И. Ф. ТЕСЛЕНКО

ОБ ИНВЕРСИИ

§ 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНВЕРСИИ И ОСНОВНЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

Инверсией относительно данной окружности K *с центром в точке* O *и радиусом* R *называется такое точечное преобразование плоскости, при котором всякой точке* A, *отличной от* O, *ставится в соответствие точка* A_1 *так, что, во-первых, обе точки* A *и* A_1 *расположены на одном и том же луче, выходящем из точки* O, *и, во-вторых, расстояния* OA *и* OA_1 *связаны соотношением:*

$$OA \cdot OA_1 = R^2.$$

Точки A *и* A_1 *называются взаимообратными или инверсными относительно окружности* K, *называемой окружностью инверсии; величина* R^2 *называется степенью инверсии; точка* O — *центром или полюсом инверсии.*

Из определения инверсии непосредственно вытекают следующие ее свойства:

1. Свойство симметрии: если точка A преобразуется в точку A_1, то A_1 преобразуется в A.

2. Точки, лежащие внутри окружности инверсии, преобразуются в точки, расположенные вне окружности инверсии и наоборот. Исключение составляет полюс инверсии, не имеющий инверсной к нему точки, расположенной на конечном расстоянии.[1]

3. Точки, лежащие на окружности инверсии, преобразуются сами в себя.

Примечание. Если на прямой OA взять точку A_2 (фиг. 1), симметричную A_1, относительно центра симметрии O, то абсолютная величина произведения $OA \cdot OA_2$ равна произведению $OA \cdot OA_1 = R^2$, но так как точки A и A_2 расположены по разные стороны от полюса O, то произведению при $OA \cdot OA_2$ приписывают отрицательный знак, т. е. $OA \cdot OA_2 = -R^2$.

---

[1] Из (1) видно, что если $OA \to 0$, то $OA_1 \to \infty$, следовательно, если точка A приближается к точке O — полюсу инверсии, то инверсная точка A_1 удаляется в бесконечность. Поэтому представляется естественным распространить преобразование инверсии и на ее полюс, отнеся к этому полюсу в качестве инверсной точки бесконечно удаленную точку плоскости. О введении бесконечно удаленной точки для плоскости см. в этом сборнике статью Л. И. Волковыского «Стереографическая проекция» (§ 1, п. 3).

Очевидно, если фигуры F и F_1 взаимно инверсны относительно полюса инверсии O при степени инверсии R^2, то фигура F_2, симметричная фигуре F_1 относительно центра симметрии O, и инверсна фигуре F относительно полюса инверсии O при степени инверсии $-R^2$.

Решим теперь следующую задачу: Построить точку A_1, инверсную к данной точке A относительно данной окружности K.

Если точка A лежит вне K, то проводим из нее две касательные к K (фиг. 1) и через точки их касания B и C с окружностью проводим прямую BC. Точка пересечения BC с лучом OA есть искомая точка A_1. В самом деле, из прямоугольного тр-ка OBA имеем $OA \cdot OA_1 = R^2$.

Если же точка A лежит внутри K, то восстанавливаем из нее перпендикуляр к лучу OA и проводим касательную к окружности инверсии в одной из ее точек пересечения с этим перпендикуляром. Точка пересечения этой касательной с лучом OA есть искомая точка A_1.

Рассмотрим теперь, как преобразуются при инверсии окружности и прямые.

Прежде всего, ясно, что прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется сама в себя.

Покажем, что прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии (фиг. 2). Для этого из центра инверсии O опустим перпендикуляр OA на прямую l и построим точку A_1, инверсную A. Пусть также точка B_1 инверсная точке B прямой l. Тогда $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$ и тр-к OAB подобен тр-ку OA_1B_1, откуда вытекает, что $\angle OB_1A_1 = 90°$. Следовательно, точка B_1 лежит на окружности диаметра OA_1, которая и соответствует прямой l.

Построение окружности, инверсной данной прямой, можно выполнить, как показано ниже.

Предположим, что даны полюс инверсии O, степень инверсии R^2 и прямая l, не проходящая через полюс инверсии.

Рассмотрим два случая:

а) R меньше расстояния от полюса инверсии O до данной прямой l, т. е. $R < OB$ (фиг. 3) и, следовательно, $R > OB_1$, ибо $OB \cdot OB_1 = R^2$. Опускаем из полюса O перпендикуляр OB на l, строим полуокружность на диаметре OB и проводим хорду $OP = R$. Перпендикуляр, опущенный из точки P на диаметр OB, дает точку B_1, инверсную B. На диаметре OB_1 строим окружность O_1, инверсную l.

б) R больше расстояния от полюса инверсии O до данной прямой l, т. е. $R > OB$ (фиг. 4), и, следовательно, $R < OB_1$. Опускаем из полюса инверсии O перпендикуляр OB на прямую l. Затем строим на прямой l такую точку P, чтобы $OP = R$, и при точке P — $\angle OPB_1 = 90°$; находим точку B_1, инверсную точке B ($OB \cdot OB_1 = R^2$). Окружность, построенная на диаметре OB_1 и есть искомая окружность, инверсная прямой l при данной инверсии R^2.

Заметим, что точки дуги QB_1P являются отображениями точек хорды QP; точки дуги QO являются отображениями точек луча QM (от точки Q вверх до бесконечно удаленной точки луча QM); точки дуги PO являются отображениями точек луча PN (от точки P вниз до бесконечно удаленной точки луча PN); точки P и Q преобразуются сами в себя, а точка O отображает бесконечно удаленную точку прямой l.

Из предыдущего следует: 1) При удалении прямой l от центра инверсии обратная ей фигура — окружность уменьшается и обращается в точку O, когда прямая l — бесконечно удаленная прямая.

2) Если l касается окружности инверсии, то и инверсная ей окружность внутренне касается окружности инверсии.

3) При приближении прямой l к полюсу инверсии O, инверсная ей окружность O_1 увеличивается и сливается с прямой l, когда последняя проходит через центр инверсии O.

Убедимся дальше, что окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую (фиг. 4а).

Действительно, пусть точка A будет центром данной окружности, проходящей через полюс O, а точки A_1 и B_1 инверсны A и B. Два треугольника OAB и OA_1B_1 подобны, а так как $OA=AB$, то $OB_1=A_1B_1$. Точка B_1 равноудалена от неподвижных точек O и A_1. Следовательно, геометрическим местом точек B_1, инверсных точке B, будет прямая l, проходящая через середину OA_1 и перпендикулярная к ней.

П р и м е ч а н и е. Если A, A_1 и B, B_1 две пары взаимно инверсных точек, то имеем соотношение $OA:OA_1=OB:OB_1$, откуда следует, что тр-ки OAB и OA_1B_1, а также тр-ки OA_1B и OAB_1 между собой попарно подобны, т. е.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB_1}{OA_1} \quad \text{и} \quad \frac{OB}{OA_1} = \frac{OA}{OB_1}.$$

Нетрудно видеть, что A, B и A_1, B_1 являются также двумя парами взаимно инверсных точек относительно полюса O_1 (фиг. 5), лежащим на пересечении прямых AB и A_1B_1, и образуют тр-ки O_1AA_1 и O_1BB_1, O_1BA_1 и O_1B_1A, также между собой попарно подобные.

Заметим, что отрезки A_1B и AB_1, пересекаясь в точке O_2, определяют третий полюс для тех же двух пар взаимно инверсных точек A_1, B и A, B_1 с отрицательной степенью инверсии.

Из подобия рассмотренных тр-ков следует, что

$$\angle 1 = \angle 2; \ \angle 3 = \angle 2; \ \angle 4 = \angle 6; \ \angle 5 = \angle 7;$$

$$\angle 6 + \angle 7 = \angle 8 + \angle 2 = 2d.$$

Две пары пересекающихся прямых AB и A_1B_1, AA_1 и BB_1 (фиг. 5), образующие при пересечении равные углы $\angle 1 = \angle 2$, называются парами *антипараллельных* прямых, одна пара относительно другой.

