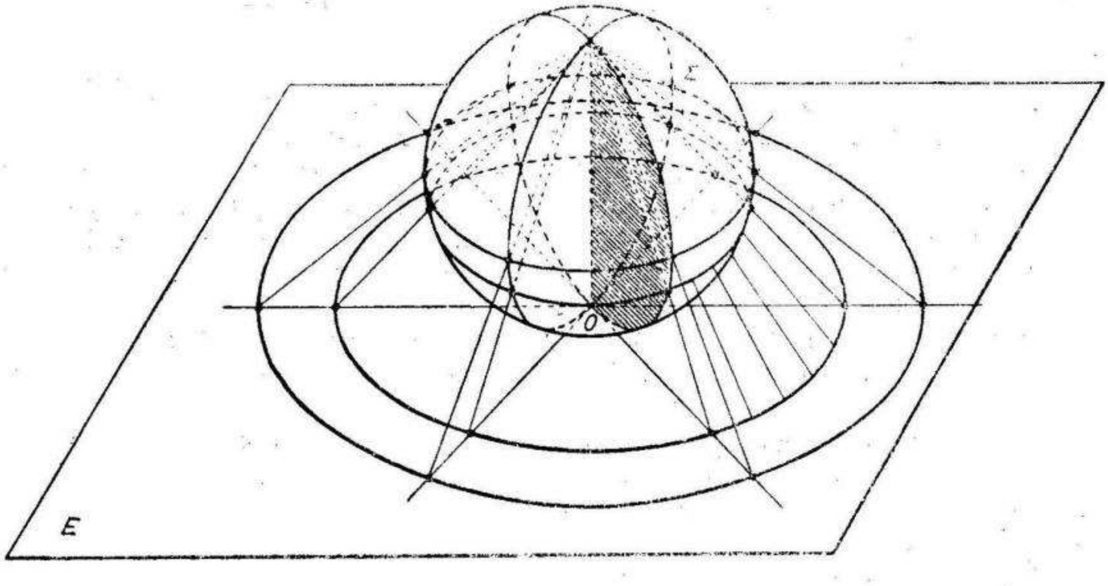
Л. И. ВОЛКОВЫСКИЙ

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

§ 1.

1. Определение стереографической проекции. Пусть E — плоскость и Σ — сфера, касающаяся E в точке O. Обозначая через N точку на Σ, диаметрально противоположную точке O, поставим в соответствие каждой точке P на Σ, отличной от N, точку P′ на E, лежащую с P на одном и том же луче, выходящем из N. Такое отображение сферы Σ на плоскость E называется *стереографической проекцией;* точка N называется *полюсом проекции* и плоскость E *плоскостью проекции.*[1]

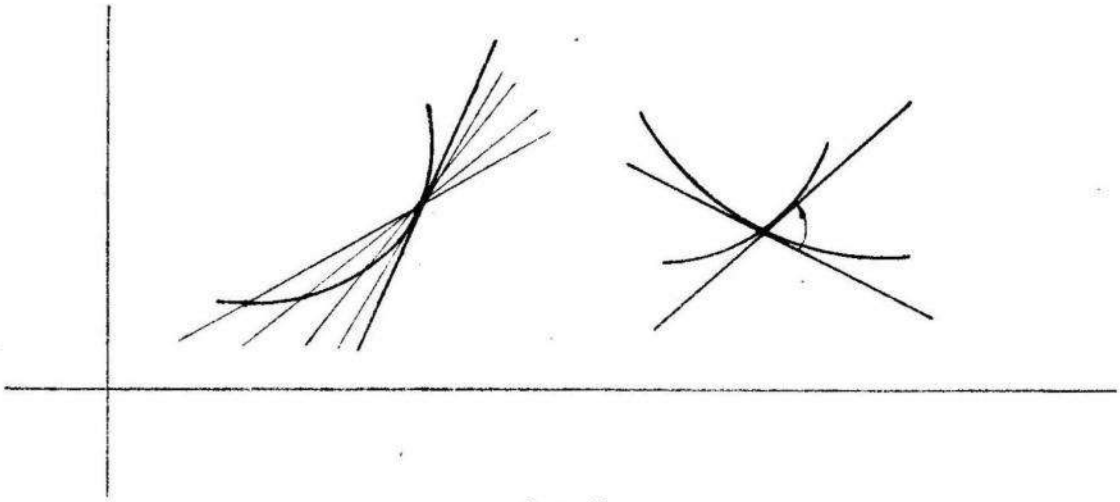


Фиг. 1.

