И. Г. СОКОЛОВ

ПАМЯТИ ЛЬВА ГЕНРИХОВИЧА ШНИРЕЛЬМАНА

Летом 1938 года умер выдающийся советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР Лев Генрихович Шнирельман.

Л. Г. Шнирельман родился в январе 1905 года в гор. Гомеле, в семье учителя русского языка. Интерес к математике появился у Л. Г. очень рано: в двенадцать лет он самостоятельно детально изучил курс элементарной математики, а к шестнадцати годам овладел основными предметами университетского курса. К 15-летнему возрасту относится и его первая самостоятельная работа, посвященная решению уравнений в радикалах. Развитию математических интересов Л. Г. способствовал гомельский математик Л. И. Креер (впоследствии профессор Северокавказского пединститута). О своем учителе Л. И. Креере Лев Генрихович вспоминал всегда с большим уважением.

В 1921 году, еще совсем мальчиком, Л. Г. приехал учиться в Московский университет. Это было время расцвета школы теории функций Н. Н. Лузина. Л. Г. принимает активное участие в научных семинарах Н. Н. Лузина, слушает специальные курсы Лузина по теории функций, Урысона — по топологии, Хинчина — по диофантовым приближениям. Очень скоро Н. Н. Лузин обратил внимание на талантливого юношу и предложил ему темы для самостоятельной научной работы. Модная в то время в школе Лузина проблема континуума заинтересовала и Л. Г. Работая над этой трудной проблемой и не получая конкретных результатов, Л. Г. (как он сам говорил впоследствии) разуверился в своих силах и даже на короткое время оставил занятия математикой. Однако природные способности и интерес к науке помогли ему быстро побороть эти настроения и вновь заняться научной работой.

В студенческие годы Лев Генрихович сделал ряд работ по алгебре и топологии.

В 1924 году Л. Г. был зачислен аспирантом в институт математики и механики I-МГУ. Ко времени его пребывания в аспирантуре относится цикл важных работ (совместно с Л. А. Люстерником) по топологическим методам анализа. Эти работы создали новое направление в топологических методах вариационного исчисления. Это направление развивается и в настоящее время, главным образом, Л. А. Люстерником и его учениками. Закончив аспирантуру и блестяще защитив диссертацию на тему о качественных методах анализа, Л. Г. в 1929 году переезжает в гор. Новочеркасск, где работает около года профессором и зав. кафедрой математики Донского Политехнического института. В Новочеркасске Л. Г. написал свою знаменитую работу по аддитивной теории чисел. Нужной ему литературы для этой работы в библиотеках Новочеркасска не оказалось. Однако, он быстро сумел восстановить доказательства всех нужных ему теоретико-числовых и функциональных теорем. Работа Л. Г. «Об аддитивных свойствах чисел», напечатанная в «Известиях Донского Политехнического института» (1930), сразу выдвинула его в ряды ведущих математиков СССР. Л. Г. возвращается в Москву, где он вскоре становится профессором I-го Московского госуниверситета. В 1933 году за выдающиеся математические исследования Академия наук СССР выбирает Льва Генриховича своим членом-корреспондентом. В Московском университете и в Институте математики АН СССР и протекает работа Л. Г. до его смерти.

Научное творчество Л. Г. протекало в самых разнообразных областях математики. Не имея возможности в краткой статье подробно изложить все стороны научной деятельности Л. Г., мы остановимся на двух циклах его работ: на работах по аддитивной теории чисел и на работах по топологическим методам вариационного исчисления.

Теория чисел издавна привлекала к себе внимание крупнейших математиков. Проблемы этой теории замечательны тем, что обычно они весьма просто формулируются, но решения их зачастую представляют почти непреодолимые трудности. При этом существенные сдвиги в теории чисел сопровождаются появлением новых теорий и методов. Значение методов, применяемых для решения теоретико-числовых задач, выходит далеко за пределы теории чисел. Достаточно напомнить теорию идеалов Золотарева и Кронекера, которая была вызвана к жизни при попытке доказать великую теорему Ферма. Приведем примеры двух знаменитых проблем аддитивной теории чисел.

I. ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

В письме от 17/VI 1742 года член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах сообщил Эйлеру следующее предположение:

«Любое целое число есть сумма не более чем трех простых чисел».

Л. Г. Шнирельману принадлежит заслуга получения первых важных результатов в этой проблеме. Наиболее законченные результаты в проблеме Гольдбаха принадлежат акад. И. М. Виноградову, почти полностью разрешившему эту проблему.

II. ПРОБЛЕМА ВАРИНГА

«Каждое целое число может быть представлено как сумма ограниченного числа m *— тых степеней чисел натурального ряда. При этом потребное число слагаемых не зависит от разлагаемого числа, а зависит только от показателя* «m».

Проблема Варинга, поставленная также в XVIII веке, получила полное решение уже в наше время. Впервые ее решение было дано Гильбертом в 1907 г. Затем было дано еще несколько различных решений (акад. Виноградовым, Харди и Литльвудом, Шнирельманом). Наиболее простое и элементарное решение этой проблемы было получено применением метода Шнирельмана (в 1942 г.) советским математиком Линником.

Для удобства дальнейшего изложения введем некоторые определения.

Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН
(1905 — 1938)

Пусть нам даны k последовательностей целых чисел, начинающихся с нуля:

$$0 = n_0^{(1)}, n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \ldots, n_m^{(1)}, \ldots$$

$$0 = n_0^{(2)}, n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_m^{(2)}, \ldots$$

. . . .

$$0 = n_0^{(k)}, n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \ldots, n_m^{(k)}, \ldots$$

Выберем по одному числу из каждой последовательности и сложим между собою эти числа. Совокупность всех построенных таким образом чисел можно расположить в виде некоторой новой последовательности, пусть $\{e_m\}$, называемой *суммой данных последовательностей.* Таким образом, последовательность $\{e_m\}$ состоит из всех чисел вида:

$$n_i^{(1)} + n_j^{(2)} + \ldots + n_p^{(k)}$$

и, следовательно, в частности, содержит все члены данных последовательностей (чтобы их получить нужно складывать члены одной последовательности с нулевыми членами остальных (k—1) последовательностей).

Если сумма k *одинаковых последовательностей* $\{n_i\}$ *охватывает все натуральные числа, но сумма* (k—1) *последовательностей* $\{n_i\}$ *этим свойством не обладает, то последовательность* $\{n_i\}$ *называется базисом (натурального ряда)* k*-го порядка.* Другими словами, последовательность $\{n_i\}$ называется базисом k-го порядка, если всякое натуральное число можно представить как сумму k членов (возможно с повторениями) последовательности $\{n_i\}$ и если существует по крайней мере одно натуральное число, которое не входит в сумму k—1 последовательностей $\{n_i\}$.

Легко видеть, что не всякая последовательность является базисом. Так, например, последовательность четных чисел

0, 2, 4, ...

при складывании самой с собой не может дать ни одного нечетного числа и, следовательно, не является базисом никакого порядка. В связи с этим возникают следующие две важные задачи, имеющие основное значение для аддитивной теории чисел:

1) *Дана последовательность* $\{n_i\}$. *Определить, является ли эта последовательность базисом* и, если да, то

2) *определить порядок этого базиса.*

Простая и вместе с тем глубокая идея Л. Г. Шнирельмана при рассмотрении задачи 1-ой заключается в том, что основную роль при этом играет не только арифметическая природа чисел $\{n_i\}$, а густота или плотность распределения этих чисел в натуральном ряду. Например, числа двух последовательностей, одинаково густо расположенных в натуральном ряду,

$$p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_m,\ \ldots \qquad (p_0 = 0;\ p_1 = 1),$$

$$p_0,\ p_0 + 1,\ p_1 + 1,\ \ldots,\ p_m + 1,\ \ldots$$

обладают, очевидно, различной арифметической природой. В то же время, если первая последовательность есть базис, то вторая также всегда будет базисом (быть может, более высокого порядка). Л. Г. вводит следующее определение плотности.