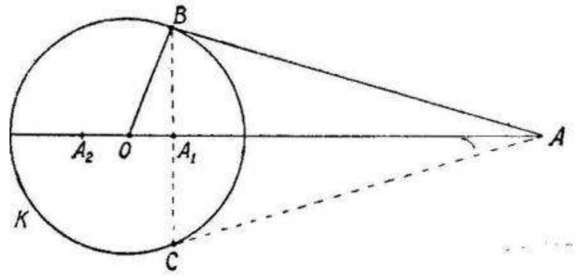
Если пара антипараллельных прямых AB и A_1B_1 пересекает стороны $\angle A_1OB_1$, то имеем (фиг. 6) $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = 2d$ и

$$\frac{OA}{OB_1} = \frac{OB}{OA_1}.$$

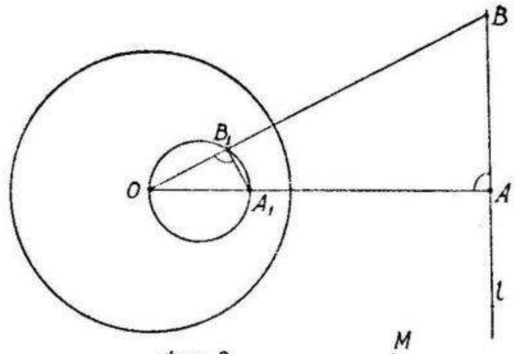
Таким образом, пара антипараллельных прямых, пересекая стороны угла, отсекает от них обратно пропорциональные отрезки (OA, OB, OA_1, OB_1), а четыре точки пересечения (A, B, A_1, B_1) лежат на одной окружности (конциклические точки).

Если антипараллельные прямые AB и A_1B_1 (фиг. 7), пересекая стороны $\angle AOB$, образуют пары равных углов: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, а, следовательно, и пары равных отрезков $OA=OB$ и $OA_1=OB_1$, то антипараллельные прямые AB и A_1B_1 параллельны между собою, т. е. отрезки OA, OB, OA_1 и OB_1 прямо и обратно пропорциональны.

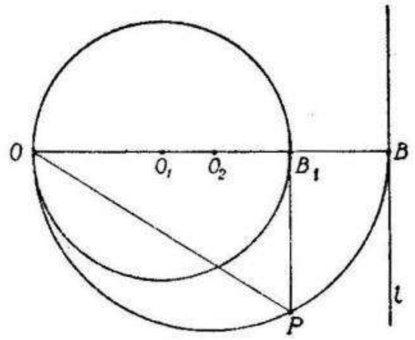
В таком особенном случае две параллельные прямые AB и A_1B_1,



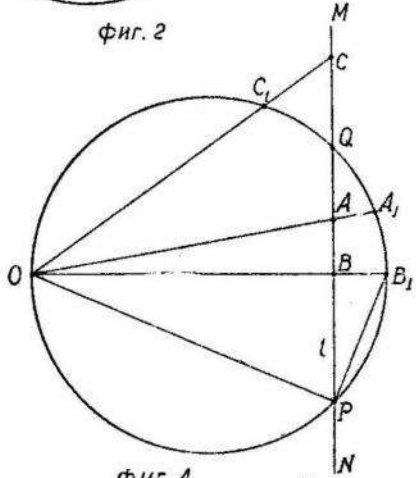
Фиг. 1



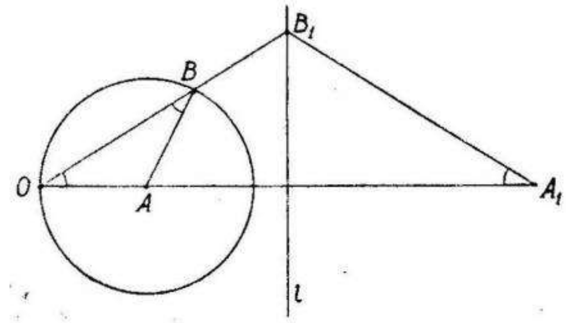
Фиг. 2



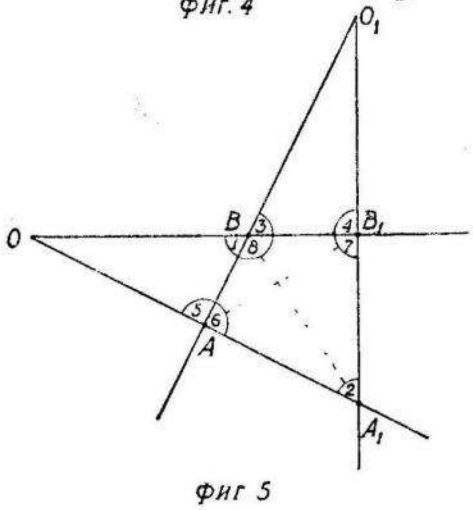
Фиг. 3



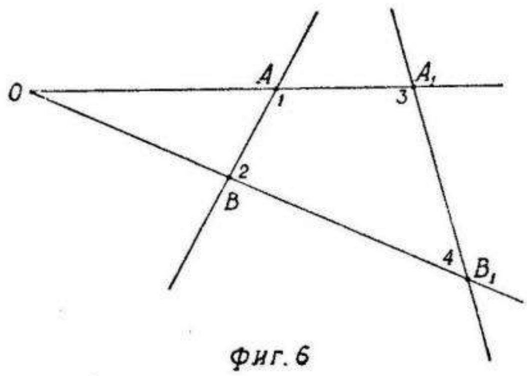
Фиг. 4



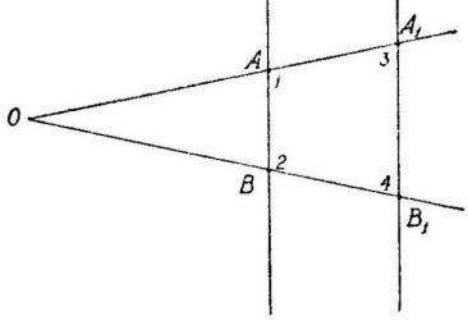
Фиг. 4 а



Фиг 5



Фиг. 6



Фиг. 7

пересекая стороны $\angle AOB$, дают конциклические точки (A, B, A_1, B_1); в общем случае пара параллельных прямых этого свойства не имеет.[1]

Докажем теперь, что окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность.

Пусть дана окружность с диаметром AB и центр инверсии O. Построим точки A_1 и B_1, инверсные концам диаметра AB, проходящего через центр инверсии O (фиг. 8). Возьмем произвольную точку C данной окружности и построим ей инверсную C_1. Тогда CA — антипараллельна C_1A_1, следовательно, $\angle CAB = \angle A_1C_1Д$; CB антипараллельна C_1B_1, следовательно $\angle OC_1B_1 = \angle OBC$, но $\angle CAB + OBC = 90$, т. к. $\angle ACB = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр.

Следовательно, $\angle OC_1B_1 + \angle A_1C_1Д = 90°$; но тогда и угол им смежный $\angle B_1C_1A_1$ должен быть прямым. Таким образом, точка C_1 лежит на окружности с диаметром A_1B_1.

Заметим, что центры O_1 и O_2 не являются инверсными точками потому, что если $OM \cdot OM_1 = R^2$, то $OO_1OO_2 \neq R^2$, ибо $OO_1 > RM$ и $OO_2 > RM_1$ как гипотенузы прямоугольных тр-ков OMO_1 и OM_1O_2 (см. также ниже задачу № 5).

Следствие: центр инверсии O можно рассматривать как центр подобия окружностей O_1 и O_2; при этом инверсные точки не являются соответствующими друг другу в подобии.

Решим задачу на построение.

Даны: окружность O_1, лежащая вне окружности инверсии, центр инверсии O и степень R^2; построить O_2, инверсную O_1.

