Б. В. ГНЕДЕНКО

О ПОЛНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. В современном математическом анализе большую роль играют системы так называемых ортогональных функций. Функции последовательности

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

называются ортогональными в промежутке (a, b), если для них выполняются следующие условия:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\ \varphi_k(x)\ dx = 0, \quad \text{если } i \neq k,$$

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)\ dx = c_i \neq 0.$$

Среди всевозможных ортогональных систем функций особенно важны полные системы, т. е. такие, к которым нельзя добавить ни одной новой функции, отличной от тождественного нуля и ортогональной ко всем остальным функциям системы. Доказывается, что полнота системы может быть охарактеризована иначе. Именно, чтобы система (1) была полной необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом можно было подобрать последовательность постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ такую, что имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left\{ f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\}^2 dx = 0.$$

Словами это обстоятельство выражают следующим образом: любая функция с интегрируемым квадратом может быть апроксимирована в среднем с любой степенью точности посредством линейных выражений с постоянными коэфициентами из ортогональных функций полной системы.

Известно, что в промежутке $(0,2\pi)$ тригонометрические функции

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \ldots \tag{2}$$

ортогональны и образуют полную систему. Во всех курсах анализа обычно указывается, что в промежутке $(0, \pi)$ следующие системы

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx, \ldots$$

и

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$$

также являются полными и ортогональными. Это замечание служит упрощению вычислений коэфициентов при разложении периодических функции в ряды Фурье. Изменением масштаба мы можем интервал $(0, \pi)$ привести к интервалу $(0,2\pi)$; последние системы при этом запишутся в таком виде:

$$\sin\frac{x}{2},\ \sin x,\ \ldots,\ \sin\frac{n}{2}x,\ \ldots \tag{3}$$

$$1,\ \cos\frac{x}{2},\ \cos x,\ \ldots,\ \cos\frac{n}{2}x,\ \ldots \tag{4}$$

В диссертации академика Н. Н. Лузина, появившейся в 1916 г. [3], было замечено, что свойства ортогональных систем функций еще недостаточно хорошо изучены и в качестве нерешенной задачи был поставлен вопрос: известно, что система тригонометрических функций (2) обладает таким свойством — система производных от функций системы (2) с точностью до постоянных множителей совпадает с функциями исходной системы. Обладают ли этим свойством какие-нибудь другие ортогональные системы? Казанский математик Б. М. Гагаев в 1929 году опубликовал решение этого вопроса [1]. Внимательное изучение выводов Гагаева привело меня [2] к новой системе функций, так же решающей вопрос Лузина, но несовпадающей с системой (2) и незамеченной Гагаевым. Вот эта система функций

$$\sin\frac{x}{2},\ \cos\frac{x}{2},\ \sin\frac{3x}{2},\ \ldots,\ \sin\frac{2n-1}{2}x,\ \cos\frac{2n-1}{2}x,\ \ldots \tag{5}$$

Функции этой системы ортогональны в интервале $(0,2\pi)$, кроме того, система (5) является полной в этом промежутке. Других полных систем функций, дающих решение вопроса Лузина, не существует. Если строго отнестись к полученному решению, то только система (5) и будет переходить сама в себя при диференцировании, так как система производных от функций системы (2) не будет содержать единицы и, следовательно, уже не будет полной.

Легко видеть, что в интервале $(0,2\pi)$ существуют еще две ортогональные и полные системы тригонометрических функций, а именно

$$\sin\frac{x}{4},\ \sin\frac{3x}{4},\ \sin\frac{5x}{4},\ \ldots,\ \sin\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)x, \ldots \tag{6}$$

и

$$\cos\frac{x}{4},\ \cos\frac{3x}{4},\ \cos\frac{5x}{4},\ \ldots,\ \cos\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)x,\ \ldots \tag{7}$$

Цель настоящей заметки состоит, во-первых, в доказательстве того, что перечисленными системами (2) — (7) исчерпываются полные ортогональные в интервале $(0,2\,\pi)$ системы тригонометрических функций вида

$$\{\sin \alpha_n x, \ \cos \beta_n x\}, \tag{8}$$

$$\{\sin \alpha_n x\} \tag{9}$$

и

$$\{\cos \beta_n x\} \tag{10}$$

с рациональными коэфициентами α_n и β_n. Во вторых, мы докажем, что кроме систем (2) и (5) не существует полных ортогональных систем вида (8) уже не только с рациональными, но и с какими угодно коэфициентами α_n и β_n. Наконец мы покажем, что существует бесконечное множество полных ортогональных систем вида (9) и (10), но уже с трансцендентными коэфициентами α_n и β_n. Полноту этих последних систем мы доказывать не будем, так как это заставило бы нас использовать неэлементарные приемы.