Последовательность натуральных чисел

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m,\ \ldots\ (n_0 = 0;\ n_1 = 1) \tag{1}$$

имеет плотность α, *если*

$$\inf_{1 \leqslant n < \infty} \frac{A(n)}{n} = \alpha,$$

где $A(n)$ *число членов последовательности* (1), *не превосходящих числа* n *(при подсчете* $A(n)$ *нуль не считается.*[1] Мы принимаем $n_1=1$, так как в противном случае $\alpha=0$.

Основная теорема Шнирельмана следующая:

Если $\alpha>0$, *то последовательность* (1) *есть базис натурального ряда.*

Наметим вехи доказательства этой теоремы. Пусть сначала $\alpha>\frac{1}{2}$. Рассмотрим произвольное целое число n и пусть $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ члены нашей последовательности, не превосходящие n. Числа

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k;\ n - n_k,\ n - n_{k-1},\ \ldots,\ n - n_1 \tag{3}$$

все не больше n. С другой стороны из равенства (2) и условия $\alpha > \frac{1}{2}$ получаем

$$\frac{A(n)}{n} = \frac{k}{n} > \frac{1}{2} \qquad \text{или} \quad 2k > n,$$

следовательно, ряд (3) содержит равные члены, т. е. для некоторой пары индексов i и j имеем равенство

$$n - n_i = n_j \qquad \text{или} \quad n = n_i + n_j. \tag{4}$$

Равенство (4) показывает, что последовательность (1) есть базис 2-го порядка. Общий случай теоремы (для любого положительного α) легко сводится к нашему случаю с помощью следующей леммы:

Плотность суммы двух последовательностей не меньше чем сумма плотностей этих последовательностей.

Эта лемма в несколько ослабленной форме (достаточной для доказательства нашей теоремы) была доказана Шнирельманом. Доказательство леммы в форме, в которой она только что высказана, представило значительные трудности, и было получено значительно позднее.

---

[1] $\inf \frac{A(n)}{n}$ означает нижнюю границу чисел $\frac{A(n)}{n}$, т. е. наибольшее число, не превосходящее всех чисел $\frac{A(n)}{n}$.

Возвращаясь к проблеме Гольдбаха, заметим, что применить указанную теорему непосредственно нельзя, так как плотность последовательности простых чисел равна нулю. Шнирельман остроумным приемом показывает, что плотность суммы двух последовательностей, состоящих из простых чисел, уже положительна и поэтому последовательность простых чисел есть базис натурального ряда. Отсюда, в частности, вытекало, что каждое целое число может быть представлено в виде суммы ограниченного числа простых чисел. Сам Шнирельман показал, что эта грань не превышает 800 000. Исследование метода Шнирельмана различными математиками показало, что последовательность простых чисел есть базис не выше 67 порядка. Таким образом, метод Шнирельмана не дал полного решения проблемы Гольдбаха. Однако это был первый существенный сдвиг в этой, до тех пор казавшейся неприступной, проблеме. Глубина идей, заложенных в работе Шнирельмана, соединенная с полной элементарностью метода, произвела огромнейшее впечатление в математическом мире. Крупнейший специалист по теории чисел Э. Ландау писал: «Работа Л. Г. Шнирельмана содержит одно из величайших достижений в теории чисел, до которого мне удалось дожить».

Дальнейший принципиальный сдвиг, как мы уже указывали, был сделан акад. И. М. Виноградовым. Пользуясь своим методом, академик Виноградов доказал, что всякое, достаточно большое нечетное число может быть представлено как сумма трех простых чисел.

Работы Шнирельмана по теории чисел содержат еще целый ряд значительных результатов: доказательство обобщенной теоремы Варинга, достаточные условия для того, чтобы целочисленные значения диференцируемых функций в целых точках образовали базис и т. д.

