окружность, проходящую через данную точку A и пересекающую две данные прямые l и n под данными улами α и β. Указание: тоже частный случай задачи 12.

Задача 16. Задача Паппа — Александрийского математика Зв. Даны две окружности O и O_1, имеющие внутреннее касание, и две окружности C и C_1, касающиеся основных и между собой. Обозначим через r и r_1 радиусы окружностей C и C_1, а через P и P_1 — расстояния их центров от линии центров основных. Доказать, что

$$\frac{P_1}{r_1} = \frac{P}{r} + 2.$$

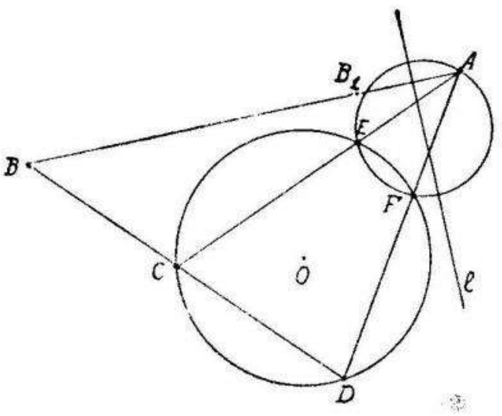
Решение (рис. 18). Примем за центр инверсии точку M, т. е. точку касания основных окружностей. Степень возьмем произвольно. Тогда окружности O и O_1 преобразуются в прямые l и l_1, перпендикулярные к линии центров OO_1, а окружности C и C_1 — в круги C' и C', касающиеся между собой и прямых l и l_1. Радиусы окружностей C' и C'_1 будут равны между собой и пусть равны R. Тогда $C'_1B = C'B + 2R$ или $\frac{C_1'B}{R} - \frac{C'B}{R} = 2$. Из подобия треугольников MBC' и MAC имеем $\frac{C'B}{CA} = \frac{MC'}{MC}$. Но точка M является внешним центром подобия окружностей C и C', поэтому $MC':MC = R:r$. Поэтому предыдущая пропорция дает $\frac{C'B}{R} = \frac{P}{r}$ или $\frac{C'B}{R} = \frac{P}{r}$ (ибо $CA = P$). Аналогично для окружностей C_1 и C'_1 имеем $\frac{C'_1B}{R} = \frac{P_1}{r_1}$, где $P_1 = C_1A_1$. Подставив, получим решение задачи.

Задача 17. Определить место источника звука по результатам измерения времени, проведенного в трех заданных на плоскости точках.

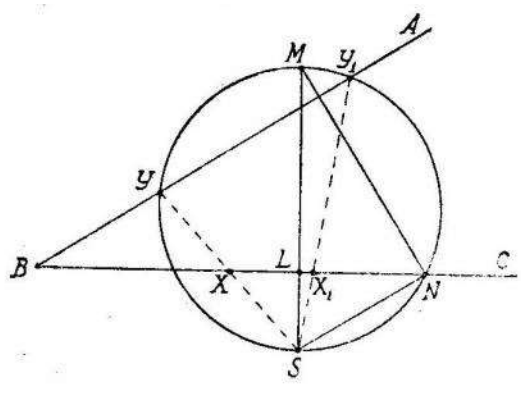
Решение (рис. 19). Пусть A_0, A_1 и A_2 будут тремя точками подслушивания, причем A_0 — точка, куда звук проходит раньше, чем в другие. Разности времен прихода звука в точки A_1 и A_2 по сравнению с A_0 обозначим через a_1 и a_2. Построим окружности в A_1 — радиусом a_1, а в A_2 — радиусом a_2. Точку A_0 примем за центр инверсии. В целях графического упрощения пусть окружность инверсии касается окружности A_1. Преобразовав инверсно окружности A_1 и A_2, получим окружности A'_1 и A'_2. Общая касательная t окружностей A'_1 и A'_2 преобразуется в окружность A_3 с центром в искомом источнике. Окружность A_3 легко построить по трем точкам T_1, A_0, T_2.

Задача 18. Построить окружность K, касающуюся данной окружности O, проходящую через данные две точки A и B и лежащие вне окружности O (рис. 20).

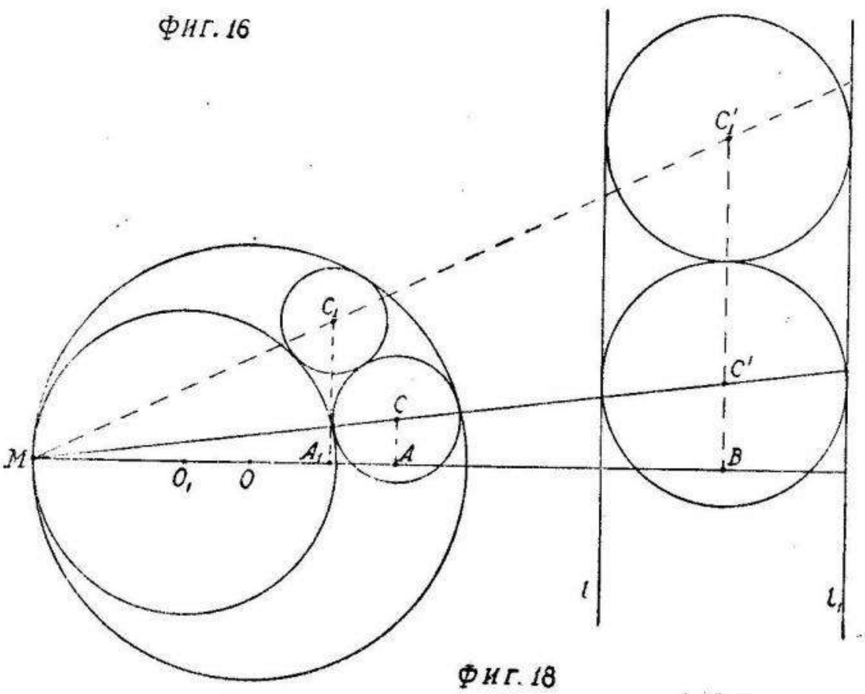
Решение. Точку A примем за центр инверсии, квадрат касательной, проведенной из A к окружности O — за степень инверсии. Искомая окружность преобразуется в прямую $B_1M_1 \perp AB$ и касательную к окружности O. Для построения касательной проводим окружность через P, P_2 и B. Тогда B_1 инверсна B, а касательная B_1M_1 к окружности O инверсна искомой окружности K. Прямая AM_1 в пересечении с O дает точку касания M.



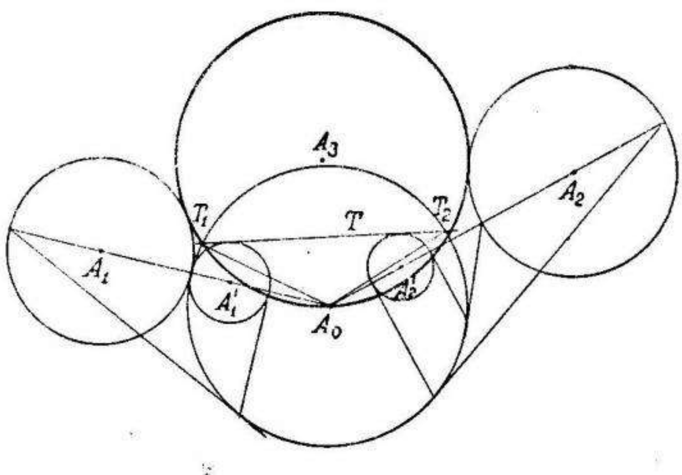
Фиг. 16



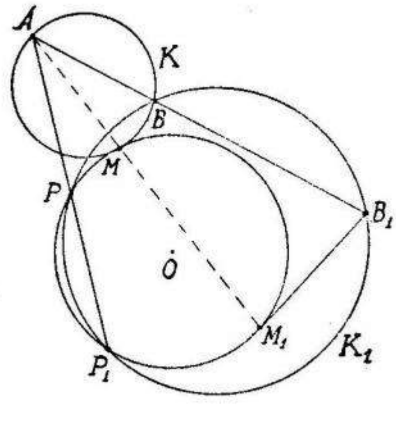
Фиг. 17



Фиг. 18



Фиг. 19



Фиг. 20

Задача 19. Построить окружность K, проходящую через данные две точки A и B и ортогональную к данной окружности O. Указание. Искомая окружность инверсна секущей, проходящей через B′, инверсную B, и центр окружности O.

Задача 20. Построить окружность K, проходящую через две данные точки A и B и пересекающую данную окружность O под данным углом α (рис. 21).

Указание. Строим B_1, инверсную B и секущую $B_1P_1Q_1$ окружности O. Окружность K_1 является геометрическим местом середин хорд, образующих с O угол α. Искомую окружность, инверсную секущей B_1PQ, легко построить по четырем точкам A, B, P, Q.

Задача 21. Дана окружность и в ней проведенные три хорды DA, DB, DC. На каждой хорде, как на диаметре, построены окружности. Доказать, что вторые точки пересечения этих трех окружностей лежат на одной прямой.

Указание. Взять точку D за центр инверсии и произвольную степень. Преобразовать все окружности в прямые, которые образуют $\triangle$ с вершинами, инверсными вторым точкам пересечения окружностей. Окружность, описанная около полученного $\triangle$, пройдет через полюс и будет инверсной искомой прямой.

Задача 22. (автор А. С. Смогоржевский). Даны три точки A, B, C. Построить две окружности равного радиуса так, чтобы одна из них проходила через точку A, другая — через B, и которые касались бы друг друга в точке C.

Решение. Пусть $AC > BC$. Строим на AC точку D так, чтобы $\angle CBD = \angle CAB$ и находим середину E отрезка BD. Прямая CE будет общей внутренней касательной искомых окружностей. Действительно, инверсия с центром в C радиуса CB преобразует A и D (так как $AC:CB = CB:CD$), а искомые окружности — в параллельные прямые проходящие одна через B, вторая через D (причем, точка C равноудалена от этих прямых, поэтому прямая CE им параллельна).

Задача 23. (автор А. С. Смогоржевский). Даны две окружности K и K_1, имеющие внутреннее касание в точке M. Провести хорду большей окружности, касающуюся меньшей и видимую из центра меньшей окружности, под данным углом α.

Решение. Пусть O и O_1 центры данных окружностей K и K_1, а радиусы их r и r_1, и искомая хорда AB касается окружности O_1 в точке C. Преобразуем данную фигуру инверсно относительно окружности K_1; тогда окружность K преобразуется в окружность K, радиуса $\frac{rr_1}{2r - r_1}$ которая касается данных в точке M, прямая AB — в окружность K_3 с диаметром CO_1, (радиуса $\frac{1}{2} r_1$), прямые AO_1 и BO_1 — сами в себя, точки A, B в точки A′, B′ пересечения окружностей K_2 и K_3; причем, A′ лежит на AO_1, B′ лежит на BO_1. Затем строим окружность K_4 радиуса $\frac{1}{2}r_1$ и вписываем в нее угол $PQR = AO_1B$, через точки P и R проводим окружность K_5 радиуса $\frac{r_1 r}{2r - r_1}$ так, чтобы точка Q лежала внутри и строим окружность K_6 радиуса r_1 так, чтобы она касалась K_4 и K_5 внутренним образом. Преобразовав эту конфигурацию инверсно относительно K_6, получим искомую конфигурацию.

Задача 24. Даны три окружности O, O_1 и O_2, две из них касаются друг друга в точке A и не имеют общих точек с третьей. Построить окружность, касающуюся к трем данным.

Указание. Взяв A за центр инверсии, а степень произвольно, преобразуем три данные окружности. Задача сведется к построению окружности, касательной к двум параллельным прямым и к окружности.

Последняя задача представляет собой частный случай известной задачи Аполлония (Александрийский математик конца 3-го и начала 2-го века до н. э.). Интересующихся решением этой задачи, а также приложением метода инверсии к решению задач, отошлем к книге И. Александрова «Геометрические задачи на построение и методы их решения». (Издание Учпедгиз, 1938 г.). Изложение теории инверсии и решение задачи Аполлония можно найти в книге Н. Ф. Четверухина «Методы геометрических построений» (изд. Учпедгиз, 1938 г.), а также Н. Д. Перепелкина «Курс элементарной геометрии», ч. 1 (огиз Гостехиздат, 1948 г.). Краткое изложение преобразования инверсии, ее связи с другими преобразованиями элементарной геометрии, а также решение задач на построение одним циркулем читатель найдет в книге А. С. Смогоржевского «Методика розв'язування задач на побудову» (видання Радшкола, Київ, 1940 р.).

§ 3

МЕХАНИЗМЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАТНЫХ ФИГУР

Преобразование инверсии в пределах одной плоскости приводит к изящному решению проблемы направляющего механизма или «прямила», которая является чрезвычайно элементарной и принадлежит к кругу вопросов техники. Механизм, осуществляющий построение обратных фигур, носит название инверсора.

Рассмотрим геометрическую природу некоторых инверсоров в таком виде, как они вышли из рук своих изобретателей.

Инверсор Посельe (изобретен в 1864 году) представляет систему шести стержней, скрепленных вместе шарнирами, из которых два имеют длину (рис. 22) $OL=OK=A$ и соединяются в неподвижной точке O, остальные же четыре $PL=LQ=QK=KP$ образуют ромб, две противоположные вершины которого соединяются с концами стержней a. Инверсор имеет две степени свободы: во-первых, оба стержня a можно произвольно приближать один к другому или раздвигать, а во-вторых, оба их можно произвольно вращать как целое вокруг O. При каждом таком движении три точки O, P, Q всегда остаются на одной прямой. В самом деле, OP является биссектрисой угла LOK, PQ — биссектрисой угла LPK. Пусть M есть точка пересечения диагоналей ромба. Тогда $LM=MK$ и OM, как медиана равнобедренного $\triangle LOK$ одновременно является его биссектрисой, т. е. сливается с OP. Таким образом, точки O, P, M, а, следовательно, и точка Q лежат на одной прямой. В точке O находится остреё, а в точках P и Q карандаши. Если O закрепить, а P двигать по некоторой кривой, то Q опишет фигуру, инверсную кривой. Действительно, $OQ\cdot OP=(OM+MQ)(OM-MQ)=OM^2-MQ^2=(LO^2+LM^2)-(QL^2-LM^2)=a^2-b^2=\text{const}$.