Решение. Найдем точки A_1 и B_1 (фиг. 9), инверсные соответственно точкам A и B, строим окружность на диаметре A_1B_1. Построенная окружность O_2 инверсна O_1.

Читателю рекомендуем рассмотреть остальные случаи задачи, именно: а) окружность O_1 касается окружности инверсии; б) окружность O_1 лежит внутри окружности инверсии, но не концентрична с ней; в) окружность O_1 и инверсионная — концентричны.

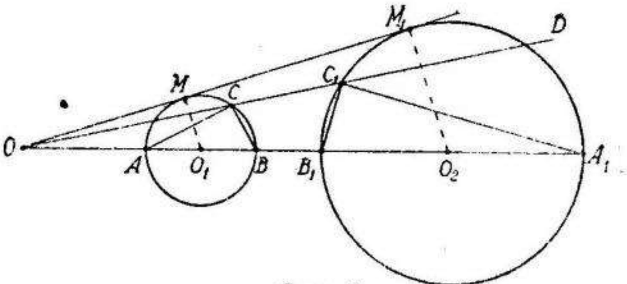
Рассмотренные свойства инверсии позволяют утверждать, что: а) окружность и прямая всегда инверсны друг другу, б) совокупность прямых и окружностей преобразуется инверсией в совокупность прямых и окружностей.

Наконец, докажем, что преобразование инверсии сохраняет углы.

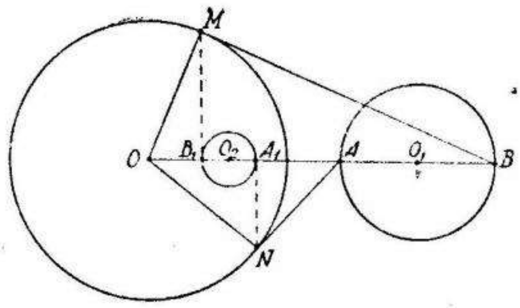
Лемма. Касательные в соответственных (инверсных) точках к двум инверсным кривым образуют равные углы с лучом, соединяющим эти точки с центром инверсии.

Берем взаимоинверсные точки A и A_1 (фиг. 10), B и B_1 двух взаимоинверсных фигур F и F_1. Прямые AB и A_1B_1 антипараллельны, а потому $\angle OAB = \angle OB_1A_1$. Если луч OB_1 вращать вокруг центра O против часовой стрелки и приближать к совпадению точки B с A и B_1 с A_1, то хорды AB и A_1B_1, оставаясь все время антипараллельными, будут вращаться в противоположных направлениях и приближаться к совпадению с касательными ST и S_1T_1. В предельном положении будем иметь:

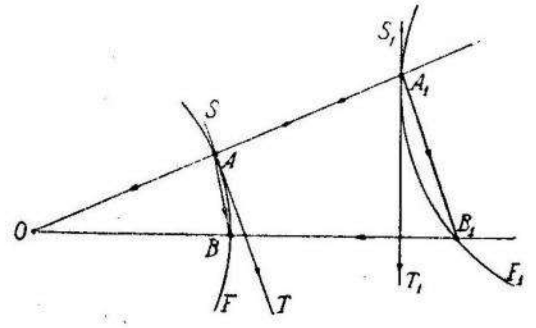
[1] Укажем на три построения прямой, антипараллельной стороне AC в данном тр-ке ABC: 1) при произвольной точке $Д$ стороны AB строим $\angle ВДЕ = \angle АСБ$; прямая $ДЕ$ антипараллель со стороной AC; 2) через вершины A и C проводим произвольную окружность O, пересекающую стороны AB и BC, соответственно в точках $Д$ и $Е$. Хорда $ДЕ$-антипараллель со стороной AC; 3) касательная $ДЕ$ в вершине B тр-ка ABC к окружности O, описанной около тр-ка ABC-антипараллель со стороной AC этого тр-ка ABC. При этом касательная $ДЕ$ — предельное положение секущей.



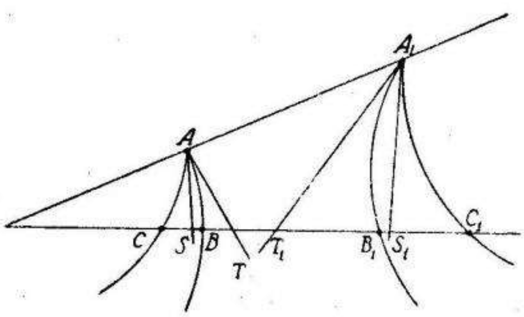
Фиг. 8



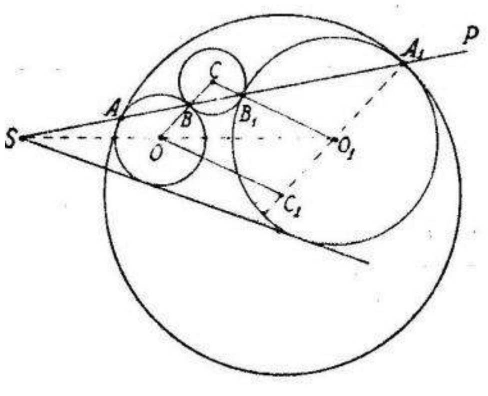
Фиг. 9



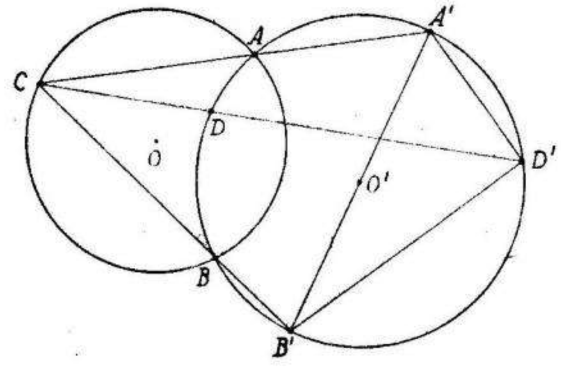
Фиг 10



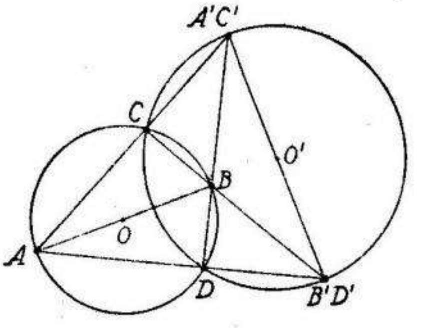
Фиг. 11



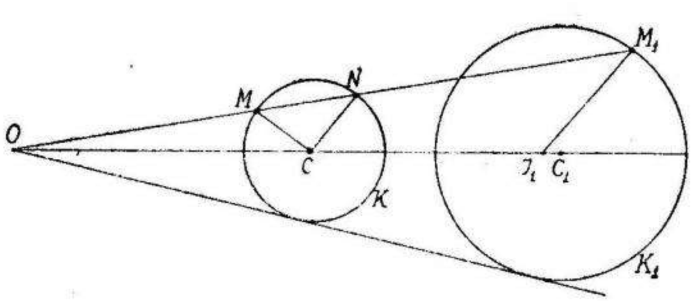
Фиг 12



Фиг. 13



Фиг. 14



Фиг. 15

$$\angle OAT = \angle OA_1S_1 \quad \text{и} \quad \angle TAA_1 = \angle T_1A_1A.$$

Докажем теперь, что преобразование инверсии сохраняет углы (фиг. 11). Пусть пары линий AB и A_1B_1, AC и A_1C_1 взаимно инверсны и пары точек A и A_1, B_1 и B, C и C_1 — взаимно инверсны.