Отметим следующие очевидные свойства стереографической проекции:

[1] Более широко под стереографической проекцией понимается отображение сферы Σ с помощью лучей, выходящих из точки N на произвольную плоскость, параллельную плоскости, касательной к Σ в N. Так, например, в проекции Меркатора (см. ниже, § 2, п. 1) берут плоскость, проходящую через центр сферы Σ. Стереографическую проекцию относят еще к древнегреческому астроному Гиппарху (160—125 гг. до н. э).

1) Между точками сферы Σ с выключенным полюсом N и точками плоскости E устанавливается взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Последнее означает, что при неограниченном приближении точек P_1, P_2, ..., на Σ к точке P, отличной от N, соответствующие точки P'_1, P'_2, ..., на E неограниченно приближаются к точке P', соответствующей P и наоборот.



Фиг. 2.

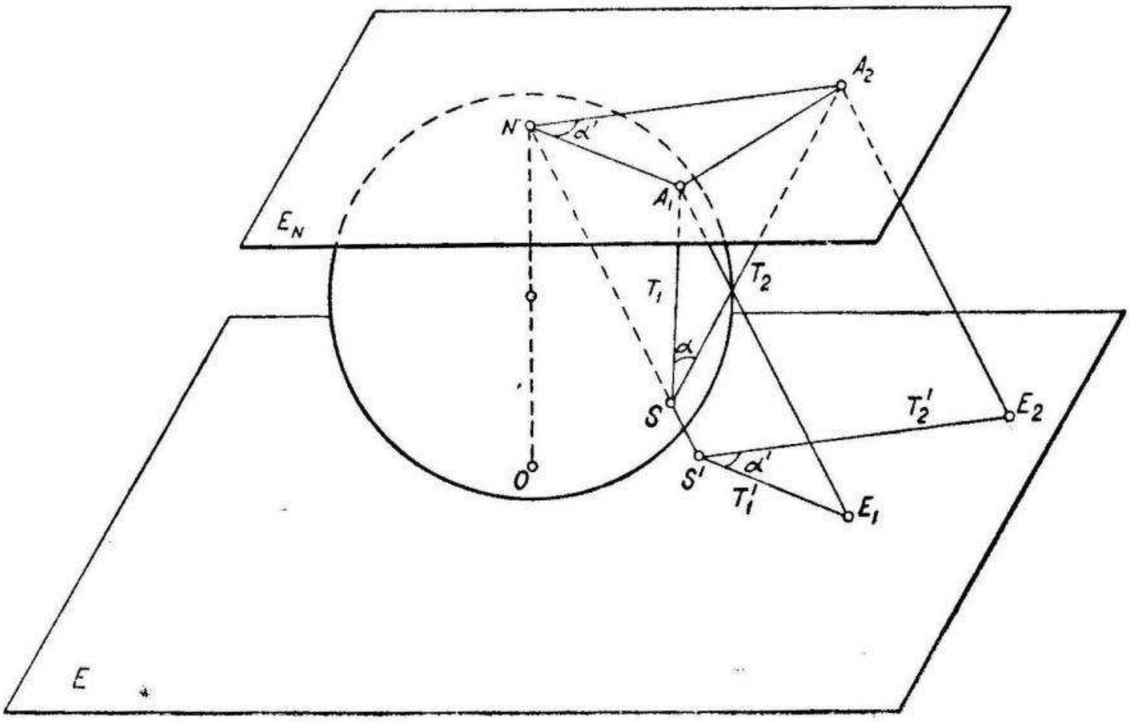
2) Географические круги широты на Σ переходят в концентрические окружности с центром в точке O, а меридианы — в лучи, выходящие из точки O (фиг. 1).

3) Окружности на Σ, проходящие через полюс N, переходят в прямые на E и обратно, каждой прямой на E соответствует на Σ окружность, проходящая через полюс N. В самом деле, плоскость окружности γ на Σ проходящей через N, пересекает плоскость E по прямой γ' являющейся стереографическим образом окружности γ; плоскость же, проходящая через данную прямую γ' на E и полюс N пересекает Σ по окружности γ, проходящей через N и стереографически соответствующей γ'.