Метод Шнирельмана в теории чисел получил широкое распространение во всем математическом мире. Изложение работы Л. Г. (напечатанной в мало распространенном журнале «Труды Донского политехнического института»), было вскоре дано в статье Э. Ландау. В 1933 г. Шнирельман публикует (со значительными добавлениями) свою работу в „Mathematische Annalen". Многие математики как в СССР, так и за границей (Романов, Хинчин, Линник, Ландау, Хейльброн, Риччи, Артин, Шрек, Манн и др.) развивают идеи Л. Г. Шнирельмана. Возникает новая область теории чисел — арифметика числовых последовательностей. Эта новая область быстро развивается, ее методы переносятся из теории чисел в общую теорию множества. В самой теории чисел метод Шнирельмана получает широкое распространение и делает быстрые успехи. В частности, как мы уже указывали, проблема Варинга, решение которой у Гильберта занимает более сотни страниц, занимает у Линника, действовавшего методом Шнирельмана, около 20 страниц. Из других работ Л. Г. Шнирельмана, имеющих отношение к теории чисел, следует отметить его исследование: «О функциях в нормированных алгебраических телах» (Изв. АН СССР, № 5—6, 1938). Л. Г. Шнирельман строит теорию функций в этих телах, аналогичную обычной теории аналитических функций. Эта работа должна была быть продолжена в направлении применения развитого аппарата к решению алгебраических уравнений в целых числах. Ряд работ Л. Г. Шнирельман по различным вопросам теории чисел остались неопубликованными. В частности, в работе, которая велась совместно с А. О. Гельфондом, изучались полиномы с целыми коэфициентами, наименее уклоняющими от нуля. Изучение этих полиномов привело авторов к важным теоретико-числовым результатам относительно распределения простых чисел.

В 1929 г. в сборнике работ математического раздела секции естественных и точных наук Комакадемии публикуется работа Л. Г. Шнирельмана (написанная, вероятно, много раньше): «О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых». В этой работе доказывается, в частности, следующая теорема: «На всякой простой, замкнутой, плоской, жордановой кривой, имеющей непрерывную кривизну, можно отыскать четыре точки, лежащих в вершинах квадрата».

Идея доказательства этой интересной теоремы следующая: прежде всего доказывается, что если кривая, несущая на себе квадрат, аналитическая в некоторых окресностях вершин квадрата, то и всякая кривая, удовлетворяющая условиям теоремы и находящаяся в достаточной близости от данной, также несет на себе квадраты (достаточно близкие к первоначальному). Затем строится однопараметрическое семейство кривых, содержащее некоторый эллипс и апроксимирующих исследуемую кривую С. Каждая кривая семейства несет на себе лишь конечное число квадратов. При этом при переходе от одной кривой семейства к близкой к ней число квадратов изменяется на четное число. Так как на эллипсе имеется один квадрат, то кривая семейства достаточно близкая к кривой С содержит нечетное число квадратов и, следовательно, на кривой С имеется хотя бы один квадрат.

Подобного рода рассуждения (метод аналитического продолжения) применялись Пуанкаре в знаменитой задаче о числе замкнутых геодезических на выпуклых поверхностях рода нуль. Он вводит в уравнение исследуемой поверхности параметр таким образом, что при непрерывном изменении этого параметра можно перейти от эллипсоида к заданной поверхности. При этом доказывается, что при переходе от одной поверхности к другой число решений меняется на четное число, а так как на эллипсоиде имеется нечетное число замкнутых геодезических, то отсюда делается заключение о существовании замкнутых геодезических на поверхности рода нуль.

Против этого рассуждения Пуанкаре было выдвинуто следующее возражение. Для некоторых особых значений параметра число замкнутых геодезических может стать бесконечным, а затем четным или нулем. В ряде работ, написанных Л. Г. Шнирельманом и Л. А. Люстерником за период 1927—1929 гг., задача о числе замкнутых геодезических получила окончательное разрешение.