Проведя в точках A и A_1 касательные к линиям AB и AC, A_1B_1 и A_1C_1, на основании леммы имеем: $\angle SAA_1 = \angle S_1A_1A$ и $\angle TAA_1 = \angle T_1A_1A$. Вычтя по частям второе равенство из первого, получим:

$$\angle SAA_1 - \angle TAA_1 = \angle S_1A_1A - \angle T_1A_1A, \quad \text{т. е.} \ \angle SAT = \angle S_1A_1T_1.$$

Если $\angle SAT$ образован вращением луча AS около вершины A, а $\angle S_2A_1T_1$ — вращением луча A_1S_1 около вершины A_1, то замечаем, что направления вращений отрезков при образовании равных углов $\angle SAT$ и $\angle S_1A_1T_1$ противоположны (против движения часовой стрелки и по движению часовой стрелки). Таким образом, преобразование инверсии сохраняет углы по величине, но меняет их по направлению.

Следствие. Вторичное преобразование одной из фигур при помощи инверсии дало бы не только равенство соответственных углов, но и одинаковое направление вращения соответственных сторон при их образовании, т. е. четное число инверсии двух кривых не меняет угла их пересечения; нечетное же число инверсий двух кривых меняет только знак этого угла.

§ 2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВЕРСИИ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Свойствами инверсии пользуются при решении многих геометрических задач на построение. Сюда относятся задачи о проведении окружностей, касательных к данным прямым и окружностям, а также окружностей, пересекающих данные прямые или окружности под данными углами. Сюда же относятся задачи о треугольниках, стороны которых суть дуги окружности.

В дальнейшем нам придется пользоваться понятиями ортогональности и изогональности окружностей.

Две окружности, пересекающиеся под прямым углом, называются ортогональными друг другу.

Окружность, пересекающая две данные окружности под равными углами, называется по отношению к ним изогональною.

Из этих определений следует, что

1) если окружность O_1 ортогональна окружности инверсии, то $OA \cdot OB = R^2 = OC^2$, т. е. точка A инверсна точке B и наоборот; следовательно, окружность O_1 инверсна сама себе.

2) Окружность, касательная одновременно к двум данным окружностям, изогональна по отношению к ним, так как образует с каждой из них угол, равный $0°$.

Задача 1. Построить окружности, ортогональные данной окружности O.

Решение. Всякая окружность, проходящая через две инверсные относительно O точки, пересекает окружность O под прямым углом. Радиусы построенных окружностей равны длинам касательных, проведенных из центров окружностей к окружности O.

Задача 2. Даны две окружности O и O_1; построить касательные к ним окружности.

Решение: построим внешний центр подобия S и секущую SP (фиг. 12), которая пересекает окружность O в точках A и B и окружность O_1 в точках A_1 и B_1. Точка S является одновременно и центром инверсии со степенью инверсии $R^2 = SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$. Произвольная окружность, проходящая через две взаимно инверсные точки будет решением поставленной задачи. Для определения ее центра продолжим радиусы OB и O_1B_1 до пересечения в точке C. Полученный таким образом тр-к CBB_1 будет равнобедренным, т. к. $\angle OAB = \angle OBA = \angle O_1A_1B_1 = \angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Если принять точку C за центр, а $CB = CB_1$ за радиус, то получим окружность, внешним образом касающуюся к данным двум O и O_1. Наименьшей из всех окружностей, касающихся данных окружностей O и O_1 внешним образом, т. е. проходящих через пары инверсных точек (типа B и B_1), является окружность с центром на линии центров OO_1. Совершенно так же убедимся, что и точка C_1, в которой пересекаются продолжения радиусов OA и O_1A_1 другой пары инверсных точек, является центром окружности, касающейся данных окружностей в точках A и A_1. Заметим еще, что в обоих случаях окружности C и C_1 будут касаться обеих данных окружностей одинаковым образом: окружность C внешним, а окружность C_1 внутренним.

Случай, когда S будет внутренним центром подобия двух окружностей O и O_1 рекомендуем рассмотреть читателю. Укажем только, что в этом случае построенные окружности касаются данных неодинаковым образом.

Предлагаем читателю показать, что если изогональная окружность проходит через две взаимно инверсные точки двух окружностей, то она инверсна сама себе.

Задача 3. Даны две ортогональные окружности (фиг. 13) O и O_1, пересекающиеся в точках A и B. Возьмем произвольные точки C на O и Д на O_1. Доказать, что окружности АСД и ВСД ортогональны.

Решение. Пусть точка C есть полюс инверсии, квадрат касательной, проведенной из C к окружности O_1 — степень инверсии. Тогда окружность O_1 преобразуется сама в себя, а окружности O, АСД, БСД, как проходящие через полюс инверсии, преобразуются в прямые А′Б′, А′Д′, В′Д′, причем точки А′, В′, Д′ инверсны соответственно точкам A, B, Д. И так как окружность O ортогональна окружности O_1, то прямая A′B′ пересечет O_1 под прямым углом, т. е. пройдет через ее центр. Легко видеть, что А′Д′ и В′Д′ взаимно перпендикулярны, следовательно, им инверсные окружности АСД и ВСД ортогональны.

Задача 4. Даны две ортогональных окружности (фиг. 14) O и O_1 с взаимно перпендикулярными диаметрами AB и A′B′. Показать, что четыре прямые, соединяющие точки A, B, A′, B′ проходят попарно через две постоянные точки.

Решение. Пусть точка A есть полюс инверсии, квадрат касательной, проведенной из A к O_1 — степень инверсии. Тогда окружность O_1 преобразуется сама в себя, а окружность O в прямую С′Д′, ортогональную к окружности O_1, следовательно, проходящую через ее центр. А так как С′Д′ должна быть перпендикулярна к AB, то она сливается с A′B′. Отсюда следует, что AA′ и BB′ проходят через точку C, а A′B и AB′ — через точку Д. Если принять за полюс точку B, то прийдем к тем же результатам.

Задача 5. Доказать, что центры O_1 и O_2 двух взаимно инверсных окружностей не являются инверсными точками.

Решение. Действительно, пусть даны две взаимно инверсные окружности K и K_1 и их центр инверсии O и пусть луч OM пересекает окружность K в точках M и N, а окружность K_1 в точке M_1. Тогда $OM \cdot ON = P$, где P степень точки O относительно окружности K (фиг. 15), а $OM \cdot OM_1 = R^2$, где R^2 степень инверсии. Разделив одно из этих равенств на другое, получим: $\frac{OM_1}{ON} = \frac{R^2}{P} = \mathrm{const}$, а это показывает, что точки M и N гомотетичные с центром гомотетии в точке O и коэфициентом гомотетии $\frac{R^2}{P}$. Известно, что коэфициент гомотетии двух окружностей с радиусами R_1 и R_0 равен $\frac{R_1}{R_0}$, отсюда $\frac{R_1}{R_0} = \frac{R^2}{P}$ или $R_1 = \frac{R^2}{P} R_0$. Если же C и C_1 центры этих окружностей, то $\frac{OC_1}{OC} = \frac{R^2}{P}$ или $OC_1 = \frac{R^2}{P} \cdot OC$.

Пусть точка J_1, отличная от C_1, инверсна центру C, тогда на основании вышеизложенного $OJ_1 = \frac{R^2}{OC}$.

С другой стороны, $OC_1 = \frac{R^2}{P} OC$. А для того, чтобы точки C и C_1 были инверсными, необходимо, чтобы точки J_1 и C_1 слились, т. е. $OJ_1 = OC_1$ или $\frac{R^2}{OC} = \frac{R^3}{P} \cdot OC$, откуда $P = OC^2$. Но P есть степень точки O относительно окружности K, которая всегда равна $OC^2 - R_0^2$, тогда $P = OC^2 = OC^2 - R_0^2$, откуда $R_0^2 = O$. Следовательно, точки J_1 и C_1 сливаются только в том случае, когда радиус R_0 окружности K равен нулю.

В справедливости доказанного можно было бы убедиться и так: если точки J_1 и C взаимно инверсны, то тр-к OMC $\sim$ тр-ку OJ_1M_1, откуда $\frac{OC}{MC} = \frac{OM_1}{J_1M_1}$ или $\frac{M_1O}{J_1M_1} = \frac{OC}{MC} = \frac{OC}{R} = \cos t$. А это показывает, что отношение расстояний точки M_1 от точек O и J_1 есть величина постоянная. Тогда геометрическим местом точки M_1 будет окружность K_1 (окружность Аполлония).