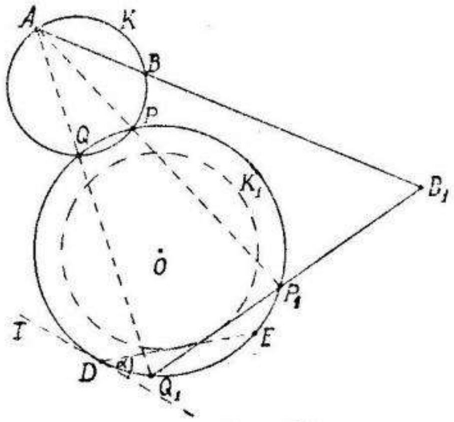
Следовательно, произведение $OQ\cdot OP$ есть величина постоянная, не зависящая от положения механизма. Постоянная a^2-b^2 называется степенью инверсии и так как разность эта положительна, то можно обозначить ее через r^2; тогда из равенства $OQ\cdot OP=r^2$ следует, что Q и P взаимно инверсны. Для получения движения точки P по окружности присоединим к ней еще седьмой стержень PS, второй конец которого закрепляется посередине между O и начальным положением точки P или, как в нашем случае, $OS=SP=m$; тогда остается только одна степень свободы и Q будет передвигаться по прямой. Следует заметить, что точка Q не может описывать всю неограниченную прямую; свобода ее движений ограничена тем, что расстояние ее от O всегда меньше $a+b$.

Прямая, описываемая точкой Q, всегда перпендикулярна к OS. Это следует из того, что ортогональная проекция точки Q на прямую OS для любых положений механизма фиксирована, т. е. длина отрезка ON есть величина постоянная. В самом деле, $\triangle OPD \sim \triangle ONQ$; тогда $OD \cdot OP = OQ \cdot ON$, или $ON = (OQ \cdot OP):OD = r^2:2m = \text{const}$. Это дает возможность использовать инверсор как насос. Если стержни $OL=OK=a$ сделать меньше b, то получим инверсор, изображенный на фигуре 23. Именно, если в точке O находится остреё, а в точках P и Q карандаши, то точка P описывает фигуру, инверсную фигуре, описываемой точкой Q.

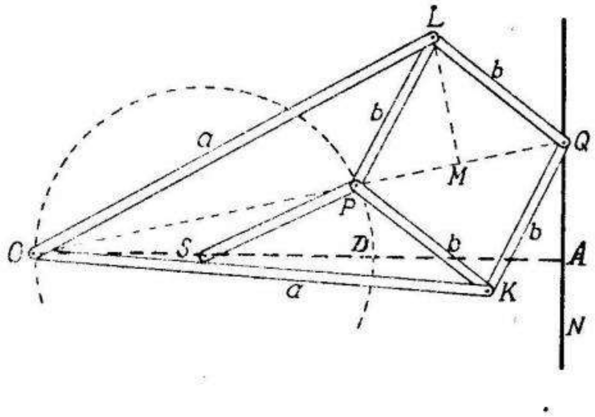
Такое преобразование носит название эллиптической инверсии. Степень эллиптической инверсии есть число отрицательное: $OQ \cdot OP = a^2 - b^2 = -r^2$. Эллиптический инверсор может иметь и форму патографа (рис. 24).

Инверсор Л. Липкина (изобретен в 1868 г.). Независимо от Поселье русский ученый Липкий изобрел замечательный механизм для точного преобразования прямолинейного движения в круговое. Размышления над геометрической теорией механизмов П. Л. Чебышева привели его к точному решению этой задачи. Сохраняя стиль этих размышлений дадим описание инверсора.

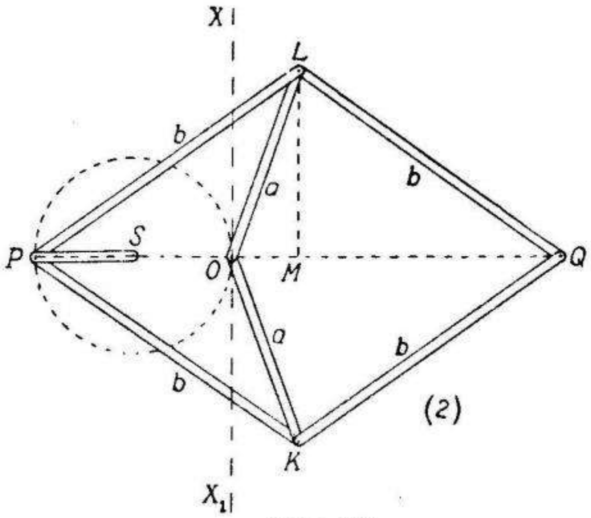
Возьмем три точки A, B, C на некоторой прямой (рис. 25) и соединим их шарнирными рычагами с произвольными точками D и d, равноудаленными от точек A и B. Полученная комбинация стержней обладает важнейшим свойством, заключающимся в том, что как бы мы ни изменяли взаимное расстояние между точками A и B, они будут оставаться на одной прямой. В случае $AD=BD=Ad=Bd$ четырехугольник ABDd — параллелограмм и указанное свойство легко выводится из уравнения $DC^2-DA^2=dC^2-dA^2$. Если же при некотором положении нашей комбинации стержней проведем прямую $ab \| AB$, пересекающую прямые Ad, Bd, Cd в точках a, b и c, то ясно, что при $ad=bd$ точки a, b и c будут расположены также на одной прямой. Следующее свойство этой комбинации стержней состоит в том, что при каждом возможном взаимном расположении точек A и B остается справедливым такое равенство: $CA \cdot CB = DC^2 - DA^2 = dC^2 - dA^2$. А так как стержни DC и DA заданы, то это произведение расстояний точек A и B от точки C остается без изменения. В этом легко убедиться на основании нижеследующего. Построим окружность радиуса $DA=DB$ с центром в D; тогда прямая CBA будет секущей и по известной теореме из планиметрии имеем $CA \cdot CB = CT^2 = DC^2 - DT^2 = DC^2 - DA^2$, где T точка касания прямой CT с окружностью. Соединив A и B с T, получим два подобных треугольника CTA и CBT, ибо $\angle TCA = \angle BCT$ и $\angle CTB = \angle CAT$ отсюда следует $CA:CT = CT:CB$ или $CA \cdot CB = CT^2$. Если закрепить точку C (или c), а точку B (или b) заставить описывать некоторую кривую, то точка A (или a) опишет инверсную кривую относительно полюса C (или c). Инверсной кривой для некоторой окружности, проходящей через полюс, будет прямая, перпендикуляр-



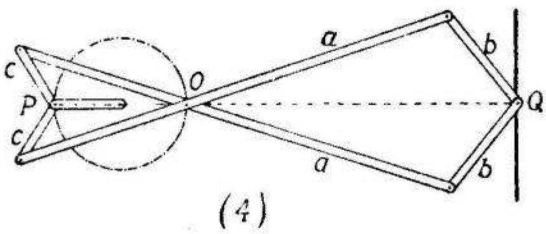
Фиг. 21



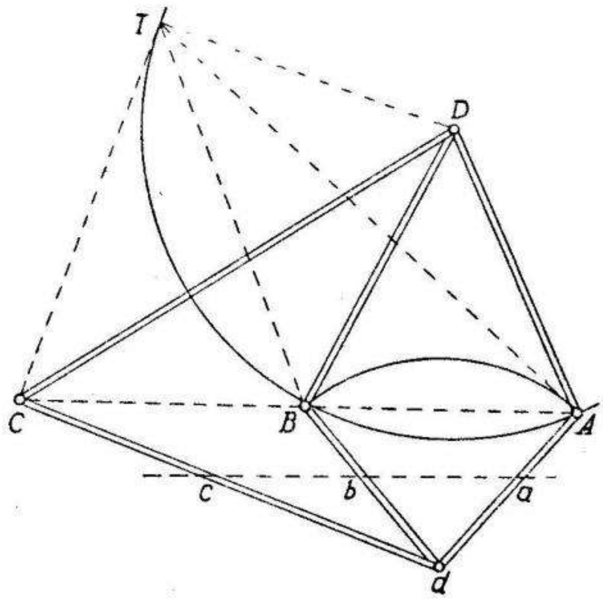
Фиг. 22



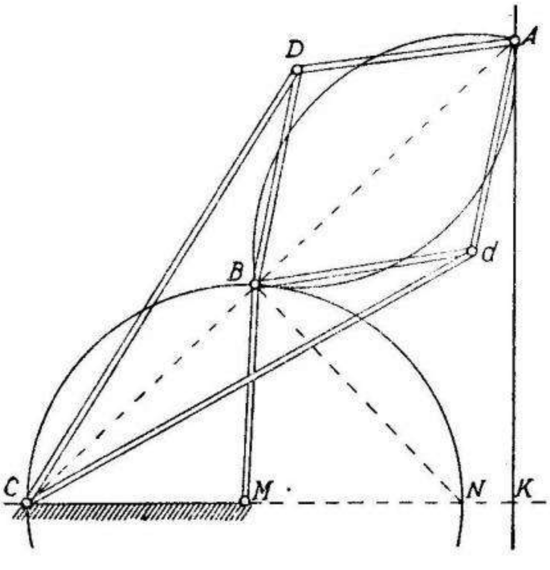
Фиг. 23



Фиг. 24



Фиг. 25



Фиг. 26

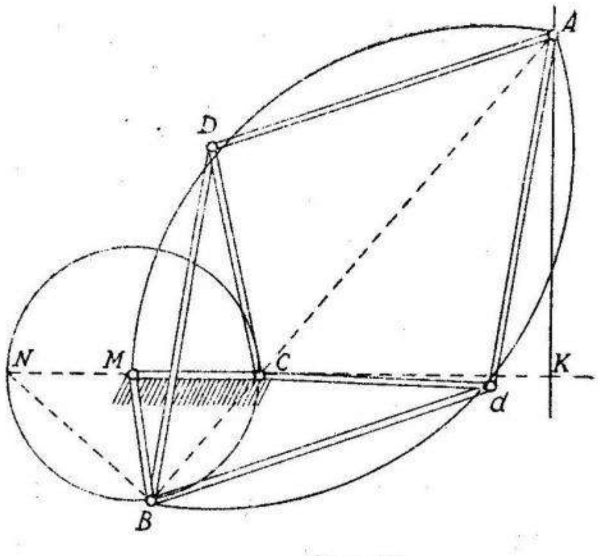
ная к прямой, проходящей через полюс и центр окружности. Поэтому для получения прямой достаточно в этой комбинации стержней точку C (или c) закрепить шарниром, а точку B (или b) соединить шарнирным стержнем с неподвижной точкой M так, чтобы MB=MC (или Mb=Mc). Тогда точка A (или a) будет описывать прямую, перпендикулярную к CM (если же Mc=Mb, то A опишет дугу некоторой окружности). На фигурах (рис. 26 и 28) неподвижная точка C находится вне, а на фигуре (рис. 27) между A и B. В конструкции фигуры 28 четырехугольник ADBd есть ромб, в котором сторона Ad переходит в параллельную ей A′d′. Действительно, пусть (рис. 25) и (рис. 27) K и N — будут точками пересечения прямой CM с перпендикуляром AK (или aK) и окружностью радиуса BM=CM с центром в точке M. Из прямоугольных подобных треугольников CBN и CKA получим $CK:CB=CA:CN$, а отсюда — $CK=\frac{CA\cdot CB}{CM}=\pm\left(\frac{DC^2-DA^2}{2MB}\right)$, причем знак плюс соответствует конструкции фигуры 26, а минус — фигуры 27. Таким образом, $CK=\mathrm{const}$.

Это значит, что при любом положении конструкции перпендикуляр, опущенный из точки A, пересекает прямую CK в одной и той же точке K. Следовательно, точка A своим движением обязательно описывает перпендикуляр AK, что и требовалось доказать.

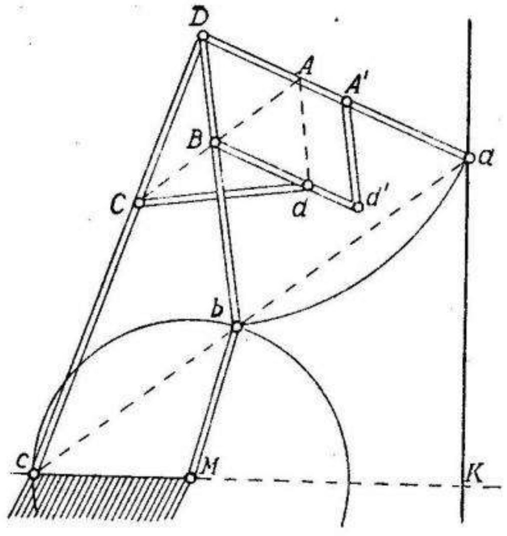
Инверсор Гарта (изобретен в 1874 г.). Новый вид направляющего механизма был предложен Гартом. Это гиперболический инверсор, имеющий форму равнобочной трапеции, составленной из четырех стержней $AB=CD=b$ и $BD=AC=a$, скрепленных шарнирами в точках A, B, C, D. Пусть O, P, Q суть точки прямой, параллельной основаниям трапеции. Поместим в точке O остреё, а в точках P и Q карандаши (рис. 29). Если точку O закрепить и передвигать карандаш P по какой-нибудь кривой, то карандаш Q опишет кривую, обратную первой. В самом деле, так как $\triangle OBQ\sim\triangle ABD$ и $\triangle OAP\sim\triangle BAC$ имеем $OQ:AD=OB:AB$ и $OP:BC=OA:AB$. Перемножая эти две пропорции почленно, получим $(OQ\cdot OP):(AD\cdot BC)=(OA\cdot OB):AB^2$; так как рассматриваемая трапеция равнобочная, то около нее можно описать окружность; к ней применима, следовательно, теорема Птоломея, и мы имеем $AD\cdot BC+b^2=a^2$. Таким образом, $OQ\cdot OP=(a^2-b^2)\cdot\frac{OA\cdot OB}{AB^2}=$ $=\mathrm{const}$.

Отсюда также следует, что точки O, P, Q остаются на одной прямой. Больше того: можно закрепить не только одну точку O, но и всю сторону AB. Точки P и Q опишут окружности соответственно с центрами в A и B и радиусами AP и $BQ=PC$. Так как отношение этих радиусов равно отношению OA к OB, то точка O будет центром подобия обеих окружностей. Поскольку радиусы обеих окружностей, проведенные в точки P и Q, не параллельны между собой, эти две точки взаимно инверсны. Таким образом, произведение $OQ\cdot OP$ остается постоянным, если деформировать нашу конструкцию, сохраняя неподвижными точки A и B. Наконец, инверсору можно придать несколько иную форму, соединяя точку P с некоторой неподвижной точкой S (рис. 23) твердым стержнем, длина которого равна SO; тогда точка Q опишет прямую линию.