В работе „Sur un principe topologique en analyse" (C. R. de l'Ac. des Sc., t. 188; 1929) было дано существенное обобщение метода минимума максимумов Куранта. Как известно (см., например, Курант-Гильберт: «Методы математической физики», т. 1), Курантом была развита теория собственных значений, которая позволяла в некоторых случаях провести доказательство существования и действительности собственных значений без вычислений. Рассмотрим для простоты простейшую алгебраическую задачу. Пусть F — квадратическая форма n переменных.

$$F = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (1)$$

и М — единичная сфера, заданная уравнением:

$$E = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \qquad (2)$$

Обозначим через $[M_i]$ класс всех $(i+1)$ — размерных сфер радиуса единица, заключенных в сфере M. Курант определяет собственное значение λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ как минимум максимумов формы F на сферах класса $[M_i]$; λ_i есть i-ое по величине собственное значение.

Система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (3)$$

разрешима, если вместо параметра λ подставить собственное значение.

Систему уравнений (3) можно записать в виде

$$d(F - \lambda E) = 0, \qquad (4)$$

поэтому, если рассматривать F как функцию, заданную на единичной сфере M, то в точках, где удовлетворяется уравнение (3), градиент F на M исчезает. Такие точки называются особыми точками F, а значение функции F в этих точках — особыми значениями.

Метод Куранта дал ряд интересных приложений в теории линейных уравнений. Люстерник и Шнирельман существенно обобщая этот метод, получают новый принцип «особой точки», который уже можно прилагать и к нелинейным уравнениям.

Вместо единичной сферы и квадратичной формы рассматривается некоторое компактное пространство[1] R и функция F, определенная на R, имеющая непрерывные производные до второго порядка. Роль классов $[M_i]$ играют так называемые замкнутые топологические классы.[2] Функция F достигает на каждом из множеств A некоторого класса [A] своего максимума. Нижняя грань этих максимумов по данному классу (называемая особым значением) достигается, по крайней мере, на одном из множеств A_0 класса [A]. Назовем это множество минимальным. Принцип особой точки заключается в следующей теореме:

Если пересечение гиперповерхности $F=C$ (где C — особое значение) с минимальным множеством A_0 заключено внутри R, то это пересечение содержит, по крайней мере, одну особую точку гиперповерхности $F=C$, т. е. точку, где $dF=O$.

Для определения числа решений вариационной задачи вводится важное понятие категории замкнутого множества (L. Schnirelman:

[1] Компактное множество — это такое множество, для которого имеет место принцип Больцано-Вейерштрасса: из всякой бесконечной последовательности элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Сфера M в n - мерном пространстве компактна.

[2] Определим деформацию замкнутого множества A в пространстве R как однозначное и непрерывное преобразование множества, зависящее, кроме того, непрерывно от параметра t. При некотором значении параметра $t=t_0$ мы получаем заданное множество, а при $t=t_1$ = деформированное. Замкнутым топологическим классом [A] называется наименьшая совокупность замкнутых множеств, обладающая свойствами: 1) если класс [A] содержит множество A, то он содержит в себе и все множества, получаемые из A с помощью деформаций; 2) предельные множества для последовательности множеств из класса [A] также принадлежат к [A].

„Über eine neue kombinatorische Invariante", Wiener Berichte, 1929). В простейшем случае это понятие определяется так: замкнутое множество A называется множеством первой категории относительно R, если оно сводится к точке при помощи деформации в R; A называется k-ой категории, если его можно разбить на K замкнутых частей (могущих пересекаться) первой категории и нельзя разбить на K=1 часть первой категории. Понятие категории позволяет оценить снизу число решений вариационной задачи.

Эти методы затем переносятся на функциональные пространства и позволяют доказать следующую теорему:

На каждой поверхности рода нуль, коэфициенты линейной формы которой обладают частными производными до 3-го порядка включительно, существуют, по крайней мере, 3 замкнутых геодезических линии (Люстерник и Шнирельман: „Existence de trois lignes geodesiques fermés sur chaque surface de genre O", C. R. de l' Ac. Sc., t. 181, 1929).