Задача 6. Дана окружность O и две точки A и B (фиг. 16). Проведем секущую BCD. Прямые AD и AC пересекают окружность O в точках E и F. Найти геометрическое место центров окружностей AEF.

Решение. Преобразуем нашу фигуру инверсно, взяв за полюс точку A, а квадрат касательной, проведенной из A к O — за степень инверсии. Окружность O преобразуется сама в себя, точки E и F соответственно в точки C и D, а окружность AEF инвертируется в прямую CD. Так как прямая CD проходит через неподвижную точку B, то инверсная ей окружность AEF также проходит через неподвижную точку B′, инверсную точке B.

Таким образом, окружности AEF проходят через две постоянные точки; следовательно, геометрическим местом их центров будет прямая, перпендикулярная к середине отрезка AB'.

Задача 7. Даны: точка S и две прямые AB и BC. Провести секущую $S \times Y$ так, чтобы $Sx \cdot Sy = R^2$ (фиг. 17).

Решение. Примем S за центр, а R^2 за степень инверсии. Преобразовав инверсно точку X мы совместим ее с точкой Y, следовательно, искомая точка Y лежит на пересечении BA с кривой, инверсной прямой BC с центром в S и степенью инверсии R^2. Поэтому проведем $SL \perp BC$ радиусом $SN=R$, засечем прямую BC в точке N и проведем $MN \perp SN$ до пересечения с SL в M. Окружность, описанная на диаметре MS пересечет AB в искомых точках Y.

Задача 8. Даны: угол BCD и внутри него точка A. Провести через эту точку прямую так, чтобы отрезки AM и AN этой прямой, встречающей стороны CB и CD данного угла в точках M и N удовлетворяли уравнению $AM \cdot AN = R^2$.

Задача 9. Даны две окружности O и O_1 и точка A. Провести через A прямую так, чтобы отрезки AM и AN этой прямой, встречающей окружность O в точках M и M_1, а окружность O_1 в N и N_1 удовлетворяли уравнению $AM \cdot AN = R^2$.

Задача 10. Даны точка A, прямая BC и окружность O, проходящая через точку A. Провести через A прямую так, чтобы отрезки AM и AN этой прямой, встречающей окружность O и прямую BC в точках M и N, удовлетворяли уравнению: $AM \cdot AN = R^2$. Указание: предельный случай задачи 8.

Задача 11. Даны две окружности O и O_1, пересекающиеся в точке A. Через эту точку провести прямую так, чтобы хорды AM и AN, отсекаемые на этой прямой окружностями O и O_1, удовлетворяли уравнению $AM \cdot AN = R^2$. Указание: тоже частный случай задачи 8.

Задача 12. Даны две окружности O и O_1 и точка A. Через данную точку A провести окружность, касательную к двум данным.

Решение. Приняв A за центр инверсии, степень инверсии выберем так, чтобы одна из окружностей O или O_1 была сама себе инверсной. Для этого степень инверсии примем равной квадрату длины касательной AT, где T точка касания. Тогда линия, инверсная искомой окружности, представляет собою общую касательную к окружностям O' и O'_1, инверсным данным окружностям O и O_1.

Задача 13. Провести окружность, проходящую через данную точку A и пересекающую данные окружности O и O_1 под данными углами α и β.

Решение. Точку A возьмем за центр инверсии, степень выберем произвольно. Тогда данные окружности преобразуются в новые окружности, а искомая окружность преобразуется в прямую, которая пересекает две новые окружности под известными углами α и β. Но угол между прямой и окружностью определяет длину хорды их пересечения. Поэтому задача приводится к такой: даны две окружности O' и O'_1, расположенные одна вне другой. Провести секущую так, чтобы части ее внутри окружностей (хорды) равнялись данным отрезкам. (Если отрезки меньше диаметров, то будет четыре решения). Преобразовав, таким образом, построенную секущую с помощью инверсии, получим искомую окружность.

Задача 14. Провести через данную точку A окружность, касательную к данной окружности O и пересекающуюся с другой данной окружностью O_1 под данным углом α. Указание: частный случай задачи 12.

Задача 15. Провести окружность, проходящую через данную точку А и пересекающую две данные прямые l и n под данными улами α и β. Указание: тоже частный случай задачи 12.

Задача 16. Задача Паппа — Александрийского математика Зв. Даны две окружности О и O_1, имеющие внутреннее касание, и две окружности С и C_1, касающиеся основных и между собой. Обозначим через r и r_1 радиусы окружностей С и C_1, а через Р и P_1 — расстояния их центров от линии центров основных. Доказать, что

$$\frac{P_1}{r_1} = \frac{P}{r} + 2.$$

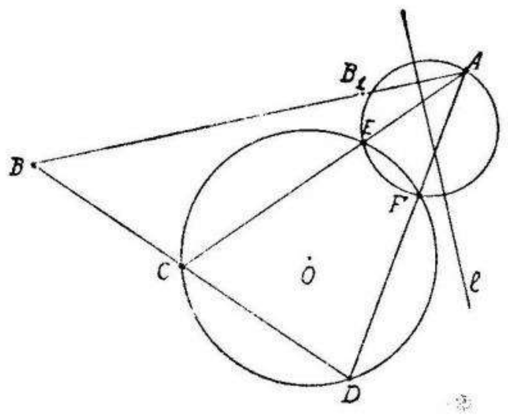
Решение (рис. 18). Примем за центр инверсии точку М, т. е. точку касания основных окружностей. Степень возьмем произвольно. Тогда окружности О и O_1 преобразуются в прямые l и l_1, перпендикулярные к линии центров OO_1, а окружности С и C_1 — в круги C' и C', касающиеся между собой и прямых l и l_1. Радиусы окружностей C' и C'_1 будут равны между собой и пусть равны R. Тогда $C'_1B = C'B + 2R$ или $\frac{C_1'B}{R} - \frac{C'B}{R} = 2$. Из подобия треугольников MBC' и MAC имеем $\frac{C'B}{CA} = \frac{MC'}{MC}$. Но точка М является внешним центром подобия окружностей С и C', поэтому $MC':MC = R:r$. Поэтому предыдущая пропорция дает $\frac{C'B}{R} = \frac{P}{r}$ или $\frac{C'B}{R} = \frac{P}{r}$ (ибо $CA = P$). Аналогично для окружностей C_1 и C'_1 имеем $\frac{C'_1B}{R} = \frac{P_1}{r_1}$, где $P_1 = C_1A_1$. Подставив, получим решение задачи.

Задача 17. Определить место источника звука по результатам измерения времени, проведенного в трех заданных на плоскости точках.

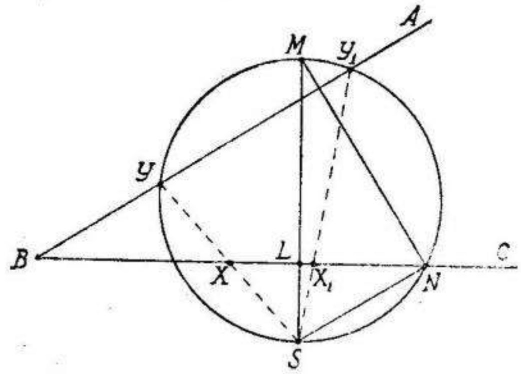
Решение (рис. 19). Пусть A_0, A_1 и A_2 будут тремя точками подслушивания, причем A_0 — точка, куда звук проходит раньше, чем в другие. Разности времен прихода звука в точки A_1 и A_2 по сравнению с A_0 обозначим через a_1 и a_2. Построим окружности в A_1 — радиусом a_1, а в A_2 — радиусом a_2. Точку A_0 примем за центр инверсии. В целях графического упрощения пусть окружность инверсии касается окружности A_1. Преобразовав инверсно окружности A_1 и A_2, получим окружности A'_1 и A'_2. Общая касательная t окружностей A'_1 и A'_2 преобразуется в окружность A_3 с центром в искомом источнике. Окружность A_3 легко построить по трем точкам T_1, A_0, T_2.