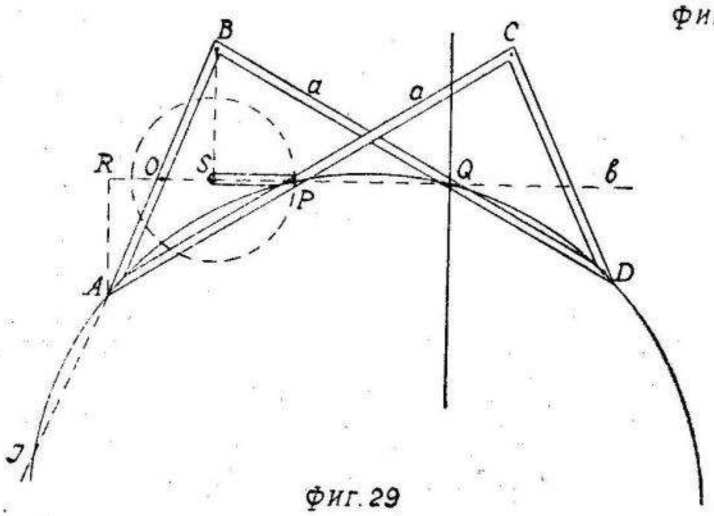
Примечание. Несмотря на видимое различие конструкции инверсоров Поселье-Липкина и Гарта, между ними можно установить геометрическую связь (фиг. 30).



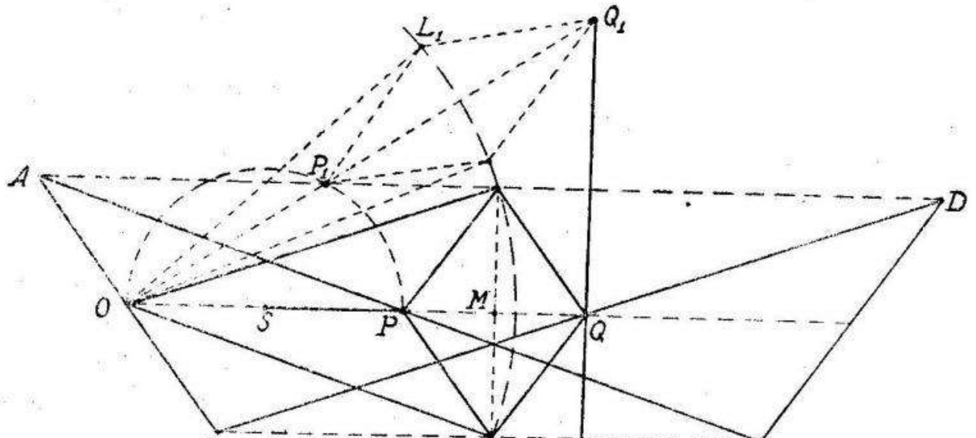
Фиг. 27



Фиг. 28



Фиг. 29



Фиг. 30

Действительно, если точку O закрепить, а точку P двигать по окружности с центром S_1 то Q будет двигаться по прямой $QQ_1 \cdot OQ$, инверсной этой окружности и обратно. В самом деле: $OP \cdot OQ = OM^2 - MQ^2 = OL^2 - LQ^2 = R^2$. Если P переместится в P_1, то Q перейдет в Q и будем иметь также $OP_1 . OQ = Const$.

В данном случае степень инверсии равна $OL^2 - LQ^2$. Для того, чтобы ее можно было менять, стержни OL и OK делаются раздвижными. Легко подобрать длину OL так, чтобы $OL^2 = QL^2 + R^2$.

Инверсор Гарта состоит из четырех стержней $AB = DC$ и $BC = AD$, скрепленных шарнирами в точках A, B, C, D. Карандаши находятся в P и Q (точках пересечения диагоналей со средней линией OO_1 трапеции ABCD), в точке O — остреё. Пусть L и K середины сторон AC и BD.

Тогда получаем подвижной ромб PLQK и конструкция сведена к инверсору Поселье-Липкина. Степень инверсии $OP . OQ = OL^2 - PL^2$, будет в четыре раза меньше $Bc^2 - AB^2$.

Интересующихся механизмами, переводящими круговое движение в прямолинейное, и другими механизмами отсылаем к работам академика Артоболевского «Курс теории механизмов и машин» (ОГИЗ Гостехиздат, 1945) и «Механизмы» т. I (издание Академии Наук СССР, 1947 г.).

Д. Ф. РЕШЕТЮК

К ИСТОРИИ ВОПРОСА О ВКЛЮЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В КУРС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

«Фраза: «Дифференциальное исчисление есть трансцендентный, или высший анализ, доступный весьма немногим», — повторяемая со времени Лейбница, должна же, наконец, устареть».

Академик М. В. ОСТРОГРАДСКИЙ.

Возникновение так называемой высшей математики тесно связано с историей XVII и XVIII веков. Бурное развитие производства, техники и естествознания потребовало изучения в математике переменных величин, связанных функциональной зависимостью.

«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение и диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление,* которое тотчас и возникает...» (Энгельс. «Диалектика природы», ОГИЗ, 1946 г., стр. 208).

Возникновение аналитической геометрии и связанного с ней дифференциального и интегрального исчисления имело колоссальнейшее историческое значение, как в развитии самой математической науки, так и ее бесчисленных применений.

«Из всех теоретических успехов знания вряд ли какой-нибудь считается столь высоким триумфом человеческого духа, как изобретение исчисления бесконечно малых во второй половине XVII века» (Энгельс. «Диалектика природы», ОГИЗ, 1946 г., стр. 216).

Немыслимо представление о современной культуре вне тех успехов человеческого знания, которые приобретены благодаря развитию математики.

«Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния,* но *и процессы:* движение» (Энгельс. «Диалектика природы» ОГИЗ, 1946 г., стр. 220).

Благодаря проникновению в математику движения и диалектики, она приобрела огромнейшее значение в формировании диалектико-материалистического мировоззрения учащихся.

«Но для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием. Маркс был основательным знатоком математики...» (Энгельс, «Анти-Дюринг», ОГИЗ, 1945 г., стр. 10).

О том значении, которое придается изучению математики в советской средней школе, ярко свидетельствуют следующие слова М. И. Калинина, обращенные к учащимся средней школы:

«Какую бы науку вы ни изучали, в какой бы вуз ни поступали, в какой бы области ни работали, если вы хотите оставить там какой-нибудь след, то для этого везде необходимо знание математики... И потому, если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока к этому есть возможность. Она окажет вам огромную помощь во всей вашей работе» (М. И. Калинин, «О коммунистическом воспитании и обучении», 1948 г., стр. 128).

Под мудрым руководством партии Ленина—Сталина наш народ успешно решает великие задачи коммунистического строительства, осуществляет непрерывный рост и совершенствование социалистического производства на базе высшей техники, создает материально-техническую базу коммунизма. С каждым днем возрастает число передовиков и новаторов промышленности и сельского хозяйства, укрепляется творческое содружество людей науки и производства, неуклонно повышается культурно-технический уровень трудящихся. Могучим призывом звучат гениальные слова И. В. Сталина: «...уничтожения противоположности между трудом умственным и трудом физическим можно добиться лишь на базе подъема культурно-технического уровня рабочего класса до уровня работников инженерно-технического труда». Современная техника и естествознание (физика, химия и т. д.) глубоко пронизаны математическими понятиями и идеями. В связи с этим еще большее значение приобретает овладение нашей учащейся молодежью основами современной математики, столь необходимой для изучения и дальнейшего развития техники и естествознания. За последнее время проведен ряд правительственных мероприятий по повышению уровня преподавания математики в университетах и технических вузах. Повышение идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе, воспитывающей непосредственных активных строителей коммунизма, является неотложной задачей, решение которой серьезно затрагивает вопрос о более глубоком включении элементов высшей математики в курс средней школы. Для нашей отечественной средней школы этот вопрос имеет также значительный исторический интерес.

Вопрос о включении в курс математики средних учебных заведений основных понятий аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений для ознакомления учащихся с выдающимися достижениями математической науки XVII—XVIII столетий и их применениями возник не сразу и имеет свою историю.

Основные проблемы школьного математического образования в прошлом, начиная с конца XVII века, были тесно связаны с борьбой двух направлений в школьном образовании: *реального* с преобладанием математики и естествознания и *классического*, основанного на изучении древних языков (греческого и латинского) и древней культуры.

Бурное развитие производства, техники и естествознания в XVII и XVIII веках требовало иного образования, чем то, которое давалось в классических гимназиях и рыцарских академиях того времени. Развивающаяся буржуазия нуждалась в таких учебных заведениях для юношества, в которых серьезно изучались бы такие учебные предметы, как математика, естествознание, география, черчение, новые иностранные языки. Эти обстоятельства привели к открытию реальных училищ. Реальное образование было прогрессивным явлением в школьном образовании; классическое образование отражало реакционные стремления феодалов.

Заслуга открытия первого в мире реального училища принадлежит России.

Петр I в 1699 году открыл в Москве *Школу математических и навигацких наук.* Это и было первое реальное училище в мире. Только в 1708 году было открыто подобного типа училище в Германии, которое просуществовало всего несколько лет при 10—12 учениках. Следующая попытка открытия реального училища в Германии была сделана в 1747 году. Следует отметить, что немецкие историки педагогики необоснованно считают Германию родоначальницей реального образования.

Смелые государственные реформы Петра Великого, «царя помещиков и купцов», требовали подготовки многочисленных кадров специалистов. Математическому образованию в школах Петра придается особое значение — «наука цифирная» объявляется обязательной и ставится на первый план. В 1703 году в Москве возникает частная гимназия реального типа пленного пастора Глюка. В 1712 году в Москве же по типу навигацкой были открыты еще две школы — *инженерная* и *артиллерийская.* С 1714 года во многих городах России открываются цифирные школы, в которых обучают грамоте, арифметике и геометрии. В 1716 году цифирные школы существовали в 16 городах, а в 1722 г. уже в 42. На Урале при горных заводах открываются училища по подготовке мастеров горного дела. Одно из таких училищ окончил знаменитый русский изобретатель Ползунов.

В 1715 году в Петербурге была открыта Морская академия.

Выдающимися деятелями реального образования в России в то время были Феофан Прокопович, Л. Ф. Магницкий, В. Н. Татищев и другие.

Представление об объеме математических знаний средних учебных заведений того времени дает «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, изданная впервые в 1703 году. «Арифметика» по своему содержанию представляла энциклопедию математики в том ее состоянии, которое предшествовало ее новому развитию в XVIII веке. Известно, что М. В. Ломоносов считал «Арифметику» вратами учености, знал ее наизусть и ценил за то, что она открывала возможности познавать окружающий мир числом и мерою (известно, что М. В. Ломоносов своей книгой «Элементы математической химии» впервые проложил путь математике в химию).

Западная Европа в то время довольствовалась учебными заведениями классического типа, находившимися под прямым влиянием духовенства. Естественно, что математикой там мало интересовались. В немецких гимназиях того времени математика была «чуждым элементом», ее терпели только в форме числового счета.[1] В Итонском колледже (Англия) обязательный курс математики был введен впервые в 1851 году.

После смерти Петра I его просветительные начинания в значительной мере пришли в упадок. Усиление дворянства и рост сословных привилегий сказались отрицательно на развитии реального образования. Просветительная политика русских царей в дальнейшем принимала все более реакционный характер.

В 1804 году, в связи с рядом реформ в области народного образования (учреждение Министерства народного просвещения, издание

[1] См. М. Симон. Методика и дидактика математики в средней школе, Петроград, 1917 г., стр. 12.

устава университетов, подчинение университетам всех нижестоящих общеобразовательных учебных заведений университетского округа и др.), в программу русских гимназий были включены основы высшей математики. В 1819 году под давлением реакции из курса гимназий были исключены начала дифференциального и интегрального исчислений, естествознание и другие учебные предметы, а вместо них были введены закон божий, греческий язык и др. В 1845 году из курса гимназий были изъяты основы аналитической и начертательной геометрии.[2]

За введение элементов дифференциального и интегрального исчислений в курс математики средней школы впервые в мире с полными научными и методическими обоснованиями выступил наш известный ученый академик Михаил Васильевич Остроградский в первой половине прошлого века. Изложение его идей появилось в печати в 1848 году в «Журнале Министерства народного просвещения» (1848 г., ч. 59, отд. VI, стр. 117) и «Северном обозрении» (1848 г., № 1). В своей статье «Погрешности при вычислении процентов» М. В. Остроградский писал: «Рассмотрим же, какими формулами должно руководствоваться при вычислении сложных процентов. Вопрос этот можно решить на основании самых элементарных правил алгебры, но мы употребим дифференциальное исчисление, во-первых, для большей простоты, а во-вторых, чтобы оно мало-помалу распространялось на все классы читателей. Фраза: «Дифференциальное исчисление есть трансцендентный, или высший анализ, доступный весьма немногим», — повторяемая со времени Лейбница, должна же, наконец, устареть. Что может быть проще дифференциального исчисления для читателей, хотя бы несколько знакомых с математическими науками?»[3]

Известно,[4] что М. В. Остроградский, преодолевая школьную рутину того времени, настойчиво доказывал необходимость и пользу введения элементов высшей математики в курс средней школы, доказывал необходимость введения элементов дифференциального и интегрального исчислений в курс элементарной геометрии, необходимость приблизить изложение элементарной математики к методам высшей математики. М. В. Остроградский многократно высказывал эти мысли на совещаниях преподавателей, а в своем конспекте по алгебре, хранящемся в настоящее время в Центральном государственном историческом архиве, поместил главу, посвященную методике преподавания элементов высшей математики в средней школе.[5]

М. В. Остроградский добился осуществления своих идей — в 1850 году во всех четвертых общих классах кадетских корпусов[6] России были введены элементы высшей математики. Юноши 17—18 лет, как известно из воспоминаний учеников М. В. Остроградского, довольно быстро вычисляли такие сложные интегралы, как например $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{x}$,

---

[2] См. проф. А. В. Ланков. К истории развития передовых идей в русской методике математики, Учпедгиз, 1951 г., стр. 139.

[3] Цитируем по ст. И. А. Марон — Академик М. В. Остроградский как организатор преподавания математических наук в военно-учебных заведениях России. Сборник «Историко-математические исследования» под редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, вып. III, Гиттл, 1950 г., стр. 294.

[4] См., например, ту же статью И. А. Марон.

[5] ЦГИА, ф. 447, оп. 1, № 20.

[6] Кадетские корпуса в 1863 году были преобразованы в военные гимназии.

что подтверждает, до какого высокого уровня поднял М. В. Остроградский уровень математической культуры в средней школе.