Сводка результатов этих работ была дважды издана в Советском Союзе (в 1930 г. отдельной книгой: «Топологические методы в вариационных задачах» и под тем же заголовком в «Успехах математических наук», т. II, вып. I) и переведена на французский язык под редакцией известного математика Ж. Адамара.

В дальнейшем была доказана более сильная теорема о существовании трех замкнутых самонепересекающихся геодезических. На всякой поверхности рода нуль существует, по крайней мере: 1) или три самонепересекающихся замкнутых геодезических различной длины, 2) или однопараметрическое семейство таких линий равной длины и одна такая линия отличной длины, 3) или двупараметрическое семейство линий равной длины (второй случай осуществляется, например, на поверхностях вращения, третий — на поверхности сферы).

Из других работ Л. Г. Шнирельмана следует отметить работы геометрического и общетопологического характера. В работе 1931 г. (совместно с Л. С. Понтрягиным) дается оригинальное определение размерности компактного множества. В работе, опубликованной в «Известиях Донского политехнического института», строится интересный пример непрерывного преобразования, при котором множество точек, остающееся инвариантным, сводится к одной точке. Этот пример показывает, насколько существенна разница между диференцируемыми и просто непрерывными преобразованиями. Как показал ранее Л. Г. Шнирельман, если функция, дающая преобразование, имеет производные до второго порядка включительно в окрестности инвариантной точки, то существует инвариантная линия, выходящая из инвариантной точки.

Л. Г. Шнирельман был глубоким и разносторонним математиком. Будучи первоклассным вычислителем (работы по аддитивной теории чисел), он, с другой стороны, создал ряд важных работ в абстрактных областях математики. Эрудиция Л. Г. в различных областях математики была поразительна даже в дни его молодости. Так, например, он рассказал в поезде (в течение двух дней) автору этих строк чрезвычайно сложное и трудное решение Гильберта проблемы Варинга. Решение было изложено с большими тонкостями, хотя Л. Г. в то время (в 1929 г.) еще не являлся специалистом по теории чисел. По утверждению специалистов, изложение подобной теории потребовало бы целого курса лекций. Нередко на заседениях математического общества и Института математики Л. Г. поражал присутствующих своими глубокими и тонкими замечаниями. Часто он тут же давал новые доказательства и намечал существенные обобщения докладываемых результатов. К своим собственным результатам Л. Г. относился чрезмерно критически. Он занимался обычно задачами, для решения которых необходимы длительные изыскания, где нужно создавать новые методы и нельзя сказать заранее, получится ли окончательный результат. Предварительных результатов Л. Г., как правило, не публиковал, хотя они зачастую представляли значительный интерес. Это объясняет тот факт, что математик подобной силы, как Л. Г., оставил сравнительно небольшое число работ. Многие результаты Л. Г. так и остались неизвестными, некоторые были восстановлены и опубликованы после его смерти. Так, например, Л. Г. довольно долго пытался создать аппарат для исключения неизвестных из систем уравнений высших степеней, аппарат, который в какой-то степени мог бы заменить при переходе от линейных к нелинейным задачам определители. В процессе этих поисков Л. Г. доказал целый ряд существенных алгебраических теорем, но ни одной из них он не опубликовал.

Л. Г. был скромным, отзывчивым, глубоко принципиальным и общественно активным человеком.

Пламенный патриот своей Родины, Л. Г. необычайно гордился расцветом советской науки и культуры, для развития которых он и сам немало поработал. Л. Г. многое сделал и для подъема математического образования в СССР. Он выступал на страницах газеты «Правда» с критикой некоторых учебников, участвовал в разработке новых программ, писал популярные книги для учителей и школьников, выступал с публичными лекциями.

Советская наука — самая передовая наука в мире. Одним из лучших представителей этой науки был Л. Г. Шнирельман. Советские математики еще долго будут изучать его труды и развивать созданные им методы.