2. Сохранение углов при стереографической проекции. Как известно, касательная к кривой в некоторой ее точке определяется как предельное положение секущей, проходящей через данную точку и точку кривой, неограниченно приближающуюся к данной точке. Угол же между двумя пересекающимися кривыми определяется как угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения (фиг. 2).

Пусть Γ — кривая на сфере Σ, M — фиксированная ее точка, M_1 — переменная ее точка, приближающаяся к M и пусть Γ', M' и M'_1 — стереографические их образы на плоскости E. Секущей кривой Γ, определяемой точками M, M_1, поставим в соответствие на плоскости секущую кривой Γ', определяемую точками M', M'_1. Так как точки M' и M'_1 лежат на лучах, выходящих из полюса N и проходящих соответственно через точки M и M_1, то обе секущие MM_1 и $M'M'_1$ лежат в одной и той же плоскости, проходящей через N, поэтому и предельные положения этих секущих, т. е. касательные, пусть T и T', к кривым Γ и Γ' в точках M и M' соответственно также лежат в одной плоскости, проходящей через N, и, следовательно, T' является стереографическим образом T. Отсюда следует, что *касательная к кривой Γ′ на плоскости E, являющейся стереографическим образом кривой Γ на сфере Σ, совпадает со стереографическим образом на E касательной к Γ.*

Пусть теперь Γ_1 и Γ_2 две кривые на Σ, пересекающиеся в точке S; T_1 и T_2 — касательные к Γ_1 и Γ_2 в S и α — величина угла между T_1 и T_2.



Фиг. 3.

Соответствующие величины в плоскости E обозначим соответственно через Γ'_1, Γ'_2, S', T'_1, T'_2 и α'.

Обозначим еще через E_1 и E_2 плоскости, проходящие через полюс N и соответственно через касательные T_1 и T_2. По предыдущему эти плоскости проходят соответственно и через касательные T'_1 и T'_2, поэтому угол α' между T'_1 и T'_2 совпадает с пересечением плоскости E с двугранным углом между плоскостями E_1 и E_2, содержащем угол α между T_1 и T_2.

Обозначая через E_N плоскость, касательную к сфере Σ в N, мы замечаем, что в пересечении E_N с тем же двугранным углом E_1 и E_2 образуется угол с вершиной N, также равный α'. С другой стороны, легко видеть, что полученный при полюсе N угол равен α. В самом деле, это следует из равенства (по трем сторонам) треугольников A_1NA_2 и A_1SA_2, где A_1 и A_2 точки пересечения T_1 и T_2 соответственно со сторонами угла с вершиной в N, рассматриваемого в плоскости E_N (фиг. 3).

Таким образом $\alpha' = \alpha$ и, следовательно, углы между кривыми Γ_1, Γ_2 и их стериографическими образами Γ'_1, Γ'_2 — равны.

Итак, мы доказали, что *при стереографической проекции углы сохраняются.*

3. Бесконечная удаленная точка плоскости. В стереографической проекции полюсу N не соответствует никакая точка плоскости E. Это и понятно, так как при неограниченном приближении точек сферы к N соответствующие точки на плоскости E неограниченно удаляются от точки O. Отсутствие на плоскости точки, соответствующей полюсу N, не позволяет говорить о стереографической проекции всей сферы без исключения на плоскость E, равно как не позволяет говорить о сохранении углов при стереографической проекции, если эти углы имеют вершины в N.

Эти и подобные пробелы стереографической проекции были бы устранены, если бы плоскость E была дополнена еще одной точкой, которая естественным образом могла бы быть поставлена в соответствие полюсу. Для этого новая «идеальная» точка, которую мы хотим присоединить к плоскости E, должна определяться точками этой плоскости, неограниченно удаляющимися от ее начала O, подобно тому, как прообразы[1] этих точек на сфере Σ неограниченно приближаются к полюсу N. В соответствии с этим мы будем говорить, что точки плоскости E, неограниченно удаляющиеся от ее начала O, определяют одну единственную, дополнительную точку для плоскости E, называемую *бесконечно удаленной точкой плоскости* E.[2] Бесконечно удаленную точку плоскости E мы и будем считать стереографическим образом полюса N.