Борясь за научную строгость и против формализма в преподавании математики в средней школе, М. В. Остроградский добивался наглядности и конкретности преподавания, связи курса математики с естествознанием и практическими потребностями общества, прилагал много усилий в деле организации математических кабинетов, предлагал строить преподавание на активности учащихся, развивать у них жажду к знаниям и любовь к науке.

Идеи М. В. Остроградского о перестройке преподавания математики в средних учебных заведениях были довольно обстоятельно изложены одним из его учеников — преподавателем военных училищ Владимиром Николаевичем Шкляревичем (1835—1915).[7] «Шкляревич главной задачей преподавания математики считал развитие у учащихся «функционального мышления». «Общий прием, — писал он, — графического выражения зависимости между двумя переменными не есть исключительная принадлежность аналитической геометрии». Шкляревич предлагал, чтобы в курсе алгебры учащиеся получали «ясное сознание о том, что всякое алгебраическое уравнение есть выражение некоторой зависимости между входящими в него величинами». Он предлагал уделять больше внимания вопросам анализа и исследования задач и уравнений, ввести специальные упражнения по изучению простейших функций, их графиков, составлению и анализу таблиц, знакомить учащихся с простейшими эмпирическими уравнениями и графическим интерполированием. Серьезно относился Шкляревич к вопросу о практических применениях математики в естествознании: «В старших классах математика должна служить пособием для понимания физики. Преподавателю следует брать преимущественно такие примеры для упражнений, которые служили бы пособием для изучения физики». Учет возрастных и психологических особенностей учащихся у Шкляревича выражен очень ярко в его предложениях о преподавании геометрии: в младших классах проводятся упражнения с целью «отделить в уме учащегося представление о формах и линейных размерах видимого предмета от представления о самом предмете», а затем в последующих классах изучается сначала «подготовительный», а потом «научный» курс геометрии. При изучении тригонометрии Шкляревич советовал обратить особое внимание на изучение тригонометрических функций.

М. В. Остроградский был крупнейшим русским и мировым ученым, за научные заслуги он был избран членом пяти академий, сыграл исключительную роль в создании отечественной математической литературы, но его идеи, так блестяще осуществленные в военных средних учебных заведениях, не смогли быть осуществлены в русских гимназиях из-за реакционности находившегося под заграничными влияниями царского правительства. Достаточно вспомнить, что на должность министра народного просвещения в 1854 году был назначен Норов, «один из преданнейших слуг мрака», как его характеризовал К. А. Тимирязев.[8]

В 1858 году, за три года до смерти М. В. Остроградского, великий

[7] В. Н. Шкляревич. Некоторые соображения о методе преподавания начальной математики. «Педагогический сборник, издаваемый Главным управлением военно-учебных заведений», 1865 г., кн. V.

[8] К. Л. Тимирязев. Развитие естествознания в России в эпоху 60-х годов. Москва, 1920 г., стр. 7.

русский ученый П. Л. Чебышев внес на рассмотрение Ученого комитета Министерства народного просвещения «Программу преподавания математики для гимназий». По этой программе предполагалось включение в гимназический курс математики основ аналитической геометрии и основных понятий математического анализа (понятие функции, производная и т. д.).[9] Программа П. Л. Чебышева дискутировалась в течение шести лет и не была принята в связи с победой «классического направления» в образовании над «реальным». Царская власть и стоявшие у власти представители феодально-помещичьих кругов и родовой аристократии избегали такого направления в образовании, которое, как выразился министр Уваров, могло бы «поколебать порядок гражданских сословий». Гимназический устав, введенный в 1864 г., не соответствовал стремлениям прогрессивной части русской интеллигенции; идеи реформы преподавания математики в средней школе не переставали занимать умы лучших представителей математической науки.

Программа по математике, составленная П. Л. Чебышевым для гимназий в 1858 году, в несколько сокращенном и измененном виде была положена в основу программы по математике для реальных училищ, утвержденной Министерством народного просвещения 12 мая 1873 года.

В 1891 году известный русский методист-математик С. И. Шохор-Троцкий в своей работе «Цель и средства преподавания низшей математики», которая печаталась в течение всего этого года в журнале «Русская школа», писал:

«...кроме того желательно внесение в алгебру термина «функция» и идеи, связанной с этим термином, а равно первоначального учения о Декартовых координатах и даже (horribile dictu) о кривой, которой ординаты изображаются данною функциею. Вот эта последняя идея особенно важна в образовательном отношении, и в настоящее время идея кривой, олицетворяющей ход изменения какой-либо функции, можно сказать, сделалась идеею, без которой почти невозможно обойтись образованному человеку вообще и ни в одной отрасли знания в частности» («Русская школа», 1891 г., № 3, стр. 127).

В 1892 году в Московском обществе распространения технических знаний состоялись оживленные прения в связи с предложением «произвести в курсе математики нашей средней школы целый ряд сокращений с целью очистить его от накопившегося веками мертвого груза». Прения закончились принятием постановления «о дополнении среднеучебного курса» элементами высшей математики, «причем сообщен был и набросок программ».[10] В 1893 году с рефератом на тему о реформе преподавания математики выступил в Петербурге Сердобинский.[11]

Еще при жизни П. Л. Чебышева вопрос о включении элементов высшей математики в курс средней школы приобрел характер массового движения передовых ученых и учителей за реформу преподавания математики.

Через несколько месяцев после смерти П. Л. Чебышева известный русский педагог и математик профессор В. П. Шереметевский выступил в печати с требованием реформы преподавания математики в средней школе. В статье «Математика как наука и ее школьные суррога-

[9] В. Е. Прудников. П. Л. Чебышев, Учпедгиз, 1950 г., стр. 83.
[10] Цитирую по ст. проф. А. В. Ланкова — К истории вопроса о реформе преподавания математики. «Математика в школе», 1949 г., № 6, стр. 3.
[11] Ст. «Знакомство с понятием функции», «Педагогический сборник», 1893 год.

ты», помещенной в майском номере «Русской мысли» за 1895 год, он писал:

«В то время, как спешат занести в учебники физики последние изобретения, иногда не оправдывающие возбужденных ими ожиданий, в географии следят за подробностями новейших открытий — по геометрии довольствуются сведениями из обихода Александрийской школы III в. до н. э., не идут дальше алгебры браминов VII и тригонометрии — ученых Самарканда XV в.».

«Молодые люди конца XIX века, готовящиеся принять официальное удостоверение в умственной зрелости, искусственно задерживаются на средневековом уровне математической мысли...».

«Какое бы мировоззрение не лежало в основе наших отношений к природе, сущность процесса мировой жизни выразится основным понятием — изменения».

«Если вся математика есть, в сущности, учение о функциях, то ясно, что и элементарный курс должен группироваться вокруг основного понятия о функциональной зависимости».[12]

В 1898 году В. П. Шереметевский опубликовал большую работу «Очерк основных понятий, приемов и метода математики, как основы изучения природы»,[13] в которой конкретно обосновал идеи реформы.

Выступление и работа В. П. Шереметевского выражали стремления прогрессивной части русской интеллигенции и явились новым стимулом движения за реформу преподавания математики. Вопросы реформы все чаще освещались в периодической печати («Журнал элементарной математики», «Вестник опытной физики и элементарной математики», «Русская мысль» и др.) и привлекали все большее внимание педагогической общественности. Вопросами реформы преподавания математики занимались в то время в Петербурге академик Н. Я. Сонин, профессор К. А. Поссе, профессор А. В. Васильев, С. И. Шохор-Троцкий, Ф. В. Филиппович и др., участвовавшие в работе отдела математики, созданного в 1885 году при Петербургском педагогическом музее военно-учебных заведений. В Московском обществе распространения технических знаний, как уже указано выше, вопрос о реформе преподавания математики был решен еще в 1892 году. В 1900 году при обществе был создан специальный кружок преподавателей математики, выросший позже в Московский математический кружок, в котором участвовало около 150 членов (в их числе профессор Б. К. Млодзеевский, И. И. Чистяков). Такие же кружки и объединения существовали и во многих других городах (Киеве, Одессе, Риге и др.). Движение за реформу преподавания нарастало и достигло наибольшего размаха непосредственно вслед за революцией 1905 года.

Первый Всероссийский съезд преподавателей математики, состоявшийся с 9 по 16 января 1912 года в Петербуге, заслушал несколько докладов, посвященных реформе преподавания математики в средней школе. В резолюции по этим докладам съезд признал «своевременным опустить из курса математики средней школы некоторые вопросы второстепенного значения, провести через курс и ярко осветить идею функциональной зависимости, а также — в целях сближения преподавания в средней школе с требованиями современной науки и жизни —

---

12 «Русская мысль», 1895 г., № 5.

13 Сборник статей в помощь самообразованию по математике, физике, химии и астрономии, вып. I, 1898 г.

ознакомить учащихся с простейшими и несомненно доступными им идеями аналитической геометрии и анализа».[14]

На съезде в докладе о преподавании начал анализа Ф. В. Филиппович, опираясь на свой опыт, утверждал: «Еще с V класса при графическом изображении эмпирических функций мы должны подготовлять почву для дифференциального исчисления. А в VI и VII классах при проведении идеи функциональной зависимости на уроках алгебры следует знакомить учащихся с понятием производной, а на уроках геометрии — с понятием об интеграле. В VIII классе — связной обзор изученных в предыдущих классах функций и элементы дифференциального и интегрального исчислений». На съезде присутствовало свыше 1200 человек преподавателей математики и много представителей высшей школы (К. А. Поссе, Д. Д. Мордухай-Болтовской, В. Ф. Каган, В. Б. Струве, Д. М. Синцов, Н. А. Шапошников, К. Ф. Лебединцев, С. А. Богомолов, С. О. Шатуновский, В. И. Шифф и др.).

Второй Всероссийский съезд преподавателей математики, состоявшийся в Москве с 8 по 16 января 1915 года, подтвердил решение первого съезда о включении в программу средней школы основных понятий высшей математики. Профессор Б. К. Млодзеевский, открывая съезд, отметил, что «успехи естествознания и техники выдвинули вопрос о введении в среднюю школу вопросов, изучаемых теперь обыкновенно в высшей школе; стало очевидным, что в настоящее время основные понятия исчисления бесконечно малых, аналитической геометрии и теории вероятностей должны быть достоянием каждого образованного человека».[15]

Борьба русских ученых и передовой части русского учительства за реформу преподавания математики, начатая в средине прошлого века М. В. Остроградским и П. Л. Чебышевым и длившаяся до Великой Октябрьской революции, имела главной целью — сделать доступными широким слоям населения новые замечательные достижения математики, создать более передовую систему народного образования, устранить глубокий разрыв между школьной математикой и жизнью. Как известно, эта цель не была достигнута в условиях царской России. Классическая система образования с господствующим преобладанием древних языков и формализованным до крайности курсом элементарной математики — замкнутым в себе логическим предметом, игнорировавшим в угоду этой мнимой логичности практические применения и блестящие новые достижения науки — сошла в могилу только вместе с царской реакцией и буржуазно-помещичьим строем. Построенная на великом учении Маркса—Энгельса—Ленина—Сталина и унаследовавшая лучшие идеи и традиции русской школы советская педагогика создала самую передовую в мире систему народного образования, которая обеспечивает непрерывное совершенствование воспитания и обучения, непрерывное укрепление связи школьного обучения с наукой и жизнью трудящихся.

Идеи о реформе преподавания математики в средней школе, выдвинутые Остроградским и Чебышевым и осуществленные в средних учебных заведениях военного типа и реальных училищах, опередили более чем на полстолетия высказывания иностранных ученых по вопросам реформы преподавания математики. В 1904 г. в Бреславле высту-

[14] Труды I-го Всероссийского съезда преподавателей математики, СПБ, 1913 г., т. I—II.

[15] Доклады, читанные на втором Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве, М., 1915 г.

пил Ф. Клейн с докладом «О преподавании математики и физики». Вот основное содержание этого выступления:

«Вряд ли есть предмет, в преподавании которого царила бы такая рутина, как в преподавании математики. Курс элементарной математики вылился в определенные рамки и точно замер в раз навсегда установившихся пределах... Новые учебники алгебры представляют отпечаток алгебры Эйлера, как новые учебники геометрии, — отпечаток геометрии Лежандра. Можно подумать, что математика — мертвая наука, что в ней ничего не меняется.

. Какое же понятие в современной математике доминирует? Это есть понятие о функции. Изучение функции составляет предмет, можно сказать, всей высшей математики; установление функциональной зависимости между различными факторами составляет задачу прикладной математики... Развить в юноше способность к функциональному мышлению составляет первую задачу реформы».[16]

Если сравнить выступление В. П. Шереметевского в 1895 г. с выступлением Ф. Клейна в 1904 г., как это уже сделал профессор А. В. Ланков в своей статье «К истории вопроса о реформе преподавания математики,[17] то не остается сомнения в том, что Ф. Клейн по сути только повторил через девять лет выступление В. П. Шереметевского.

Меранская программа, опубликованная в 1906 г., была далеко не первой программой, отражавшей идеи реформы, так как задолго до нее были известны программы Остроградского, Чебышева, Московского общества распространения технических знаний.

Приведенными данными вполне опровергаются довольно распространенные неправильные представления о роли Ф. Клейна и меранской программы в движении за реформу преподавания математики в России, подобные следующему:

«В девятисотые годы под влиянием идей известного математика Клейна и в России начало развиваться движение за реформу преподавания алгебры в средней школе».[18]

Итак, реальное образование, вопрос о включении основ высшей математики и связанное с ним движение за реформу преподавания математики в средней школе впервые возникли во всей их полноте в России и задолго до их возникновения на Западе. Эти обстоятельства говорят о больших заслугах нашей отечественной школы в развитии мировой культуры.

Дальнейшее повышение идейно-теоретического уровня курса математики в советской средней школе еще в большей мере приблизит этот курс к современной математике и явится большим вкладом в дело построения коммунизма.

---

[16] Приведено в изложении В. Ф. Кагана «Реформа преподавания математики в средних учебных заведениях Франции и Германии», введение к русскому переводу книги Э. Бореля «Элементарная математика», т. I, 1911 г., стр. XIV.

[17] «Математика в школе», 1949 г., № 6, стр. 1—4.

[18] БСЭ, 1938 г., т. 38, стр. 403, слово «Математика в школе».

З А Д А Ч И[1]

§ 1.

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

I. Задачи на разбиение плоскости и пространства.[2]

Задача 1. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых? Какое максимальное число конечных областей и какое максимальное число бесконечных областей они могут ограничить?