Задача 18. Построить окружность К, касающуюся данной окружности О, проходящую через данные две точки А и В и лежащие вне окружности О (рис. 20).

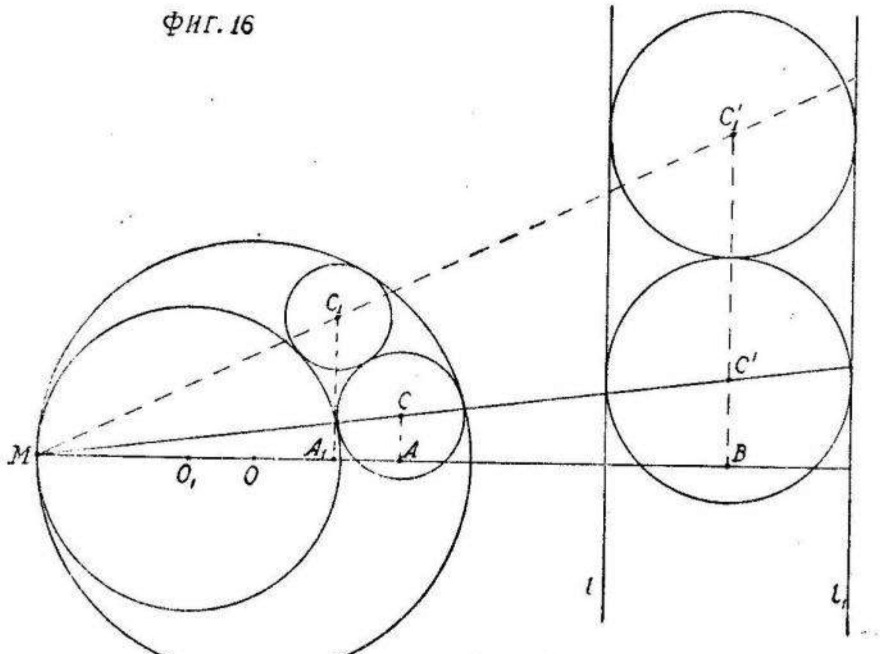
Решение. Точку А примем за центр инверсии, квадрат касательной, проведенной из А к окружности О — за степень инверсии. Искомая окружность преобразуется в прямую $B_1M_1 \perp AB$ и касательную к окружности О. Для построения касательной проводим окружность через Р, P_2 и В. Тогда B_1 инверсна В, а касательная B_1M_1 к окружности О инверсна искомой окружности К. Прямая AM_1 в пересечении с О дает точку касания М.



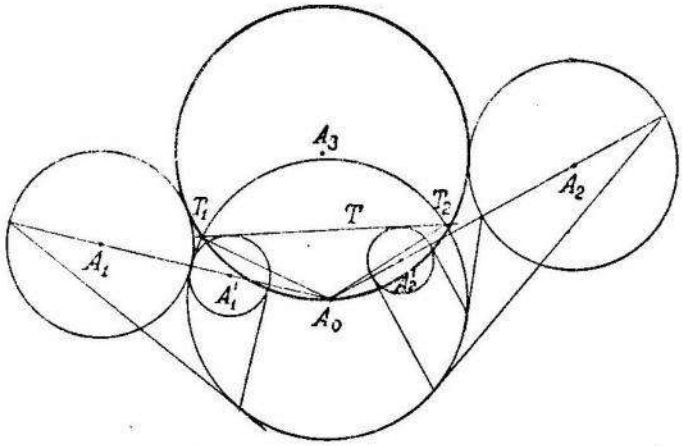
Фиг. 16



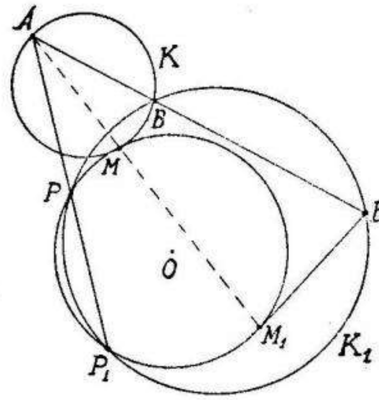
Фиг. 17



Фиг. 18



Фиг. 19



Фиг. 20

Задача 19. Построить окружность K, проходящую через данные две точки A и B и ортогональную к данной окружности O. Указание. Искомая окружность инверсна секущей, проходящей через B′, инверсную B, и центр окружности O.

Задача 20. Построить окружность K, проходящую через две данные точки A и B и пересекающую данную окружность O под данным углом α (рис. 21).

Указание. Строим B_1, инверсную B и секущую $B_1P_1Q_1$ окружности O. Окружность K_1 является геометрическим местом середин хорд, образующих с O угол α. Искомую окружность, инверсную секущей B_1PQ, легко построить по четырем точкам A, B, P, Q.

Задача 21. Дана окружность и в ней проведенные три хорды DA, DB, DC. На каждой хорде, как на диаметре, построены окружности. Доказать, что вторые точки пересечения этих трех окружностей лежат на одной прямой.

Указание. Взять точку D за центр инверсии и произвольную степень. Преобразовать все окружности в прямые, которые образуют $\triangle$ с вершинами, инверсными вторым точкам пересечения окружностей. Окружность, описанная около полученного $\triangle$, пройдет через полюс и будет инверсной искомой прямой.

Задача 22. (автор А. С. Смогоржевский). Даны три точки A, B, C. Построить две окружности равного радиуса так, чтобы одна из них проходила через точку A, другая — через B, и которые касались бы друг друга в точке C.

Решение. Пусть $AC > BC$. Строим на AC точку D так, чтобы $\angle CBD = \angle CAB$ и находим середину E отрезка BD. Прямая CE будет общей внутренней касательной искомых окружностей. Действительно, инверсия с центром в C радиуса CB преобразует A и D (так как $AC:CB = CB:CD$), а искомые окружности — в параллельные прямые проходящие одна через B, вторая через D (причем, точка C равноудалена от этих прямых, поэтому прямая CE им параллельна).

Задача 23. (автор А. С. Смогоржевский). Даны две окружности K и K_1, имеющие внутреннее касание в точке M. Провести хорду большей окружности, касающуюся меньшей и видимую из центра меньшей окружности, под данным углом α.

Решение. Пусть O и O_1 центры данных окружностей K и K_1, а радиусы их r и r_1, и искомая хорда AB касается окружности O_1 в точке C. Преобразуем данную фигуру инверсно относительно окружности K_1; тогда окружность K преобразуется в окружность K, радиуса $\frac{rr_1}{2r - r_1}$ которая касается данных в точке M, прямая AB — в окружность K_3 с диаметром CO_1, (радиуса $1/2\ r_1$), прямые AO_1 и BO_1 — сами в себя, точки A, B в точки A′, B′ пересечения окружностей K_2 и K_3; причем, A′ лежит на AO_1, B′ лежит на BO_1. Затем строим окружность K_4 радиуса $1/2 r_1$ и вписываем в нее угол $PQR = AO_1B$, через точки P и R проводим окружность K_5 радиуса $\frac{r_1r}{2r - r_1}$ так, чтобы точка Q лежала внутри и строим окружность K_6 радиуса r_1 так, чтобы она касалась K_4 и K_5 внутренним образом. Преобразовав эту конфигурацию инверсно относительно K_6, получим искомую конфигурацию.

Задача 24. Даны три окружности O, O_1 и O_2, две из них касаются друг друга в точке A и не имеют общих точек с третьей. Построить окружность, касающуюся к трем данным.

Указание. Взяв A за центр инверсии, а степень произвольно, преобразуем три данные окружности. Задача сведется к построению окружности, касательной к двум параллельным прямым и к окружности.