Содержание настоящей заметки совершенно элементарно и вполне доступно студенту 2-го курса высшего технического учебного заведения. Надеюсь, что приводимые мной здесь результаты могут пригодиться в педагогической практике.

2. Лемма. Функции $F(x)$ с интегрируемым квадратом в интервале $(0, \pi)$ удовлетворяющие одному из условий

а) $f(x) = f(\pi - x)$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

б) $f(x) = - f(\pi - x)$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

аппроксимируются в среднем с любой степенью точности при помощи линейных выражений, составленных из функций системы

$$\{\sin (2n - 1)\,x, \ \cos (2n - 1)\,x\}. \tag{11}$$

Доказательство. Прежде всего легко проверить, что функции системы (11) ортогональны в промежутке $(0,\pi)$. Действительно, имеем при $i \neq j$

$$\int_0^\pi \sin (2i - 1)\,x \ \sin (2j - 1)\,x\,dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos 2(i - j)\,x - \cos 2(i + j - 1)\,x]\,dx = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin (2i - 1)\,x \,.\, \cos (2j - 1)\,x\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin 2 (i + j - 1) x + \sin 2 (i - j) x] dx = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos (2i - 1) x . \cos (2j - 1) x dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos 2 (i + j - 1) x + \cos 2 (i - j) x] dx = 0.$$

а) Строим далее в промежутке $(-\pi, \pi)$ функцию $\varphi(x)$ посредством следующих равенств

$$\varphi (x) = f (x) \quad \text{для} \quad 0 < x < \pi;$$
$$\varphi (x) = -f (-x) \quad \text{для} \quad -\pi < x < 0.$$

Пишем для функции $\varphi(x)$ ряд Фурье относительно системы (2)

$$\varphi (x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Коэфициенты a_n и b_n вычисляются по известным формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi (x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi (x) \sin nx dx.$$

Так как функция $\varphi(x)$ — нечетная, то

$$a_n = 0 \quad \text{при любом } n,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi (x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f (x) \sin nx dx.$$

Исследуем внимательнее значения коэфициентов b_n при n четных и n нечетных. Имеем при n четных $(n=2k)$.

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f (x) \sin 2kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f (x) \sin 2kx dx.$$

Полагаем во втором интеграле $x = \pi - y$, тогда

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2kx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \sin 2k(\pi - y)\, dy =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2kx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin 2ky\, dy = 0.$$

Аналогичный расчет показывает, что при n нечетных ($n=2к-1$)

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k-1)x\, dx. \qquad (12)$$

Вычисляем теперь разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье в промежутке $(0, \pi)$ для системы (11)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(2n-1)x + \beta_n \sin(2n-1)x.$$

Коэфициенты α_n и β_n определяются равенствами

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos(2n-1)x\, dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin(2n-1)x\, dx.$$

Несложный расчет показывает, что

$$\alpha_n = 0 \qquad \text{при любом } n,$$

$$\beta_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n-1)x\, dx.$$

Из полноты системы (2) следует, что при $n \to \infty$

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} \sin(2k-1)x\right\}^2 dx \to 0,$$

где b_{2k-1} определяются формулами (12). Но

$$J_n = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} \sin(2k-1)\, x \right\}^2 =$$

$$= 2 \int\limits_0^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin(2k-1)\, x \right\}^2 dx,$$

поэтому полиномы

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin(2k-1)\, x,$$

составленные из функций системы

$$\{\sin(2k-1)\, x\} \tag{13}$$

аппроксимируют в среднем функцию $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$ с любой степенью точности.

Так как в промежутке $(0, \pi)$ функция $f(x)$ произвольна (лишь интегрируема в квадрате), то мы заключаем, что система функций (13) полна в интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Строим теперь функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{для} \quad 0 < x < \pi,$$

$$\varphi(x) = f(-x) \quad \text{для} \quad -\pi < x < 0.$$

Легкие подсчеты показывают, что ряд Фурье по функциям системы (2) в этом случае принимает такой вид

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_{2k} = 0,$$

$$a_{2k-1} = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k-1)\, x\, dx.$$

Разложив функцию $f(x)$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд Фурье по функциям системы (11), находим, что

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(2k-1)\, x\, dx,$$

где

$$\alpha_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k-1)\, x\, dx.$$

Подобно предыдущему, мы и в этом случае доказываем, что функция $f(x)$ аппроксимируется в среднем с любой степенью точности полиномами

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(2k-1)\, x,$$

составленными из функций системы (11). Это же обстоятельство означает ничто иное как полноту системы функций

$$\{\cos(2k-1)\, x\} \tag{14}$$

в интервале $(0, \pi)$.