Решение. Одна прямая делит плоскость на 2 части. Новая прямая, пересекающая первую, увеличивает число частей на 2. Третья прямая, пересекающая первые две в точках, отличных от точки пересечения первых двух, увеличивает число частей на 3 и т. д. Вообще, всякая новая прямая, не параллельная ни одной из предыдущих и не проходящая через их точки пересечения, увеличивает число частей настолько, каково число областей, через которые она проходит. Поэтому n-ая прямая при соблюдении указанных условий встречается с предыдущими $n-1$ прямыми в $n-1$ точках, разбивающих ее на n частей ($n-2$ отрезка и 2 луча), принадлежащих n различным областям и, следовательно, увеличивает число частей на n. Отсюда следует, что при соблюдении указанных двух условий всегда получается максимальное число частей, равное для n прямых

$$2+2+3+\ldots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}=1+n+\frac{n(n-1)}{2}. \quad (1)$$

При тех же условиях всякая новая прямая увеличивает число бесконечных областей на 2 (соответственно указанным выше в скобках 2 лучам) и, так как одна прямая делит плоскость на 2 бесконечные области, то максимальное число бесконечных областей, ограниченных n прямыми, равно $2n$. Вычитая $2n$ из (1), получаем максимальное число конечных областей, ограниченных n прямыми, равное

$$1-n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}. \quad (2)$$

---

[1] Материал этого раздела подобран Л. И. Волковыским.

[2] Нижеследующее представляет извлечение из работы J. Steiner'a „Einige Gesätze über die Teilung der Ebene und des Raumes" (см. его Gesammelte Werke, Bd. 1, 1881).

Примечание. Аналогично ставится и решается задача о разбиении плоскости n окружностями, а также n прямыми и m окружностями.[3]

Задача 2. На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей? Какое максимальное число конечных областей и какое максимальное число бесконечных областей они могут ограничить?

Решение. Одна плоскость делит пространство на две части. Новая плоскость, не параллельная первой, увеличивает число областей на 2. Третья плоскость, не параллельная первым двум, увеличивает число областей на 4, что равно числу предыдущих частей, через которые проходит новая плоскость. Но последнее число равно числу частей, на которые новая плоскость разбивается прямыми, представляющими ее пересечение с предыдущими плоскостями. Отсюда заключаем, что вообще n-ая плоскость увеличивает число частей настолько, каково число частей, на которые она разбивается n—1 прямыми, по которым она пересекается с первыми n—1 плоскостями. Это число будет равно максимальному числу (1) при замене числа n на n—1, которое всегда получается при соблюдении следующих двух условий: никакие две из прямых, образуемых в пересечении плоскостей, не параллельны между собой и ни в одной точке не встречаются более чем 3 такие прямые.

Из предыдущего следует, что максимальное число частей, на которые пространство может быть разбито n плоскостями, равно

$$2+\left[1+\frac{2(2-1)}{2}\right]+\left[1+\frac{3(3-1)}{2}\right]+\ldots+\left[1+\frac{n(n-1)}{2}\right]=$$

$$=1+n+\frac{1}{2}\left[1.2+2.3+\ldots+(n-1).n\right]=$$

$$=1+n+\frac{1}{2}\left\{\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]+\left[1+2+\ldots+(n-1)\right]\right\}=$$

$$=1+n+\frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\right]=$$

$$=1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}. \qquad (3)$$

Чтобы определить максимальное число бесконечных частей пространства, которые могут быть ограничены n плоскостями, замечаем, что одна плоскость делит пространство на 2 бесконечные области, а всякая новая плоскость увеличивает число бесконечных частей настолько, каково число прежних бесконечных частей, которые она пересекает. Это же число равно числу бесконечных областей в разбиении новой плоскости прямыми ее пересечений с прежними n—1 плоскостями. Максимальное их число равно 2 (n—1) и всегда получается при соблюдении указанных выше условий. Поэтому искомое число равно

$$2+2(2-1)+2(3-1)+\ldots+2(n-1)=2+n(n-1), \qquad (4)$$

откуда, вычитая (4) из (3), заключаем, что максимальное число конечных областей, которые могут ограничить n плоскостей, равно

---

[3] J. Steiner, там же.

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \qquad (5)$$

Примечание. Аналогично ставится и решается задача о разбиении пространства n шарами, а также n плоскостями и m шарами.[4]

II. Задачи на взвешивание

Задача 1. Пусть A_n — максимальное число весов, которые можно получить с помощью n гирь с целочисленными весами, кладя их на одну чашку весов. Найти A_n и показать, что гири можно подобрать так, чтобы они позволяли получать все целочисленные весы от 1 до A_n включительно.

Решение. Система n гирь

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \qquad (1)$$

позволяет произвести столько взвешиваний (одинаковые по весу гири, если они имеются, маркируем и считаем различными), сколько существует способов для выбора из n элементов одного, двух и т. д. элементов. Так как из n элементов k элементов можно выбрать C_n^k способами, то с помощью n гирь можно произвести

$$C_n^2 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1 \qquad (2)$$

и, следовательно, можно получить не более $2^n - 1$ различных весов.

Если гири (1) при произвольной величине a_1 удовлетворяют соотношениям

$$a_2 \geqslant a_1 + 1,\ a_3 \geqslant a_1 + a_2 + 1,\ \ldots,\ a_n \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 1, \qquad (3)$$

то, как легко убедиться, никакие два взвешивания не могут дать одинаковый вес. Поэтому всякая система гирь (1), удовлетворяющая соотношениям (3), позволяет получить $2^n - 1$ различных весов и, так как больше различных весов с помощью n гирь получить нельзя, то

$$A_n = 2^n - 1. \qquad (4)$$

Беря в (3) знаки равенства и полагая $a_1 = 1$, получаем систему весов

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{n-1},$$

с помощью которой можно получить A_n различных весов. Так как наибольший получаемый при этом вес равен

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = A_n$$

и число различных получаемых весов и взвешиваний тоже равно A_n, то *с помощью системы гирь* $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ *можно получить все веса*

[4] J. Steiner, там же. См. также М. Б. Балк «О делении пространства любого числа измерений на части сферами», Успехи математич. наук, т. VII, вып. 1 (1952).

от 1 до $2^n - 1$ включительно, притом каждый вес единственным способом.

Задача 2. Сколькими способами можно представить данный вес $n=1, 2, \ldots$, имея s гирь с целочисленными весами $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и кладя их только на одну чашку весов (при наличии одинаковых по весу гирь они маркируются и считаются различными)?

Решение. Рассматривая разложение

$$(1+x^{a_1})(1+x^{a_2})\ldots(1+x^{a_s}) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots, \qquad (5)$$

нетрудно сообразить, что коэфициент C_n при x^n равен числу способов, которыми число n может быть составлено из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и, следовательно, число C_n дает ответ на поставленный вопрос (само собой разумеется, что $C_n = 0$ для $n > a_1+a_2+\ldots+a_s$, кроме того, оно, может быть, обращается в нуль для некоторых значений $n < a_1+a_2+\ldots+a_s$).

Так как

$$\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots\frac{1-x^{2^s}}{1-x^{2^s-1}} = \frac{1-x^{2^s}}{1-x},$$

то

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^s-1}) = 1+x+x^2+ + x^3+\ldots+x^{2^s-1}. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что с помощью гирь $a_1=1, a_2=2, a_3=2^2, \ldots, a_s = 2^{s-1}$ можно, притом единственным образом, получить все веса от 1 до 2^{s-1}. Неограниченно увеличивая s, мы из (6), считая $|x|<1$, получаем соотношение

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}, \qquad (7)$$

из которого следует, что с помощью бесконечного ряда чисел 1, 2, 4, 8, ... всякое целое положительное число n можно единственным образом представить в виде

$$n = \alpha_0 . 2^m + \alpha_1 . 2^{m-1} + \alpha_2 . 2^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1} . 2 + \alpha_m, \qquad (8)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ могут принимать лишь одно из двух значений 0 и 1. Другими словами, *всякое целое положительное число допускает одно, и только одно, представление по двоичной системе счисления.*[5]

Задача 3. Пусть B_n — максимальное число весов, которые можно получить с помощью n гирь с целочисленными весами, кладя их *на одну или на обе* чашки весов. Найти B_n и показать, что гири можно подобрать так, чтобы они позволяли получать все целочисленные веса от 1 до B_n включительно.

Решение. Система n гирь

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \qquad (9)$$

[5] О различных системах счисления см., например, Г. Н. Берман — «Число и наука о нем», 1948 г.

позволяет произвести столько взвешиваний, сколько существует способов для выбора из n элементов одного, двух и т. д. элементов и последующего их распределения по обеим чашкам весов (при этом два взвешивания, получающиеся друг из друга перестановкой чашек весов, считаются различными). Подсчитаем, сколькими способами можно k фиксированных элементов распределить по обеим чашкам весов. На одну из чашек мы можем положить 1, 2, ..., k элементов, которые можно выбрать соответственно $C_k^1, C_k^2, \ldots, C_k^k$ способами. Если еще учесть, что данную чашку можно оставить вовсе без элементов, то всего способов распределения элементов по обеим чашкам будет

$$1 + C_k^1 + C_k^2 \cdot C_k^2 + \ldots + C_k^k = 2^k$$

и, так как k элементов из n элементов можно выбрать C_n^k способами, то всего различных взвешиваний с n гирями будем иметь

$$2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + 2^n \cdot C_n^n = (1+2)^n - 1 = 3^n - 1. \quad (10)$$

Помещая взвешиваемый груз всегда на одну и ту же чашку весов, будем иметь $\frac{3^n - 1}{2}$ различных взвешиваний. Отсюда следует, что максимальное число B_n различных весов, которые можно получить с помощью n гирь, кладя их на любую чашку весов, не превосходит $\frac{3^n - 1}{2}$.

Покажем, что

$$B_n = \frac{3^n - 1}{2}. \quad (11)$$

Для этого заметим, что если система гирь (9) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &a_2 - a_1 \geqslant a_1 + 1, \\ &a_3 - (a_1 + a_2) \geqslant (a_1 + a_2) + 1, \quad (12) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + 1, \end{aligned}$$

то никакие два взвешивания (груз на фиксированной чашке!) не могут дать одинаковый вес и следовательно, всякая система гирь (9), удовлетворяющая (12), позволяет получить $\frac{3^n - 1}{2}$ различных весов, откуда следует (11).

В частности, беря в (12) знаки равенства и полагая $a_1 = 1$, получаем систему весов 1, 3, 3^2, ..., 3^{n-1}, с помощью которой можно получить максимальное число весов. Так как наибольший получаемый при этом вес равен

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} = B_n$$

и число различных получаемых весов и взвешиваний с грузом на одной чашке тоже равно B_n, то с помощью гирь 1, 3, 3^2, ..., 3^{n-1} можно получить все веса от 1 до B_n включительно, притом каждый вес единственным способом.

Задача 4. Сколькими способами можно представить данный вес $n=1, 2, \ldots$, имея s гирь с целочисленными весами a_1, a_2, ..., a_s и кладя их на любую чашку весов (при наличии одинаковых по весу гирь они маркируются и считаются различными).

Решение. Рассматривая разложение

$$\left(x^{-a_1}+1+x^{a_1}\right)\left(x^{-a_2}+1+x^{a_2}\right)\ldots\left(x^{-a_s}+1+x^{a_s}\right)=$$
$$=\ldots+D_{-1}x^{-1}+D_0+D_1x+\ldots, \qquad (13)$$

нетрудно сообразить, что коэфициент D_n при x^n равен числу способов, которыми число n может быть составлено из чисел a_1, a_2, ..., a_s посредством действий сложения и вычитания и, следовательно, число D_n дает ответ на поставленный вопрос.

Так как

$$\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x^{3^s}}{1-x^{3^{s-1}}}=\frac{1-x^{3^s}}{1-x},$$

то

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x^3+x^6\right)\ldots\left(1+x^{3^{s-1}}+x^{2\cdot 3^{s-1}}\right)=$$
$$=1+x+x^2+\ldots+x^{3^s-1}, \qquad (14)$$

откуда

$$\left(x^{-1}+1+x\right)\left(x^{-3}+1+x^3\right)\ldots\left(x^{-3^{s-1}}+1+x^{3^{s-1}}\right)=$$
$$=x^{-\frac{1}{2}\left(3^s-1\right)}+\ldots+x^{-2}+x^{-1}+1+x+x^2+\ldots x^{\frac{1}{2}\left(3^s-1\right)}. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что с помощью гирь $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=3^2$, ..., $a_s=3^{s-1}$ можно получить, притом единственным образом, все веса от 1 до $\frac{3^s-1}{2}$, что нам уже известно по предыдущей задаче.

Неограниченно увеличивая s, из (14) при $|x|<1$ мы получаем соотношение

$$(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)\ldots=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}. \qquad (16)$$

Каждая скобка слева в (16) имеет вид $1+x^{3^k}+x^{2\cdot 3^k}$, поэтому коэфициент при любой степени x^n справа в (16) равен числу способов представления числа n с помощью чисел 1, 3, 3^2, ... при возможном повторении каждого из них два раза. Так как все коэфициенты справа в (16) равны 1, то из сказанного следует, что всякое целое положительное число n можно единственным образом представить в виде

$$n = \beta_0 \cdot 3^m + \beta_1 \cdot 3^{m-1} + \ldots + \beta_{n-1} \cdot 3 + \beta_m, \tag{17}$$

где $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ могут принимать одно из трех значений 0, 1 и 2. Другими словами, *всякое целое число допускает одно, и только одно, представление по троичной системе счисления.*

ЛИТЕРАТУРА:

1. Леонард Эйлер «Введение в анализ бесконечно малых», т. 1, 1936 г., гл. XVI (здесь читатель найдет чрезвычайно богатое собрание задач, связанных с различными аддитивными представлениями целых чисел).

2. Полиа и Сеге «Задачи и теоремы из анализа», ч. 1, 1937 г., гл. 1, задачи 1—15 и дальше (обращаем внимание читателя на эту превосходную книгу, вводящую изучающего в «лабораторию математического творчества»).

3. Ahrens, „Mathematische Unterhaltungen und Spiele", Bd. 1, 1910.

III. Задачи для самостоятельного решения.

1. Задача на сочетания. Введем обозначения:

$$F_{\alpha, \beta} = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha!\ \beta!}$$

и

$$F_{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!},$$

где α, β и γ принимают любые значения 0, 1, 2, ... и $0! = 1$. Величины $F_{\alpha, \beta}$ и $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ очевидно, симметричны относительно своих индексов и, как легко показать, удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$F_{\alpha, \beta} = F_{\alpha-1, \beta} + F_{\alpha, \beta-1}$$

и соответственно

$$F_{\alpha, \beta, \gamma} = F_{\alpha-1, \beta, \gamma} + F_{\alpha, \beta-1, \gamma} + F_{\alpha, \beta, \gamma-1}.$$

Требуется исследовать $F_{\alpha, \beta}$ и $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ на четность и нечетность в зависимости от α и β соответственно α, β и γ.