Последняя задача представляет собой частный случай известной задачи Аполлония (Александрийский математик конца 3-го и начала 2-го века до н. э.). Интересующихся решением этой задачи, а также приложением метода инверсии к решению задач, отошлем к книге И. Александрова «Геометрические задачи на построение и методы их решения». (Издание Учпедгиз, 1938 г.). Изложение теории инверсии и решение задачи Аполлония можно найти в книге Н. Ф. Четверухина «Методы геометрических построений» (изд. Учпедгиз, 1938 г.), а также Н. Д. Перепелкина «Курс элементарной геометрии», ч. 1 (огиз Гостехиздат, 1948 г.). Краткое изложение преобразования инверсии, ее связи с другими преобразованиями элементарной геометрии, а также решение задач на построение одним циркулем читатель найдет в книге А. С. Смогоржевского «Методика розв'язування задач на побудову» (видання Радшкола, Київ, 1940 р.).

§ 3

МЕХАНИЗМЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАТНЫХ ФИГУР

Преобразование инверсии в пределах одной плоскости приводит к изящному решению проблемы направляющего механизма или «прямила», которая является чрезвычайно элементарной и принадлежит к кругу вопросов техники. Механизм, осуществляющий построение обратных фигур, носит название инверсора.

Рассмотрим геометрическую природу некоторых инверсоров в таком виде, как они вышли из рук своих изобретателей.

Инверсор Поселье (изобретен в 1864 году) представляет систему шести стержней, скрепленных вместе шарнирами, из которых два имеют длину (рис. 22) $OL=OK=A$ и соединяются в неподвижной точке O, остальные же четыре $PL=LQ=QK=KP$ образуют ромб, две противоположные вершины которого соединяются с концами стержней a. Инверсор имеет две степени свободы: во-первых, оба стержня a можно произвольно приближать один к другому или раздвигать, а во-вторых, оба их можно произвольно вращать как целое вокруг O. При каждом таком движении три точки O, P, Q всегда остаются на одной прямой. В самом деле, OP является биссектрисой угла LOK, PQ — биссектрисой угла LPK. Пусть M есть точка пересечения диагоналей ромба. Тогда $LM=MK$ и OM, как медиана равнобедренного $\triangle LOK$ одновременно является его биссектрисой, т. е. сливается с OP. Таким образом, точки O, P, M, а, следовательно, и точка Q лежат на одной прямой. В точке O находится остреё, а в точках P и Q карандаши. Если O закрепить, а P двигать по некоторой кривой, то Q опишет фигуру, инверсную кривой. Действительно, $OQ \cdot OP=(OM+MQ)(OM-MQ)=OM^2-MQ^2=(LO^2+LM^2)-(QL^2-LM^2)=a^2-b^2=\text{const}$.

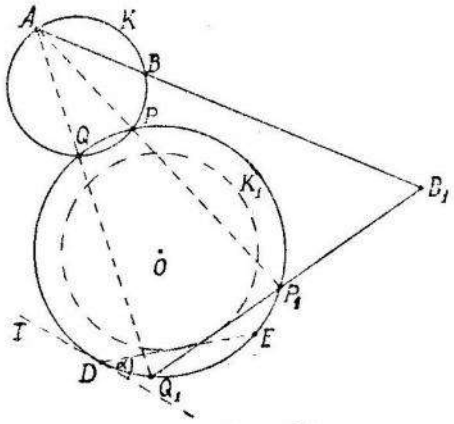
Следовательно, произведение $OQ \cdot OP$ есть величина постоянная, не зависящая от положения механизма. Постоянная a^2-b^2 называется степенью инверсии и так как разность эта положительна, то можно обозначить ее через r^2; тогда из равенства $OQ \cdot OP=r^2$ следует, что Q и P взаимно инверсны. Для получения движения точки P по окружности присоединим к ней еще седьмой стержень PS, второй конец которого закрепляется посередине между O и начальным положением точки P или, как в нашем случае, $OS=SP=m$; тогда остается только одна степень свободы и Q будет передвигаться по прямой. Следует заметить, что точка Q не может описывать всю неограниченную прямую; свобода ее движений ограничена тем, что расстояние ее от O всегда меньше $a+b$.

Прямая, описываемая точкой Q, всегда перпендикулярна к OS. Это следует из того, что ортогональная проекция точки Q на прямую OS для любых положений механизма фиксирована, т. е. длина отрезка ON есть величина постоянная. В самом деле, $\triangle OPD \sim \triangle ONQ$; тогда $OD \cdot OP = OQ \cdot ON$, или $ON = (OQ \cdot OP) : OD = r^2 : 2m = \text{const}$. Это дает возможность использовать инверсор как насос. Если стержни $OL=OK=a$ сделать меньше b, то получим инверсор, изображенный на фигуре 23. Именно, если в точке O находится остреё, а в точках P и Q карандаши, то точка P описывает фигуру, инверсную фигуре, описываемой точкой Q.

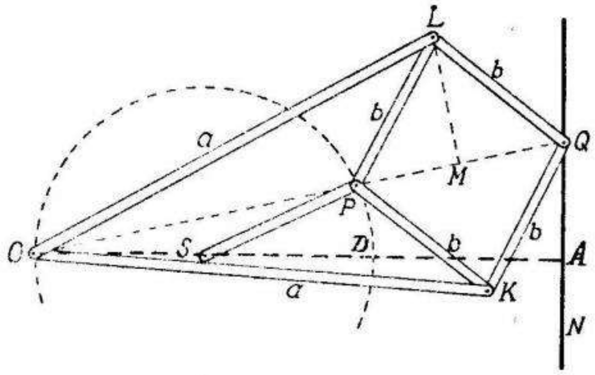
Такое преобразование носит название эллиптической инверсии. Степень эллиптической инверсии есть число отрицательное: $OQ \cdot OP = a^2 - b^2 = -r^2$. Эллиптический инверсор может иметь и форму патографа (рис. 24).

Инверсор Л. Липкина (изобретен в 1868 г.). Независимо от Поселье русский ученый Липкий изобрел замечательный механизм для точного преобразования прямолинейного движения в круговое. Размышления над геометрической теорией механизмов П. Л. Чебышева привели его к точному решению этой задачи. Сохраняя стиль этих размышлений дадим описание инверсора.

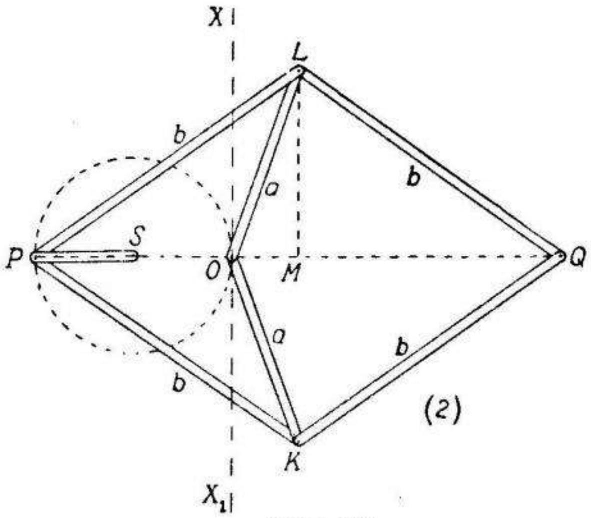
Возьмем три точки A, B, C на некоторой прямой (рис. 25) и соединим их шарнирными рычагами с произвольными точками D и d, равноудаленными от точек A и B. Полученная комбинация стержней обладает важнейшим свойством, заключающимся в том, что как бы мы ни изменяли взаимное расстояние между точками A и B, они будут оставаться на одной прямой. В случае $AD=BD=Ad=Bd$ четырехугольник ABDd — параллелограмм и указанное свойство легко выводится из уравнения $DC^2-DA^2=dC^2-dA^2$. Если же при некотором положении нашей комбинации стержней проведем прямую $ab \parallel AB$, пересекающую прямые Ad, Bd, Cd в точках a, b и c, то ясно, что при $ad=bd$ точки a, b и c будут расположены также на одной прямой. Следующее свойство этой комбинации стержней состоит в том, что при каждом возможном взаимном расположении точек A и B остается справедливым такое равенство: $CA \cdot CB = DC^2 - DA^2 = dC^2 - dA^2$. А так как стержни DC и DA заданы, то это произведение расстояний точек A и B от точки C остается без изменения. В этом легко убедиться на основании нижеследующего. Построим окружность радиуса DA—DB с центром в D; тогда прямая CBA будет секущей и по известной теореме из планиметрии имеем $CA \cdot CB = CT^2 = DC^2 - DT^2 = DC^2 - DA^2$, где T точка касания прямой CT с окружностью. Соединив A и B с T, получим два подобных треугольника CTA и CBT, ибо $\angle TCA = \angle BCT$ и $\angle CTB = \angle CAT$ отсюда следует $CA:CT=CT:CB$ или $CA \cdot CB = CT^2$. Если закрепить точку C (или c), а точку B (или b) заставить описывать некоторую кривую, то точка A (или a) опишет инверсную кривую относительно полюса C (или c). Инверсной кривой для некоторой окружности, проходящей через полюс, будет прямая, перпендикуляр-