С введением бесконечно удаленной точки соответствие между Σ и E становится взаимно однозначным и непрерывным всюду. При этом непрерывность отображения в бесконечно удаленной точке плоскости E означает лишь то, что неограниченно удаляющимся точкам плоскости O соответствуют точки на Σ, неограниченно приближающиеся к полюсу N. Таким образом, неограниченное удаление точек на E означает их «приближение» к бесконечно удаленной точке.

Определим теперь понятие угла между прямыми в бесконечно удаленной точке. Для этого рассмотрим произвольный угол α в плоскости E с вершиной s и сторонами l_1, l_2. Углу α на сфере Σ соответствует двуугольник, ограниченный соответствующими l_1 и l_2 дугами окружностей γ_1 и γ_2, соединяющими точку S — прообраз s на Σ с полюсом N. Углы этого двуугольника при S и N очевидно равны и так как, по доказанному выше, углы при S и s, как стереографически соответствующие друг другу, равны, то угол при S, а значит и угол при N, оба равны α. Но последний угол соответствует углу между l и l_2 в бесконечности, поэтому естественно считать что величина плоского угла между l_1 и l_2 в бесконечно удаленной вершине также равна α. Другими словами, *всякие две пересекающиеся прямые в конечной точке их пересечения и в ∞ образуют равные по величине углы.*

В соответствии с этим определением угла в ∞ мы скажем, что две плоские кривые γ_1 и γ_2, уходящие в ∞ встречаются там под углом α, если прообразы Γ_1 и Γ_2 этих прямых на сфере встречаются в полюсе N под углом α, т. е. имеют там касательные, пересекающиеся

---

[1] Если точке P сферы Σ соответствует точка P′ плоскости E, то P называется *прообразом* P′ на сфере.

[2] Указанное дополнение плоскости одной только точной в ∞ не является единственно возможным расширением плоскости. Так, например, в проективной геометрии плоскость дополняется не бесконечно удаленной точкой, а бесконечно удаленной прямой (см. любой учебник по высшей или проективной геометрии).

под углом α. Тогда, понятно, свойство стереографической проекции сохранять углы, доказанное выше для случая, когда точка пересечения кривых на Σ, отлична от полюса N, остается справедливым и для случая пересечения кривых в полюсе.

4. Сохранение окружностей при стереографической проекции. Расширенная дополнением бесконечно удаленной точкой плоскость E приобрела ряд новых качеств и потеряла ряд прежних качеств.

Одним из новых качеств является приобретение плоскостью E свойства замкнутости. Это свойство выражается в том, что для всякой бесконечной последовательности точек расширенной плоскости существует по крайней мере одна предельная точка, конечная или бесконечно удаленная, т. е. точка, в сколь угодно малой окрестности которой имеется бесконечно много точек последовательности.[1] В случае последовательности точек расположенной в ограниченной части плоскости это предложение составляет так называемый принцип Больцано—Вейерштрасса.[2] Если же последовательность не ограничена, то для нее бесконечно удаленная точка всегда является предельной.

Из потерянных свойств отметим следующее: если раньше через всякие две точки можно было провести только одну прямую, то теперь в случае, когда одна из двух точек есть бесконечно удаленная точка, число таких прямых бесконечно велико. Однако сохраняется свойство плоскости, что через всякие три ее точки проходит одна и только одна окружность, если условиться прямые рассматривать как окружности бесконечно большого радиуса.

Аналогичное предложение справедливо для сферы, именно, что через всякие три ее точки можно провести одну и только одну окружность. В связи с этим особый интерес приобретает следующее важное свойство стереографической проекции: *при стереографической проекции окружности на сфере переходят в окружности и прямые на плоскости: в прямые, если окружности на сфере проходят через полюс и в окружности, если они через полюс не проходят.*

Соответствие между окружностями на сфере Σ проходящими через ее полюс N, и прямыми на плоскости E было установлено еще выше (§ 1, свойство (3)). Поэтому для доказательства указанного свойства стереографической проекции нам достаточно рассмотреть случай, когда окружности на Σ не проходят через N.