2. Задачи на ряд Фибоначчи. Рядом Фибоначчи называется последовательность чисел $\{u_n\}$ (n=0, 1, 2, ...), образуемая по следующему закону:

$$u_0 - 1,\ u_1 = 1;\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1}\ (n \geqslant 2).$$

Следовательно, начало ряда Фибоначчи имеет вид

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Доказать следующие свойства ряда Фибоначчи:

---

[6] О числах Фибоначчи см. Н. Н. Воробьев «Числа Фибоначчи», ГТТИ, 1951.

1) Для любых $n \geqslant 1$ и $p \geqslant 1$ отношения

$$\frac{u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p}}{u_1 \cdot u_2 \ldots u_p} \quad \text{и} \quad \frac{u_{np}}{u_n}$$

представляют целые числа.

2) Имеют место соотношения ($n \geqslant 0$):

$$u_1 + u_3 + \ldots u_{2n+1} = u_{2n+2},$$

$$u_0 + u_2 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1}.$$

3) Для любого $p>1$ ряд Фибоначчи содержит по крайней мере четыре и самое большее пять p-значных чисел (т. е. чисел, записываемых с помощью p цифр).

4) Показать, что в разложении

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

справедливого при $|x| < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, последовательность коэфициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots$ совпадает с рядом Фибоначчи.

5) Ряд Фибоначчи содержит бесконечно много простых чисел (гипотеза, до сих пор не доказанная и не опровергнутая).

3. Задача на маршруты. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что

1) с любой остановки на любую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) в каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов? Для каких n можно построить систему из n маршрутов, соблюдая указанные условия?

4. Задача на телефоны. Доказать, что 77 телефонов нельзя соединить между собою так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 15 телефонами.

5. Две задачи из занимательной математики.

1. Три колхозника — Иванов, Петров, Сидоров и их жены Анна, Марфа и Фекла покупали ткани. Каждый из них покупал ткань только одного вида, причем столько метров, сколько он (или она) платил рублей за один метр. Каждый муж истратил на 63 рубля больше чем его жена. Определить имена жен Иванова, Петрова и Сидорова, если известно, что Иванов купил на 23 метра больше, чем Марфа, и Петров — на 11 больше, чем Анна.

2. Два брата продавали свиней. За каждую свинью они брали столько рублей, сколько у них всего было вначале свиней. Выручку они стали делить пополам: старший брат взял себе 10 руб. и дал младшему брату 10 руб., затем снова взял себе 10 руб. и дал брату 10 руб. и т. д. В конце концов, осталось десять рублей (в виде десятки) и несколько рублей на сумму меньшую 10 руб. Десятку старший брат взял

себе, а младшему отдал остальные деньги и в придачу отдал ему свой нож, после чего оба получили поровну. Спрашивается, сколько стоил нож?

§ 2.

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Обобщение постоянной Эйлера.[7] Известно, что гармонический ряд

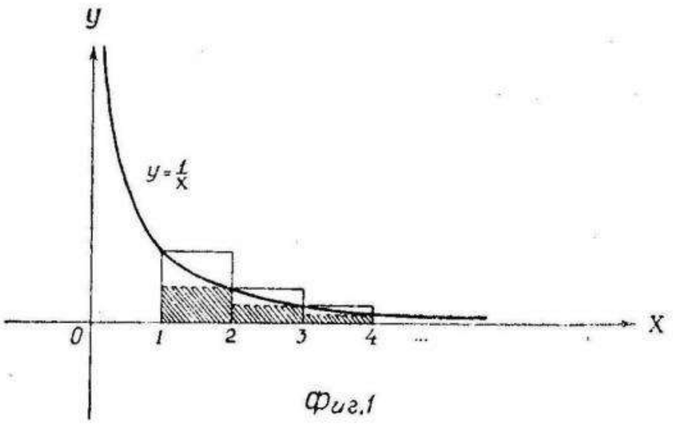
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{1}$$

расходится. Заменяя интеграл

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$$

его интегральными суммами, соответствующими указанным на фиг. 1 ступенчатым линиям, замечаем, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$



Фиг. 1

и что попарные разности между членами неравенства, считая справа налево, монотонно возрастают; отсюда следует существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n\right], \tag{2}$$

заключенного между 0 и 1. Этот предел называется постоянной Эйлера и обозначается через С. Приближенно С=0,577215...

---

[7] Задача была поставлена и решена студентом физико-математического факультета Львовского госуниверситета И. Н. Песиным. Нижеследующее представляет заметку, написанную им для настоящего сборника.

Образуем теперь с помощью произвольной последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ положительных чисел новые последовательности $\{s_n\}$ и $\{q_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$s_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \tag{3}$$

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{s_k} - \log s_n. \tag{4}$$

Так как при $p_1 = p_2 = \ldots = 1$ последовательность (4) превращается в последовательность

$$q_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n,$$

рассматриваемую в (2), то в случае существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$, его естественно рассматривать как (обобщенную) постоянную Эйлера последовательности $\{p_n\}$. Отсюда возникает следующая задача:

Найти необходимые и достаточные условия, чтобы последовательность $\{p_n\}$ *имела конечную постоянную Эйлера.*

Докажем сперва следующую известную лемму:

Пусть $\{u_n\}$ *произвольная последовательность чисел, не превосходящих по абсолютной величине 1. Тогда ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log(1 - u_n) + u_n], \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \tag{5}$$

сходятся или расходятся одновременно.[8]

Доказательство. Так как, по формуле Тейлора,

$$\log(1 - u) = -u - \frac{n^2}{(1 - \Theta u)^2}, \quad 0 < \Theta < 1, \tag{6}$$

то

$$\log(1 - u_n) + u_n = -\frac{u_n^2}{(1 - \Theta_n u_n)^2}, \quad 0 < \Theta_n < 1 \tag{7}$$

и ряд справа в (5) сходится одновременно с рядом слева. Если же сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$, то $u_n \to 0$, поэтому множители

$$\frac{1}{(1 - \Theta_n u_n)^2}$$

в (7) равномерно ограничены, откуда следует сходимость ряда слева в (5).

[8] См., например, Привалов «Введение в теорию функций комплексного переменного», где (гл. IX), вместо рядов (5), рассматриваются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(1 - u_n) + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \ldots + \frac{u_n^{k+1}}{k-1}\right], \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_n^k.$$

Докажем теперь следующую теорему:

Для того, чтобы последовательность положительных чисел $\{p_n\}$ *имела конечную постоянную Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p_n}{s_n}\right)^2.$$

Доказательство. Имеем

$$-\log s_n = \log\frac{1}{s_1}+\log\frac{s_1}{s_2}+\ldots+\log\frac{s_{n-1}}{s_n}=$$

$$=\log\frac{1}{s_1}+\log\left(1-\frac{p_2}{s_2}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{p_n}{s_n}\right),$$

поэтому

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{s_k}-\log s_n=\frac{p_1}{s_1}+\log\frac{1}{s_1}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{p_k}{s_k}+\log\left(1-\frac{p_k}{s_k}\right)\right]$$

или

$$q_n = 1-\log p_1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{p_k}{s_k}+\log\left(1-\frac{p_k}{s_k}\right)\right], \tag{9}$$

откуда, на основании вышедоказанной леммы, последовательность $\{q_n\}$ имеет конечный предел тогда, и только тогда, когда сходится ряд (8).

Из (6) видно, что под знаком Σ в (9) стоят отрицательные величины, поэтому

$$\lim_{h\to\infty} q_n < 1-\log p_1. \tag{10}$$

2. Одновременная сходимость двух рядов или несобственных интегралов.

1) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — положительные монотонно возрастающие функции, определение для $x>o$. Доказать, что если существует такая постоянная C, что

$$g(x) < Cx,$$

то интегралы

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{f(x)+g(x)},\quad \int_a^{\infty}\frac{dx}{f(x)}\quad (a>0)$$

сходятся и расходятся одновременно.[9]

[9] Настоящая задача в качестве леммы приводится в статье Ульриха помещенной в журнале Duke Math. J, 5, 1939.

2) Показать, что для монотонно возрастающей последовательности положительных чисел $\{\varrho_n\}$ ($n=1, 2, \ldots$) ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \varrho_n}{2^n}$$

сходятся и расходятся одновременно. Эти же ряды сходятся и расходятся одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\beta_n \varrho_n + (\varrho_{n+1} - \varrho_n)]}{2^n},$$

где $\{\beta_n\}$ последовательность положительных чисел, образующая сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{2^n}.$$

3) Показать, что для монотонно убывающей последовательности положительных чисел $\{\varrho_n\}$ при дополнительном условии

$$1 < \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \leqslant \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\varrho_n}{\varrho_{n+1}} \leqslant \ldots$$

ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{\log \frac{1}{\varrho_{n+1}}}{\log \frac{1}{\varrho_n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{\varrho_n}{\varrho_{n+1}}$$

сходятся и расходятся одновременно.

3. К признаку сходимости Вейерштрасса. Дан ряд

$$\sum a_n \tag{1}$$

с произвольными комплексными членами, обладающими следующим свойством: начиная с некоторого n, отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ может быть представлено в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n, \tag{2}$$

где a — постоянная и ряд Σc_n абсолютно сходится. Доказать, что при этом ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}(a) < -1$, и что сходимость в этом случае абсолютная (см. H. Jehle „Eine Bemerkung zum Konvergenskriterium von Weierstrass". Math. Z. 52:1 (1949), 60—61).

4. Несобственные интегралы и интегральные суммы.[10]

1) Пусть $f(x)$ монотонна в интервале $0<x<1$; пусть далее в одной из точек $x=0$ и $x=1$ или в обеих функциях неограничена, но так, что несобственный интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ существует. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx \tag{1}$$

(задача из Полиа и Сеге, № 20 — см. подстрочное примечание).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной внутри интервала $0<x<1$ и *абсолютно* там интегрируемой, для которой предел слева в (1) не существует.

2) Если $f(x)$ в интервале $0<x<1$ монотонна, конечна в точке $x=0$ или $x=1$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \tag{2}$$

существует, то также существует и $\int_0^1 f(x)\,dx$ (Полиа и Сеге, там же, № 25).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной в интервале $0<x<1$, конечной в одной из точек $x=0$ или $x=1$, для которой существует предел (2), но интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ не существует.

3) Существуют монотонные в интервале $0<x<1$ функции $f(x)$, для которых предел (2) существует, но интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ не существует. (Полиа и Сеге, там же, № 24).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной и монотонной в интервале $0<x<1$ и неограниченной на его концах, для которой предел (2) существует, но интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ не существует даже в смысле

как
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

[10] Ниже приводятся три задачи из Полиа и Сеге «Задачи и теоремы из анализа», ч. 1, отд. 2, №№ 20, 23, 24 и предлагается построить к ним примеры, выясняющие значение того или иного условия задач. Такие примеры были построены студентом физико-математического факультета Львовского университета А. А. Гольдбергом.

5. Из занимательной математики.

1) Докажем «исправленную» теорему Пифагора: сумма катетов равна гипотенузе. В самом деле, опуская из середины гипотенузы перпендикуляры на оба катета, получаем два прямоугольных треугольника, сумма четырех катетов которых равна сумме прежних двух. Повторяя указанное разбиение, получаем четыре прямоугольных треугольника с прежней суммой катетов и т. д. Но получающаяся ломаная в пределе стягивается к гипотенузе исходного треугольника, откуда следует наше утверждение. Где ошибка?

2) Чтобы найти сумму бесконечного ряда

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

можно поступить трояким способом: во-первых, имеем

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots,$$

откуда $s=0$. Во-вторых, имеем

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots,$$

откуда $s=1$. Наконец, полагая в ряде

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

$x=1$, получаем для s значение $\frac{1}{2}$. Какое же из трех значений 0, 1 и $\frac{1}{2}$ является истинным значением s?

3) В комоде три ящика с двумя отделениями в каждом. В одном ящике в обоих отделениях золото, в другом ящике в обоих отделениях серебро, а в третьем ящике в одном отделении золото, а в другом серебро.

Вынимают один ящик и смотрят в одно из его отделений: там золото. Спрашивается, какова вероятность того, что во втором отделении ящика также золото?

Решение 1. Так как во втором отделении может быть только золото или только серебро, то искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

Решение 2. Для того чтобы во втором отделении оказалось золото, должен был быть вынут ящик, имеющий в обоих отделениях золото. Но из всех трех ящиков имеется только один такой ящик. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Спрашивается, каково же действительное значение искомой вероятности?

РЕЦЕНЗИИ

I. Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ. ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ. Под общей редакцией В. Ф. Кагана, А. П. Котельникова, А. П. Нордена, В. Б Степанова, Н. Г. Чеботарева, П. А. Широкова. Главный редактор В. Ф. Каган.

Т. I. Сочинения по геометрии. Вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана и А. П. Котельникова. Гостехиздат, М.-Л., 1946, 416 стр., цена 19 рублей.

Т. II. Сочинения по геометрии. Вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана, Б. Л. Лаптева, А. П. Нордена и А. Н. Хованского. Гостехиздат, М.-Л., 1949, 604 стр., цена 24 руб. 85 коп.

Т. III. Сочинения по геометрии. Вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана, Б. Л. Лаптева, А. П. Нордена и А. Н. Хованского. Гостехиздат, М.-Л., 1951, 536 стр., цена 23 руб. 20 коп.

Т. IV. Сочинения по алгебре. Вводные статьи и комментарии Н. Г. Чеботарева. Гостехиздат, М.-Л., 1948, 472 стр., цена 20 руб.

За последние годы чрезвычайно возрос интерес к наследию гениального русского математика — профессора Казанского университета Николая Ивановича Лобачевского, творца неевклидовой геометрии, подлинного революционера в науке. Было издано большое количество работ, посвященных жизни и творчеству Лобачевского.

Государственным издательством технико-теоретической литературы предпринято издание полного собрания сочинений великого русского ученого. Оно содержит в шести томах все научное наследие Лобачевского — не только в области геометрии (тома 1—3), но также работы по алгебре (том 4), анализу, механике и астрономии (том 5). Заключительный, шестой том будет содержать литературное наследие Лобачевского, его жизнеописание и подробный обзор творчества.

Уже вышли в свет первый, второй, третий и четвертый тома.

Первый том содержит две работы: «Геометрические исследования по теории параллельных линий» и «О началах геометрии».