3. Доказательство полноты системы функций (11) в промежутке $(0, \pi)$ получается теперь в двух словах. Действительно, каждая функция $f(x)$, определенная в $(0, \pi)$, может быть представлена в виде суммы

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

слагаемые которой удовлетворяют условиям

а) $\quad f_1(x) = f_1(\pi - x) \qquad (0 < x < \pi),$

б) $\quad f_2(x) = -f_2(\pi - x) \qquad (0 < x < \pi).$

Убедиться в этом можно, взяв в качестве функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, например, такие функции

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(\pi - x)],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(\pi - x)].$$

Если функция $f(x)$ — интегрируема в квадрате, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ согласно предыдущей лемме, аппроксимируются с любой степенью точности многочленами, составленными из функций системы (11). Этим же свойством, очевидно, обладает и их сумма, т. е. функция $f(x)$. Таким образом полнота системы (11) в промежутке $(0, \pi)$ доказана.

Положив $z=2x$, мы растягиваем интервал $(0, \pi)$ в интервал $(0,2\pi)$ и преобразуем систему (11) в систему (5). Так как свойство полноты при таком преобразовании не нарушается, то мы доказали, таким образом, полноту системы (5) в интервале $(0,2\pi)$.

Точно так же, положив $z=4x$, мы растягиваем интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в интервал $(0,2\pi)$ и преобразуем систему (13) в систему (6) и систему (14) в систему (7). Этим, очевидно, доказана полнота систем (6) и (7) в промежутке $(0,2\pi)$.

Предыдущие результаты позволяют нам сделать небольшое методическое указание. Пусть нам следует разложить периодическую функцию $f(x)$, имеющую период 2π в ряд Фурье по функциям системы (5). Если функция $f(x)$ нечетна, т. е., если для нее выполнено равенство

$$f(x) = -f(-x),$$

то разложение содержит только синусы, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Если кроме того $f(x)$ удовлетворяет равенству

$$f(x) = -f(\pi - x), \qquad (0 < x < \pi),$$

то разложение $f(x)$ в ряд Фурье содержит только члены вида $b_{2k-1} \sin (2k-1)x$.

Точно так же, если функция $f(x)$ четна, т. е. для нее выполняется равенство

$$f(x) = f(-x),$$

то разложение $f(x)$ содержит только члены вида $a_n \cos nx$. Если же кроме того $f(x)$ удовлетворяет равенству

$$f(x) = f(\pi - x),$$

то все коэфициенты a_n с четными номерами обращаются в нуль и разложение $f(x)$ в ряд Фурье принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos (2n-1)x.$$

Мы видели при этом, что для вычисления коэфициентов разложения нужно пользоваться формулами (12) и (12′).

4. Докажем теперь, что функции последовательности

$$\{\cos \alpha_n x\}$$

могут быть ортогональными в интервале $(0,2\pi)$ только в одном из следующих случаев: все α_n или

а) имеют вид $\alpha_n = \frac{s_n}{2}$, где s_n — целые числа, или

б) имеют вид $\alpha_n = \frac{1}{4}(2s_n - 1)$, где s_n — целые числа, или

в) являются корнями уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} 2\pi\alpha = C,$$

где C — отличное от нуля постоянное.

В самом деле, из ортогональности $\cos \alpha_n x$ и $\cos_m x$ заключаем что

$$\int_0^{2\pi} \cos \alpha_n x \cos \alpha_m x \, dx = 0.$$

Так как $\alpha_n \neq \alpha_m$ при $n \neq m$, то это условие приводится к виду

$$\frac{\sin(\alpha_n + \alpha_m) 2\pi}{\alpha_n + \alpha_m} + \frac{\sin(\alpha_n - \alpha_m) 2\pi}{\alpha_n - \alpha_m} = 0.$$

Легкими преобразованиями мы приводим последнее равенство к такой форме

$$\alpha_n \sin 2\pi \alpha_n \cos 2\pi \alpha_m - \alpha_m \sin 2\pi \alpha_m \cos 2\pi \alpha_n = 0. \qquad (15)$$

Могут представиться три подслучая.

α) $$\cos 2\pi \alpha_n = 0.$$

Так как при этом

$$\sin 2\pi \alpha_n = \pm 1,$$

то также

$$\cos 2\pi \alpha_m = 0.$$

Отсюда следует, что все величины α_n имеют вид

$$\alpha_n = \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{4},$$

где s_n — целые числа.