Пусть γ такая окружность на Σ, отличная от большой окружности, S — вершина конуса, огибаемого касательными плоскостями к Σ в точках окружности γ, P — произвольная точка на γ и S′, P′ — стереографические образы точек S и P на плоскости проекции. Обозначим еще через M' и M, точки пересечения прямой, проходящей через S и P с плоскостью E и параллельной ей плоскостью E_N, касающейся Σ

---

[1] Под сколь угодно малой окрестностью произвольной точки P плоскости E понимается совокупность всех точек этой плоскости, лежащих внутри круга сколь угодно малого радиуса с центром в точке P. Для бесконечно удаленной точки «сколь угодно малая окрестность» определяется как совокупность точек расширенной плоскости E, лежащих *вне* круга сколь угодно большого радиуса с центром в точке O.

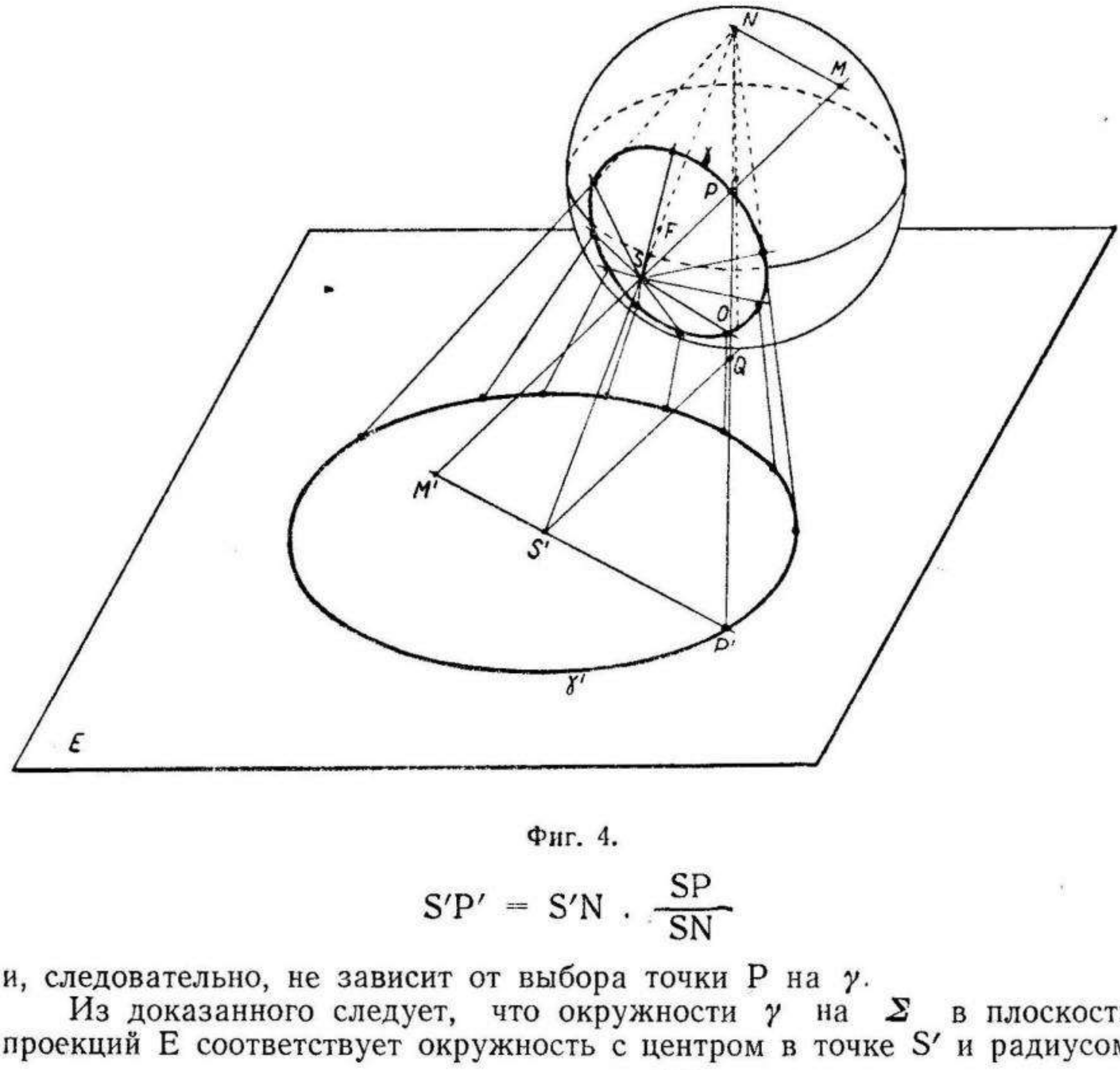
[2] Больцано (1781—1899) — известный чешский математик; Вейерштрасс (1815—1897) — знаменитый немецкий математик. С принципом Больцано—Вейерштрасса можно ознакомиться по любому учебнику математического анализа.