Сочинение «О началах геометрии» было опубликовано Лобачевским в журнале «Казанский вестник» в 1829—30 гг., т. е. спустя три года после знаменательного дня 11 (23) ферраля 1826 года, когда в заседании физико-математического факультета Казанского университета был заслушан доклад Лобачевского «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных».

«О началах геометрии» является первым печатным изложением неевклидовой геометрии и справедливо считается гранью двух эпох в истории геометрии. С одной стороны, им завершается более чем двухтысячелетний период многочисленных попыток доказательства постулата Евклида о параллельных прямых. Лобачевский показал, что все эти попытки были безуспешными потому, что этого постулата доказать нельзя, так как он не является следствием аксиом, положенных Евклидом в основу геометрии. С другой стороны, Лобачевский своей работой положил начало новому периоду в развитии геометрии — периоду развития неевклидовой геометрии, дав подробное изложение созданной им «воображаемой» геометрии. Эта геометрия, носящая теперь имя Лобачевского, основана на тех же аксиомах, что и «употребительная» (т. е. евклидова) геометрия, за исключением постулата Евклида о параллельных линиях, который был заменен Лобачевским другим более общим постулатом.

Первая часть сочинения «О началах геометрии» (стр. 185—210 настоящего издания) является извлечением из доклада «Краткое изложение основ геометрии». Здесь устанавливаются основные геометрические понятия, излагаются свойства треугольников, теория параллельных и выводятся тригонометрические формулы, имеющие место в новой геометрии.

Вторая (стр. 210—252) и третья (стр. 252—261) части посвящены приложению «воображаемой» геометрии к анализу — к вычислению и преобразованию определенных интегралов. Сначала выводятся уравнения прямой и важнейших кривых; вычисляются длины дуг линий, площади плоских фигур и кривых поверхностей. Затем много внимания уделено вычислению объемов тел. Однако все эти вычисления, представляющие то, что мы обычно называем приложением анализа к геометрии, не являются для Лобачевского самоцелью. Наоборот, он стремится применять свою «воображаемую» геометрию к анализу. Для этого, пользуясь геометрическими образами «воображаемой» геометрии, он вычисляет с помощью интегралов площадь какой-либо фигуры или объем какого-либо тела различными способами. Найдя для них различные выражения и сравнивая последние, он получает преобразование одного интеграла в другой.

Даже для современного читателя, знакомого с содержанием геометрии Лобачевского, чтение мемуара «О началах геометрии», вследствие его чрезвычайной сжатости, представляет большие трудности. Поэтому проф. А. П. Котельников, один из редакторов «Сочинений», сопровождает эту работу более чем двумястами примечаниями, занявшими вдвое большее количество страниц, чем само сочинение. Проф. Котельникову пришлось расшифровать многие вычисления Лобачевского и провести доказательство многих положений, сформулированных Лобачевским, но оставленных им без доказательства.

Сжатость изложения и новизна идей были причиной того, что современниками Лобачевского это сочинение, как и последовавшие за ним «Воображаемая геометрия», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» и некоторые другие, остались непонятыми. Поэтому Лобачевский опубликовал в 1840 г. в Берлине отдельным изданием на немецком языке небольшое сочинение: «Геометрические исследования по теории параллельных линий», в котором очень просто и изящно изложил начала «воображаемой» геометрии. В этой статье он излагает свою теорию параллельных линий и дает остроумный геометрический вывод тригонометрических формул «воображаемой» геометрии. Большое количество изданий (на русском языке — 3 издания, на немецком — 2, на французском — 3, на английском — 5, на сербском — 1) говорят о популярности этой работы.

Совершенно правильно поступила редакция «Сочинений», которая, нарушив хронологический принцип, поместила на первом месте «Геометрические исследования» в новом переводе профессора В. Ф. Кагана. Переводу предпослана вводная статья профессора В. Ф. Кагана «Учение о параллельных линиях и открытие неевклидовой геометрии», в которой дается исторический очерк развития теории параллельных линий от Евклида до Лобачевского и приводятся различные попытки доказательства постулата параллельности (Прокл, Нассир-Эддин, Валлис, Бертран, Лежандр), безуспешность которых привела Лобачевского к мысли о недоказуемости этого постулата и к созданию неевклидовой геометрии. Профессору В. Ф. Кагану принадлежат также многочисленные примечания и комментарии к «Геометрическим исследованиям.

Обе работы Лобачевского, помещенные в первом томе «Сочинений», в соединении с вводными статьями, примечаниями и комментариями, могут служить хорошим введением в круг замечательных идей, в науку, ныне носящую название неевклидовой геометрии Лобачевского. Книга доступна преподавателям математики, студентам, а в значительной своей части так же и лицам, интересующимся геометрией, но не знакомым с основами высшей математики.

Второй том «Сочинений» содержит две работы Лобачевского: «Геометрия» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

«Геометрия», — самое раннее из дошедших до нас сочинений Лобачевского, при жизни автора напечатана не была. Рукопись этого сочинения была найдена в 1898 году и печатное издание его вышло в свет в 1909 году.

«Геометрия» представляет собой краткий обзор элементарной геометрии, предназначавшийся Лобачевским для читателей, уже усвоивших ее основы, в частности — для студентов Казанского университета, которым Лобачевский читал курс геометрии в первый период своей педагогической деятельности. В этом сочинении Лобачевский, критически подойдя к традиционной системе Евклида, сделал попытку изложения начал геометрии отличным от Евклида способом. В 1823 году Лобачевский представил рукопись «Геометрии» для напечатания, но в силу отрицательного отзыва академика Н. И. Фусса, не понявшего, для какого читателя предназначалось это сочинение и с какими целями оно было написано, «Геометрия» напечатана не была. Вскоре после этого, к 1826 году, идеи, изложенные в «Геометрии», оказались для Лобачевского пройденным этапом и он не делал повторных попыток опубликования этого сочинения.

Для современного читателя, как указывает в своей статье профессор В. Ф. Каган, «Геометрия» представляет большой интерес как определенный этап в ходе развития идей Лобачевского.

Второе сочинение Лобачевского, вошедшее во второй том — «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», впервые напечатанное в «Ученых записках Казанского университета» в 1835—1838 годах — самое обширное из сочинений Лобачевского по геометрии и является, пожалуй, главным делом его жизни.

В этом сочинении Лобачевский наиболее подробно и систематически изложил свои идеи, относящиеся не только к созданной им неевклидовой геометрии, но также и к изложению основ геометрии, коренным образом отличающемуся от традиционного изложения, восходящего к «Началам» Евклида. «Новые начала» состоят из «Вступления» и тринадцати глав. Весь материал книги может быть разбит на три существенно различные по содержанию части.

Первая часть — «Вступление» и главы I—VI (стр. 147—265) — содержит изложение той части геометрии, которая не зависит от аксиомы параллельности, т. е. содержит материал, общий для геометрии Евклида и для геометрии Лобачевского Эта часть геометрии позднее была названа «абсолютной геометрией».

Вторая часть — главы VII—XI (стр. 266—345) — начинающаяся введением более общей, чем евклидова, аксиомы параллельности, посвящена изложению той части геометрии, которая существенно зависит от этой аксиомы. Здесь Лобачевский развивает свою «воображаемую» геометрию и одновременно развивает «употребительную» (т. е. евклидову) геометрию, представляющую собой простейший предельный случай его «воображаемой» геометрии.

Последняя, третья часть, — главы XII—XIII (стр. 346—454) — посвящена весьма подробному изложению (с исследованием вопроса об ошибках) численного решения прямолинейных треугольников. Эта часть в общем плане всего сочинения почти не связана с первыми двумя частями. Лобачевский не указал причин, побудивших его подробно остановиться на этих вопросах. Повидимому, можно согласиться с редакторами издания «Новых начал», высказавшими предположение, что вычисления Лобачевского являлись подготовкой для опытной проверки справедливости неевклидовой геометрии с помощью астрономических измерений. О необходимости и возможности такой проверки Лобачевский неоднократно упоминал в своих сочинениях.

Второй том, как и первый, снабжен вводными статьями и многочисленными примечаниями, помогающими усвоить содержание помещенных в нем двух сочинений Лобачевского.

В третьем томе помещены остальные геометрические сочинения Лобачевского: «Воображаемая геометрия», «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» и «Пангеометрия».

«Воображаемая геометрия» была напечатана в 1835 году в «Ученых записках Казанского университета», а спустя два года с некоторыми сокращениями — в «Журнале чистой и прикладной математики», издававшемся в Берлине. В этом сочинении, в отличие от ранее опубликованных работ, Лобачевский при построении неевклидовой геометрии исходит из соображений аналитического характера. В качестве исходных положений он берет тригонометрические соотношения между элементами прямолинейного прямоугольного треугольника. Здесь же Лобачевский приводит доводы в пользу непротиворечивости своей геометрии. Значительная часть сочинения посвящена аналитическим приложениям «воображаемой» геометрии. Лобачевский получает значения большого количества ранее неизвестных определенных интегралов, пользуясь тем же способом, что и в работе «О началах геометрии».

Сочинение «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» было напечатано в тех же «Ученых записках» на год позже и, являясь естественным продолжением «Воображаемой геометрии», имело целью показать применимость новой геометрии в решении различных задач анализа, особенно в вычислении определенных интегралов. Лобачевский находит около 50 новых интегралов, большая часть которых вошла в различные таблицы и справочники.

«Пангеометрия» была написана учениками под диктовку тяжело больного Лобачевского за год до его смерти. Это было его последнее сочинение. Напечатано оно было в 1855 году в «Ученых записках Казанского университета», а год спустя — на французском языке в специальном юбилейном сборнике, изданном в честь 50-летия Казанского университета. Давая этому сочинению название «Пангеометрия», Лобачевский хотел подчеркнуть, что открытая им геометрия имеет всеобъемлющий характер и включает в себя евклидову («употребительную») геометрию как частный случай.

«Пангеометрия» представляет собой сжатое изложение всех основных результатов по неевклидовой геометрии, полученных Лобачевским в его прежних исследованиях. Сочинение начинается введением и обоснованием неевклидовой геометрии. Затем изложены основные сведения по прямолинейной тригонометрии и аналитической геометрии в неевклидовой плоскости, а также дается применение бесконечно малых для вычисления длин, площадей и объемов. В конце сочинения Лобачевский снова возвращается к вопросу, чрезвычайно интересовавшему его всю жизнь — вопросу о непротиворечивости неевклидовой геометрии.

Отметим еще, что после «Геометрических исследований» «Пангеометрия» — самое распространенное из сочинений Лобачевского. Оно было издано 10 раз на русском, французском, немецком и итальянском языках.

Четвертый том «Сочинений» Лобачевского содержит обе его работы по алгебре: «Алгебра или вычисление конечных» и «Понижение степени в двучленном уравнении, когда показатель без единицы делится на восемь».

Первое сочинение представляет собой обстоятельный учебник алгебры, изданный в Казани в 1834 году и предназначенный для университетского преподавания. Это был первый опубликованный в России оригинальный курс высшей алгебры. В первых главах излагаются начальные основы алгебры, а вторая часть посвящена высшим отделам алгебры и содержит не только много оригинальных выводов, но и новые результаты, особенно в главе XVI — «Решение двучленных уравнений». Отметим также, что в последней, XVII главе — «Решение всякого алгебраического уравнения», дается способ приближенного вычисления корней, впоследствии неправильно получивший название способа Греффе, несмотря на то, что он был найден Лобачевским раньше, чем Греффе.

Во второй работе «Понижение степени в двучленном уравнении» дается решение уравнения $x_n - 1 = 0$, связанного с геометрической задачей деления окружности, для случая, когда число $n - 1$ делится на восемь. По поводу этой статьи профессор Н. Г. Чеботарев пишет: «В этой статье Лобачевский выказал свою многогранность: если в своих геометрических исследованиях он был первоклассным мыслителем, то здесь, в теории чисел, весьма далекой от предмета его постоянных занятий, он проявил себя как блестящий мастер вычислительной техники» (стр. 443—444).

Редактор четвертого тома, покойный профессор Казанского университета Н. Г. Чеботарев, снабдил работы Лобачевского по алгебре ценными вводными статьями и комментариями.

В заключение необходимо отметить, что редакция и издательство подошли к изданию «Сочинений» Лобачевского со вниманием, любовью и тщательностью. Внешнее оформление книги не оставляет желать ничего лучшего. Чертежи сделаны четко. Опечаток почти нет. К книгам приложены на 33 вкладных листах портреты Лобачевского, фотографии титульных страниц первых изданий его сочинений и некоторых документов, связанных с деятельностью Лобачевского.

Будем с нетерпением ожидать выхода в свет последних двух томов этого издания, достойного памяти нашего великого соотечественника.

2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ БИОГРАФИИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Изд. Академии Наук СССР. М.-Л., 1948, 828 стр., тираж 3000, цена 70 руб.

В серии, носящей общее название «Труды комиссии по истории Академии наук СССР», отдельным томом изданы «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Трудно переоценить значение этого издания. Пожалуй, нельзя указать ни одной работы, вышедшей после 1948 года и посвященной изучению различных сторон деятельности Лобачевского, в которой не цитировались бы неоднократно документы, изданные Л. Б. Модзалевским, совершившим огромный труд, собрав и прокомментировав большое количество материалов либо разбросанных по старым, недоступным изданиям, либо находящихся в архивах.

Сборник материалов состоит из трех разделов. В первый, основной раздел включены 622 документа, охватывающих период от 1792 до 1859 года. Сюда же входит сохранившаяся переписка Лобачевского и некоторые другие материалы. Эти документы всесторонне характеризуют факты личной биографии Лобачевского, его многогранную научную, педагогическую, административную деятельность в Казанском университете, его философские и педагогические взгляды, его трудную борьбу за признание своих гениальных научных идей. Многие материалы опубликованы впервые и заставляют коренным образом изменить взгляд на многие факты жизни и деятельности Лобачевского, установившиеся по традиции с легкой руки первых его биографов. Даже такой вопрос, как дата рождения Лобачевского, можно считать окончательно решенным только в 1948 году, когда детальным анализом архивных материалов было установлено, что Лобачевский родился 20 ноября 1792 г. (ст. ст.), а не 22 октября 1793 года (ст. ст.), как считалось прежде.

Второй раздел книги содержит воспоминания о Лобачевском его детей, бывших студентов Казанского университета и других лиц. Эти материалы обладают, конечно, различной степенью достоверности, определяемой характером взаимоотношений и временем написания, но дополняют документальные материалы и характеризуют Лобачевского как человека. Здесь же в приложении даны некоторые материалы, составленные значительно позже смерти Лобачевского — в конце XIX века и позже.