β) $$\sin 2\pi \alpha_n = 0.$$

В этом случае и

$$\sin 2\pi \alpha_m = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha_n = \frac{1}{2} s_n,$$

где s_n — целое число.

γ) $\sin 2\pi \alpha_n$ и $\cos 2\pi \alpha_n$ отличны от нуля.

Равенство (15) в этом случае эквивалентно следующему:

$$\alpha_n \operatorname{tg} 2\pi \alpha_n = \alpha_m \operatorname{tg} 2\pi \alpha_m.$$

Отсюда мы заключаем, что если α_n не будет вида $\frac{s_n}{2}$ или $\frac{s_n}{2} - \frac{1}{4}$, то ни при одном n не может быть равенства $\alpha_n = 0$. Последнее равенство поэтому означает, что произведение

$$\alpha_n \operatorname{tg} 2\pi \alpha_n$$

сохраняет постоянное значение и, следовательно, существует такое постоянное C, для которого все α_n будут удовлетворять равенству

$$\alpha_n \operatorname{tg} 2\pi \alpha_n = C.$$

Теорема таким образом доказана. Известно, что при отличных от нуля C последнее уравнение не имеет рациональных решений.

5. Повторяя рассуждения предыдущего §, мы можем доказать, что функции последовательности

$$\{\sin \beta_n x\}$$

могут быть ортогональны только в одном из следующих случаев: все β_n или

а) имеют вид $\frac{s_n}{2}$, где s_n — целые числа, или

б) имеют вид $\frac{s_n}{2} - \frac{1}{4}$, где s_n — целые числа, или

в) являются корнями уравнения

$$\alpha \operatorname{ctg} 2\pi \alpha = C,$$

где C — отличное от нуля постоянное.

6. Среди всевозможных систем функций

$$\{\sin \beta_n x, \cos \alpha_n x\} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

существуют только две ортогональные в $(0,2\pi)$ системы:

а) $$\alpha_n = \beta_n = n,$$

б) $$\alpha_n = \beta_n = n + \frac{1}{2}.$$

Действительно, в силу ортогональности $\sin \beta_n x$ и $\cos \alpha_m x$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin \beta_n x \cos \alpha_m x \, dx = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1 - \cos(\alpha_m + \beta_n) 2\pi}{\alpha_m + \beta_n} + \frac{1 - \cos(\alpha_m - \beta_n) 2\pi}{\alpha_m - \beta_n}\right] = \tag{16}$$
$$= \frac{\sin^2 \pi(\alpha_m + \beta_n)}{\alpha_m + \beta_n} + \frac{\sin^2 \pi(\alpha_m - \beta_n)}{\alpha_m - \beta_n} = 0.$$

Мы рассматриваем случай, когда наша система содержит бесконечное множество как синусов, так и косинусов. Согласно предыдущему найдется такое α_m, что для данного n мы будем иметь

$$\alpha_m > \beta_n.$$

Таким образом, чтобы при любых m и n имело место равенство (16), необходимо, чтобы одновременно

$$\sin \pi (\alpha_m + \beta_n) = 0$$

и

$$\sin \pi (\alpha_m - \beta_n) = 0.$$

Это означает, что

$$\alpha_m + \beta_n = p,$$

$$\alpha_m - \beta_n = q,$$

где p и q — целые числа. Отсюда

$$2\alpha_m = p + q,$$

$$2\beta_n = p - q$$

и, следовательно, одновременно $2\alpha_m$ и $2\beta_n$ являются либо оба четными, либо оба нечетными. Этим, очевидно, наше утверждение доказано.

Заметим, что мы доказали сейчас несколько больше, чем сформулировали, а именно, если $\beta \geqslant \alpha$, то две функции $\sin\beta x$ и $\cos\alpha x$ могут быть ортогональны в интервале $(0,2\pi)$ только в одном из двух случаев: $\alpha = r$ и $\beta = s$ или $\alpha = r - \frac{1}{2}$, $\beta = s - \frac{1}{2}$ где r и s — целые числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гагаев Б. М. Sur l'unisité du systéme de fonctionc orthogonales invariant relativement à la dérivation. C. R. Acad. Sci. 188, 222—226, 1929.

2. Гнеденко Б. В. О единственности системы ортогональных функций инвариантной относительно диференцирования. ДАН СССР, т. 14, 159—162, 1937.

3. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд, Математический сборник, т. XXX, 1916 (имеется новое издание 1951 года).