в полюсе N. Покажем, что расстояние S′, P′ не зависит от выбора точки P на γ (теорема Шаля).[1]

Для этого в плоскости, определяемой лучами SP и SN, проведем из точки S′ прямую, параллельную SP, до встречи в точке Q с прямой P′P (фиг. 4). Из рассмотрения подобных треугольников S′NQ и SNP следует, что

$$S'Q = S'N \cdot \frac{SP}{SN}.$$

Далее, так как MN=MP (касательные к Σ) и MN параллельна M′P′, то M′P′=M′P, поэтому S′Q=S′P′ и из предыдущего следует, что



Фиг. 4.

$$S'P' = S'N \cdot \frac{SP}{SN}$$

и, следовательно, не зависит от выбора точки P на γ.

Из доказанного следует, что окружности γ на Σ в плоскости проекций E соответствует окружность с центром в точке S′ и радиусом

$$R_\gamma = S'N \cdot \frac{SR}{SN}.$$

Если теперь γ — большая окружность на Σ, то, рассматривая ее как предельное положение параллельных ей рассмотренных выше окружностей при $S \to \infty$, заключаем, что

[1] Шаль (1793—1880) — известный французский математик. Другое доказательство см. в книге Четверухина — Введение в высшую геометрию (1936 г.) или в книге Гильберта и Кон-Фоссена — Наглядная геометрия (1936 г.).

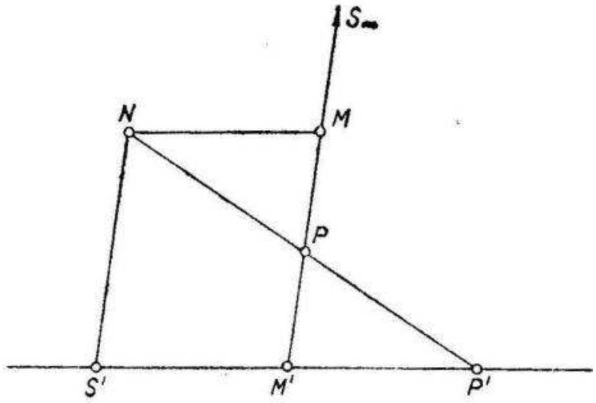
$$\lim_{S \to \infty} \frac{SP}{SN} = 1$$

и, следовательно, в этом случае

$$R_{\gamma'} = S'N,$$

что, впрочем, легко доказывается и непосредственно (фиг. 5).

Примечание. Подчеркнем, что теорема Шаля не только доказывает, что окружность γ на сфере Σ переходит в окружность γ' на плоскости E, но указывает одновременно простой геометрический способ нахождения центра окружности γ', именно, согласно этой теореме центр окружности γ' совпадает с точкой S' — образом вершины S рассмотренного выше конуса, касающего Σ вдоль γ.



Фиг. 5.

Пользуясь теоремой Шаля, читатель легко найдет окружность на Σ, соответствующую данной окружности на плоскости E.

5. Упражнения. В заключение § 1 приведем несколько упражнений.

1) Исследовать расположение на сфере Σ окружностей, которым на плоскости E соответствуют параллельные прямые.

2) Найти условия, при которых две точки плоскости E являются образами двух диаметрально противоположных точек на Σ.

3) Для двух данных точек на E (не исключая и бесконечно удаленной точки) построить окружность, «сферически равноудаленную» от этих точек, т. е. приобретающую такую равноудаленность при переходе от E к Σ.

4) Исследовать геометрические особенности преобразования плоскости E, соответствующего преобразованию вращения сферы Σ.

Примечание. Решение последних задач упрощается при исследовании комплексной плоскости (см., например, Форд, Автоморфные функции, 1936). Интересно, однако, дать элементарное чисто геометрическое решение указанных задач.