Весьма ценен третий раздел книги, представляющий собой очень подробный словарь-указатель всех лиц, упоминаемых в тексте, а также и других лиц, принадлежащих к казанскому окружению Лобачевского и имеющих отношение к его жизни и деятельности. В этом словаре содержится более 800 имен, о каждом из которых даются некоторые биографические сведения и указываются основные источники. Словарь является своего рода комментарием к изданным материалам и дает много необходимых сведений каждому, занимающемуся биографией Лобачевского, а также историей казанской культурной жизни первой половины XIX века.

Все документы и материалы, помещенные в книге, снабжены точными указаниями о местонахождении каждого из них и о месте их опубликования.

В книге имеются около 30 иллюстраций — портреты Лобачевского и близких ему лиц, фотографии некоторых документов, а также копии с литографий и рисунков, изображающих основные постройки в Казани во времена Лобачевского.

В целом рецензируемая книга представляет собой крупнейший вклад в литературу, посвященную нашему великому математику.

В предисловии к книге академик С. И. Вавилов, по инициативе которого она была издана, писал: «Есть основания думать, что настоящая книга с материалами о Н. И. Лобачевском далеко не исчерпывает все интересное и важное о нем, что можно еще разыскать в государственных архивах и у частных лиц, и мы надеемся, что Л. Б. Модзалевский продолжит свою работу». Академик С. И. Вавилов был прав — в последние годы, прошедшие со времени издания книги, в различных архивах было найдено еще много весьма интересных материалов, дополнительно освещающих различные стороны деятельности Лобачевского.

Значительная часть из них не была еще опубликована.

К несчастью, Л. Б. Модзалевский трагически погиб в 1948 г. в расцвете своих сил и не смог продолжить важную для истории русской науки работу. Все же мы надеемся, что в дополнение к основному фонду материалов, изданных Л. Б. Модзалевским, будут отдельным сборником изданы новые найденные документы.

Это даст возможность на основе всех собранных материалов приступить к разработке капитальной научной биографии Лобачевского.

В. Ф. РОГАЧЕНКО.

ЕВКЛИД. «НАЧАЛА». Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. Книги I—VI, Гостехиздат, М.-Л., 1948, 448 стр., цена 19 руб. Книги VII—X, Гостехиздат, М.-Л., 1949, 512 стр., цена 21 руб. 20 коп. Книги XI—XV, Гостехиздат, М.-Л., 1950, 332 стр., цена 13 руб. 80 коп.

Д. ГИЛЬБЕРТ. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. Перевод с 7-го немецкого издания И. С. Градштейна, под редакцией и с вступительной статьей П. К. Рашевского. Гостехиздат, М.-Л., 1948, 492 стр., цена 18 руб.

Первая из этих книг — «Начала», написанная около 300 г. до н. э. знаменитым александрийским математиком Евклидом, является первым дошедшим до нас систематическим изложением геометрии, которую по имени автора «Начал» называют евклидовой геометрией, в противоположность геометрии неевклидовой, созданной великим русским ученым Н. И. Лобачевским.

Вторая книга — «Основания геометрии», принадлежащая перу одного из крупнейших математиков XX века Д. Гильберта, написана в 1899 г. и почти сразу стала классической книгой. В ней подводится итог более чем двухтысячелетнего развития евклидовой геометрии.

На русском языке «Начала» издаются не впервые. С 1739 г. до 1880 г. они издавались семь раз. Некоторые из этих изданий представляют собой переводы не с греческого подлинника, а с латинского и даже с французского и немецкого переводов. Все они в настоящее время устарели.

Настоящее издание является первым полным переводом лучшего критического издания греческого текста, выпущенного Гейбергом в семи томах (1883—1888 гг.). Все издание состоит из трех томов. Первый том содержит I—VI книги «Начал» (планиметрия). Второй том содержит VII—X книги (арифметика и классификация иррациональностей). Третий том содержит остальные книги «Начал» (стереометрия).

Первая книга «Начал», кроме определений и перечня постулатов и аксиом, содержит все основные геометрические предложения и построения. Здесь исследуются свойства треугольников и параллелограммов, рассматривается вопрос о преобразовании площадей. Книга заканчивается теоремой Пифагора и теоремой, ей обратной.

Вторая книга содержит так называемую «геометрическую алгебру» древних греков. В ней рассматриваются соотношения между площадями прямоугольников и квадратов, построенных на отрезках, связанных определенным образом.

В третьей книге изучаются свойства окружности, касательных к ней, центральных и вписанных углов.

В четвертой книге рассматриваются вписанные и описанные многоугольники и построение правильных многоугольников.

Пятая книга посвящена изложению теории отношений и пропорций.

В шестой книге на основании этой теории строится учение о подобии фигур.

В VII—IX книгах излагается арифметика или, вернее, теория целых чисел и строятся рациональные числа. В VII книге даются предложения, позволяющие найти общий наибольший делитель или установить взаимную простоту целых чисел. Здесь изложен так называемый алгорифм Евклида. VIII и IX книги содержат теорию непрерывных числовых пропорций. В IX книге, в частности, доказываются такие интересные предложения, как существование бесконечного множества простых чисел и определение суммы геометрической прогрессии. На базе предложений, рассмотренных в VII—IX книгах, в следующей X книге, являющейся наиболее трудной книгой «Начал», дается полная классификация биквадратных иррациональностей.

XI книга содержит основные предложения стереометрии, в том числе учение об объемах параллелепипедов и призм. Объемы остальных простейших тел рассмотрены в XII книге с помощью так называемого «метода исчерпывания», представляющего собой своеобразную античную форму современного метода пределов.

Последняя, XIII книга, содержит теорию правильных многогранников. Книга заканчивается доказательством того, что рассмотренные Евклидом пять правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр) являются единственными правильными многогранниками.

В третьем томе рецензируемого издания после последней XIII книги евклидовых «Начал» в качестве приложения напечатаны так называемые XIV и XV книги, которые, как было установлено еще в XVI веке, не принадлежат Евклиду. Первая из них была написана александрийским математиком Гипсиклом (ок. 200 г. н. э.), а вторая принадлежит неизвестному автору VI века н. э. Эти две книги обычно включаются в полные издания «Начал», так как в них, как и в XIII книге, проводится исследование правильных многогранников.

Несомненная заслуга Евклида в том, что он достаточно четко поставил требование: на основании небольшого числа первоначальных понятий и основных положений (постулаты и аксиомы) путем логической дедукции построить все здание геометрии — систему теорем, выражающих свойства и отношения геометрических фигур и тел. Это требование Евклид старался выполнить, хотя это ему не везде удавалось.

Изучение «Начал» обнаружило в них ряд недостатков. Некоторые из них были замечены еще греческими математиками, а некоторые могли быть замечены только в XIX веке. Одним из этих недостатков является то, что Евклид в доказательствах все же иногда обращается к интуиции или пользуется понятиями, не формулируемыми в основных определениях и предложениях. Так, например, уже в первом предложении первой книги («на данном отрезке построить равносторонний треугольник»), Евклид допускает, что две окружности, описанные из концов отрезка, служащего их радиусом, всегда пересекаются в двух точках, т. е. пользуется неявно предположением о непрерывности линий, хотя нигде этого не постулирует. Так же точно в предложении 12 («опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую») Евклид снова обращается к интуиции, считая, что прямая и окружность радиуса, большего чем расстояние точки до прямой, пересекаются в двух точках. В четвертом предложении той же книги Евклид прибегает к движению для доказательства равенства треугольников с помощью наложения, хотя возможность наложения нигде не постулирует. Был обнаружен ряд других недостатков системы Евклида.

Однако, в основном, прав профессор М. Я. Выгодский, который показывает, что слишком суровая критика Евклида в значительной части несправедлива. Не останавливаясь на этом вопросе, отошлем читателя к статье профессора М. Я. Выгодского «Начала» Евклида», помещенной в I выпуске сборника «Историко-математические исследования» (Гостехиздат, 1948). В нем имеется еще ряд статей (И. Г. Башмаковой, А. И. Маркушевича, А. Е. Раик), посвященных VII—X книгам «Начал».

Большую помощь изучающему Евклида окажут подробные комментарии проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского, являющегося одним из лучших знатоков Евклида. О своем переводе и комментариях к нему он пишет в предисловии: «Главное содержание моих комментариев состоит в описании различных евклидовых положений в эволюционирующем в продолжении 400 лет геометрическом учебнике. Можно сказать, что я задаюсь целью дать «Начала» Евклида такими, какими они были в прошлом, т. е. в их первоначальной форме, а затем такими, какими они становятся в процессе эволюции математической мысли, превращаясь постепенно в школьный учебник геометрии».

Для многих поколений «Начала» служили руководством, по которому знакомились с геометрией. Все позднейшие школьные учебники геометрии в той или иной степени находятся под их влиянием. Но не только учебно-методическое значение имеют Евклидовы «Начала». Эта книга является исходным пунктом для многих теоретических работ, а часто и образцом строгого и логически-стройного научного изложения. Так, например, основатель классической механики Ньютон в «Математических началах натуральной философии» изложил результаты, полученные им с помощью анализа бесконечно-малых в форме, близкой к форме Евклидовых «Начал».

Многочисленные попытки доказательства пятого постулата Евклида (о параллельности прямых) послужила стимулом к открытию неевклидовой геометрии, в которой этот постулат заменен другим (постулат Лобачевского).

. Работы Лобачевского, Римана, Клейна привели к тому, что в начале восьмидесятых годов прошлого столетия снова была поставлена задача аксиоматического построения евклидовой геометрии. Первое решение этой задачи было дано двадцать два века тому назад Евклидом, но это решение, гениальное для своей эпохи, не могло уже удовлетворить критическую мысль XIX века. Вместе с постановкой этой задачи был подготовлен материал для ее решения. Были выделены группы аксиом и проведено частичное исследование отношения между этими группами. Много ценного в этом вопросе было сделано Пашем в его «Лекциях о новой геометрии» (1882 г.), а также Пеано и рядом его учеников. Наконец, в 1899 г. появилась выдающаяся по богатству идей и разнообразию фактического содержания, книга Гильберта «Основания геометрии», в которой он дал свою систему аксиом, свое построение теории пропорций и теории измерения, а также выяснил многие другие принципиальные вопросы обоснования геометрии.

Эта книга подвела итог всем предыдущим исследованиям по основаниям геометрии. В ней впервые четко были сформулированы задачи аксиоматического построения геометрии и требования, предъявляемые к такому построению. С другой стороны, книга Гильберта послужила источником дальнейших многочисленных исследований по этим вопросам.

Остановимся вкратце на содержании книги Гильберта. В начале первой главы дается перечень элементов пространства и основных отношений между ними. Затем формулируются аксиомы, являющиеся описанием этих отношений. Здесь же даются необходимые определения и доказываются основные теоремы — следствия перечисленных аксиом. Вторая глава посвящена логическим проблемам, возникающим в связи с аксиоматикой — вопросу о непротиворечивости и взаимной независимости аксиом. Непротиворечивость системы доказывается Гильбертом с помощью построения соответствующей аналитической интерпретации, которая предполагается свободной от противоречий, т. е. построенная система аксиом непротиворечива, если непротиворечива система аксиом арифметики действительных чисел. Вопрос о независимости Гильберт исследует только для некоторых аксиом. Содержание остальных глав посвящено, главным образом, выяснению роли аксиомы непрерывности Архимеда. Главный результат, полученный Гильбертом состоит в том, что геометрия может быть развита во всем существенном без использования этой аксиомы. Такая геометрия называется не-архимедовой. В третьей и четвертой главах Гильберт построил не-архимедову метрическую геометрию, показав, что теория подобия и теория площадей могут быть строго обоснованы без использования аксиом непрерывности. Для этого Гильберт на основании теоремы Паскаля, которая доказывается без привлечения аксиом непрерывности, строит особое исчисление отрезков, позволяющее обосновать эти теории без привлечения действительного числа, как это делается обычно. В пятой и шестой главах Гильберт исследовал не-архимедову проективную геометрию. Прежде всего, построив новое исчисление отрезков без использования аксиом конгруэнтности, он вводит систему координат, а следовательно, и методы аналитической геометрии в не-архимедово проективное пространство. Пользуясь этим, Гильберт исследует значение теоремы Дезарга и гомологических треугольников в построении проективной геометрии. Именно, он установил, что теорема Дезарга не является следствием лишь плоскостных проективных аксиом, т. е., если мы желаем строить плоскую проективную геометрию, то к плоскостным проективным аксиомам необходимо добавить в качестве аксиомы еще и теорему Дезарга. Затем, подвергнув исследованию теорему Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, Гильберт установил, что эта теорема не может быть доказана без аксиом непрерывности на основании только проективных аксиом и не только плоских, но и пространственных. Последняя, седьмая, глава посвящена исследованию вопроса о геометрических построениях в не-архимедовой геометрии, совершаемых с помощью линейки и эталона длины.

К основному тексту книги приложены в качестве дополнений десять статей, написанных Гильбертом в различное время и посвященных различным вопросам обоснования геометрии, а также общим вопросам обоснования математики.

Книге предпослана статья редактора перевода профессора П. К. Рашевского: «Основания геометрии» Гильберта и их место в историческом развитии вопроса».

Основной текст книги сопровождается большим количеством примечаний, поясняющих и более подробно развивающих иногда черезчур краткое изложение автора.

В. Ф. РОГАЧЕНКО.

СОДЕРЖАНИЕ

Техредактор В. Ф. Любченко.

БЦ 09333. Подписано к печати 21. IV. 1952 г. Печ. л. 6. Уч.-изд. л. $8^1/_2$. Бум. $70\times100^1/_{16}$.
Зак. № 105. Цена 4 руб. 25 коп. Тираж 3000.

Типография Львовского государственного университета.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
22	6 св.	$K = 1$	$K - 1$
29	9 св.	$(0, \pi)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
30	10 св.	$(0, \pi)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
39	3 сн.	1899	1848
40	7 сн.	SR	SP
44	3 св.	$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{R}$	$(\lambda_2 - \lambda_1)$
44	1 сн.	Каравайский	Каврайский
74	15 сн.	$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6}$	$\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$
75	17 св.	$C_n^2 + C_n^2 + \ldots$	$C_n^1 + C_n^2 + \ldots$
76	16 св.	$x^{2^s}-1$	x^{2^s-1}
76	18 св.	$x^{2^s}-1$	x^{2^s-1}
76	21 св.	2^{s-1}	$2^s - 1$
82	11 сн.	n^2	u^2
83	5 св.	Пропущен номер формулы	(8)

Цена 4 руб. 25 коп.