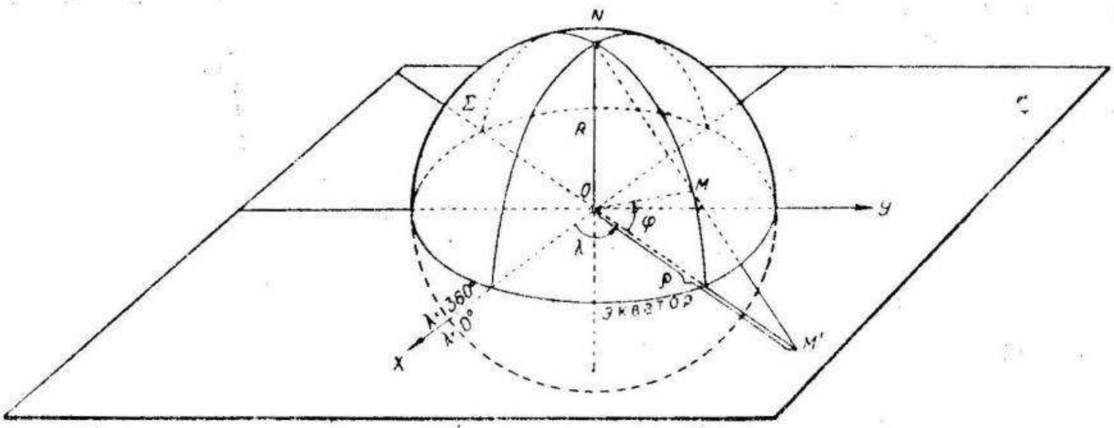
§ 2.

1. Проекция Меркатора.[1] Проекция Меркатора, называемая также равноугольной цилиндрической проекцией, приводящая к особенно удобным для целей мореплавания картам, представляет отображение поверхности шара на вертикальную полосу шириной 2π,

[1] Герхард Кремер или Меркатор (1512—1594) — известный голландский картограф. Придуманная им в 1569 проекция, названная затем его именем, представляет один из видов равноугольных проекций (проекций сохраняющих углы, а следовательно, и подобие в малом). Проекцию Меркатора можно рассматривать как предельный случай равноугольной конической проекции, принадлежащей Ламберту (1728—1777). Относительно этих и других картографических проекций см. любой учебник математической картографии.

при котором круги широты переходят в горизонтальные сечения полосы, а меридианы — в перпендикулярные к ним прямые. Нулевому меридиану соответствуют обе граничные прямые полосы. Полюсам сферы (Земли) соответствуют бесконечно удаленные точки полосы. Наконец, что особенно важно, отображение строится так, чтобы оно было равноугольным или конформным, т. е. обладало свойством сохранения углов.

Чтобы получить проекцию Меркатора строится сперва стереографическое отображение сферы на плоскость E, проходящую через центр сферы (фиг. 6). Затем проводится разрез по нулевому меридиану сферы и его образу на плоскости проекций E, после чего строится указанное выше конформное отображение на полосу шириной 2π для плоскости E с разрезом.



Фиг. 6.

Если λ и φ долгота и широта точки M на сфере Σ радиуса R, то соответствующая точка M' на E имеет полярные координаты ϱ и λ, где ϱ определяется из соотношения

$$\varrho = R\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \tag{1}$$

которое читатель легко докажет сам. Полагая

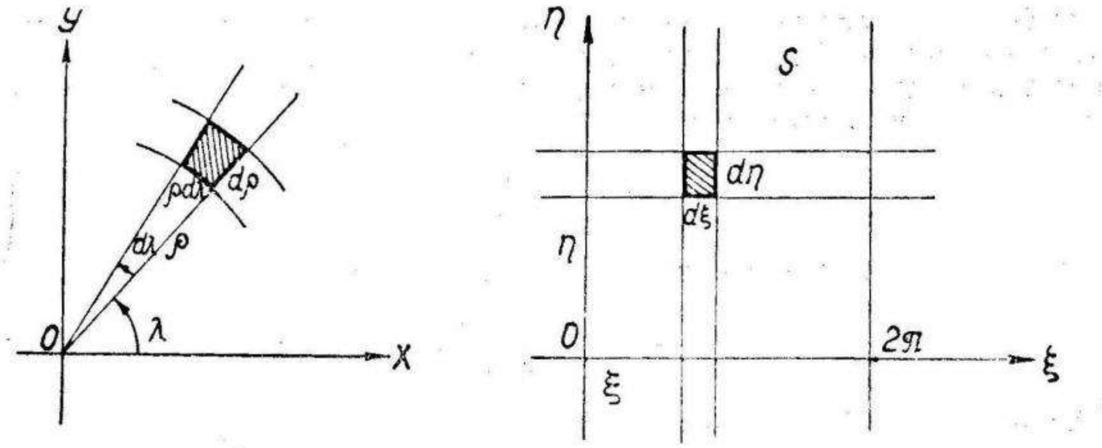
$$\xi = \lambda,\ \eta = f(\varrho), \tag{2}$$

где $f(\varphi)$ пока неизвестная функция, мы получим отображение плоскости E с разрезом по положительной полуоси (образ нулевого меридиана) на полосу S: $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$, расположенную в плоскости (ξ, η), причем окружности $x^2 + y^2 = \varrho^2$ и лучи, выходящие из начала, переходят в горизонтальные, соответственно вертикальные сечения S. Остается подобрать функцию $f(\varrho)$ так, чтобы выполнялось требование конформности. Так как сохранение углов в целом влечет за собой подобие в малом (т. е. бесконечно малый треугольник переходит в подобный бесконечно малый треугольник) и обратно, из подобия в малом следует сохранение углов, то нам достаточно подобрать функцию $f(\varrho)$ так, чтобы бесконечно малому прямоугольнику на плоскости E соответствовал подобный бесконечно малый прямоугольник на S. В силу (2) бесконечно малому прямоугольнику E, взятому в полярной системе координат (ϱ, λ), соответствует бесконечно малый прямоугольник на S в прямоугольной системе координат (ξ, η). Из подобия этих прямоугольников (см. фиг. 7) следует, что

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\varrho}{\varrho d\lambda}$$

и, так как очевидно

$$d\xi = d\lambda \quad \text{и} \quad d\eta = f'(\varrho)\, d\varrho,$$



Фиг. 7.

то для определения неизвестной функции $f(\varrho)$ получаем уравнение

$$f'(\varrho) = \frac{1}{\varrho},$$

откуда, интегрируя, получаем

$$f(\varrho) = \ln \varrho + C.$$

Постоянную C подбираем так, чтобы экватору $(\varrho = R)$ соответствовало горизонтальное сечение S, расположенное на оси абсцисс, следовательно, чтобы $f(R) = 0$, что дает $C = -\ln R$. Тогда $f(\varrho) = \ln\frac{\varrho}{R}$ и, возвращаясь к сфере, имеем для проекций Меркатора соотношение

$$\xi = \lambda, \ \eta = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{2}$$

2. Л о к с о д р о м а. Под локсодромой понимают линию на поверхности Земли, которая со всеми пересекающими ее меридианами образует один и тот же угол. В мореплавании этот угол называется курсом корабля; следовательно, пока корабль не меняет курса, он идет по локсодроме. Так как на карте Меркатора — обозначим снова ее через S — меридианы изображаются параллельными вертикальными прямыми и отображение на S — конформно, то образ локсодромы на карте Меркатора есть прямая, образующая с вертикалью тот же угол $\varkappa$, что локсодрома с меридианами.

Одна из задач по мореплаванию состоит в следующем: требуется определить, во-первых, курс $\varkappa$, по которому должен двигаться корабль, чтобы попасть из точки $M_1(\lambda_1, \varphi_1)$ в точку $M_2(\lambda_2, \varphi_2)$ и, во-вторых, расстояние s по локсодроме между M_1 и M_2.

Решение. Если (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) соответствующие M_1 и M_2 точки на карте Меркатора, то

$$\operatorname{tg} \varkappa = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{R} \frac{1}{\ln \dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi_1}{2}\right)}}. \tag{4}$$

Рассматривая бесконечно малый прямоугольный треугольник, образуемый элементарной дугой для локсодромы с кругом широты, проходящим через один конец ds, и меридианом, проходящим через другой ее конец, легко убеждаемся, что

$$ds = \frac{R\, d\varphi}{\cos \varkappa},$$

откуда вся длина s локсодромы от M_1 до M_2 равна

$$s = \frac{R\,(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varkappa}. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) решают задачу.

ЛИТЕРАТУРА ПО КАРТОГРАФИИ

1. Граур. Математическая картография, Учпедгиз, 1938.
2. Ющенко. Картография, 1941.
3. Лиодт. Картоведение, 1948
4. Каравайский. Математическая картография, 1946.