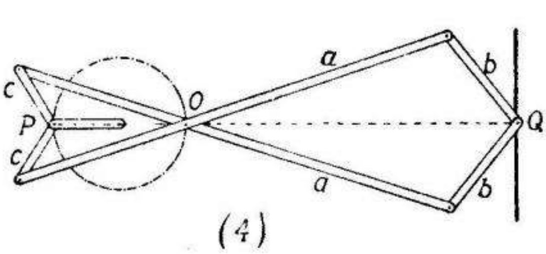
Фиг. 21



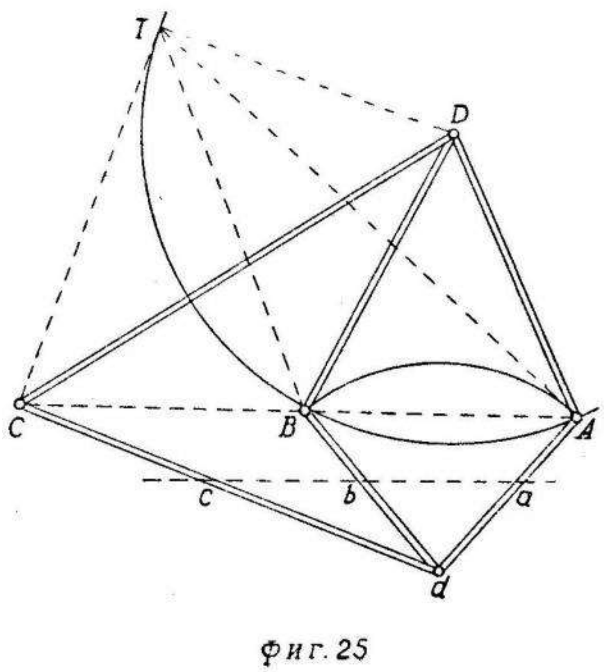
Фиг. 22



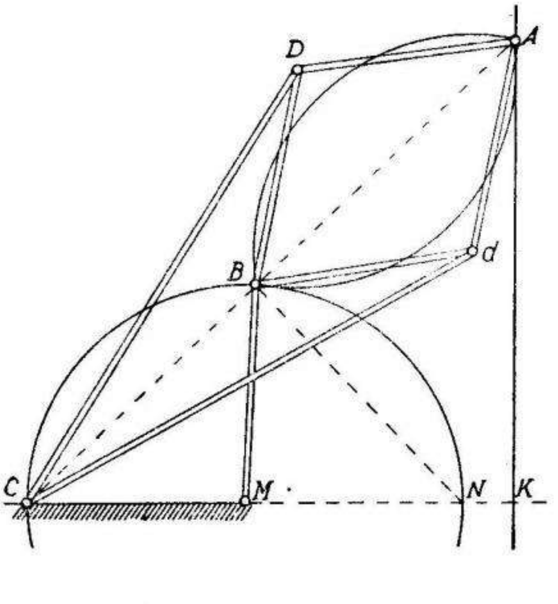
Фиг. 23



Фиг. 24



Фиг. 25



Фиг. 26

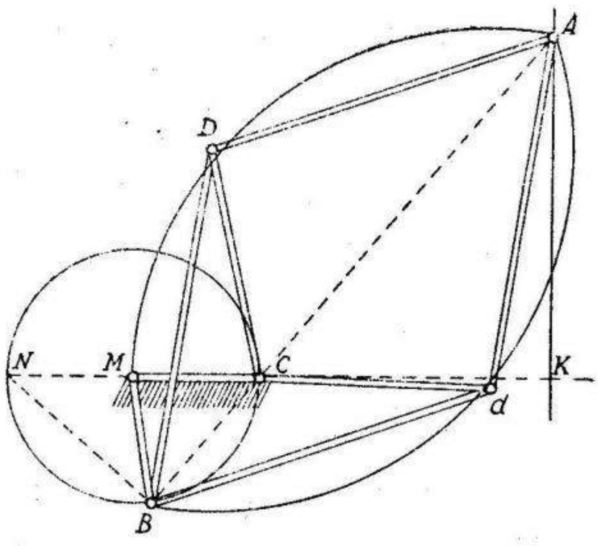
ная к прямой, проходящей через полюс и центр окружности. Поэтому для получения прямой достаточно в этой комбинации стержней точку C (или c) закрепить шарниром, а точку B (или b) соединить шарнирным стержнем с неподвижной точкой M так, чтобы $MB=MC$ (или $Mb=Mc$). Тогда точка A (или a) будет описывать прямую, перпендикулярную к CM (если же $Mc=Mb$, то A опишет дугу некоторой окружности). На фигурах (рис. 26 и 28) неподвижная точка C находится вне, а на фигуре (рис. 27) между A и B. В конструкции фигуры 28 четырехугольник ADBd есть ромб, в котором сторона Ad переходит в параллельную ей A'd'. Действительно, пусть (рис. 25) и (рис. 27) K и N — будут точками пересечения прямой CM с перпендикуляром AK (или aK) и окружностью радиуса $BM=CM$ с центром в точке M. Из прямоугольных подобных треугольников CBN и CKA получим $CK:CB=CA:CN$, а отсюда — $CK=\frac{CA\cdot CB}{CM}=\pm\left(\frac{DC^2-DA^2}{2MB}\right)$, причем знак плюс соответствует конструкции фигуры 26, а минус — фигуры 27. Таким образом, $CK=\text{const}$.

Это значит, что при любом положении конструкции перпендикуляр, опущенный из точки A, пересекает прямую CK в одной и той же точке K. Следовательно, точка A своим движением обязательно описывает перпендикуляр AK, что и требовалось доказать.

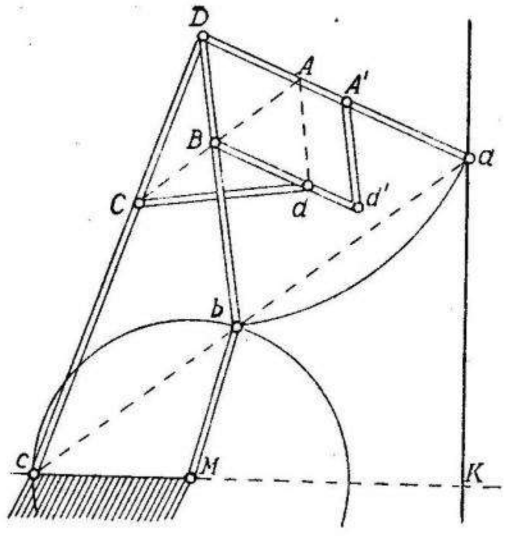
Инверсор Гарта (изобретен в 1874 г.). Новый вид направляющего механизма был предложен Гартом. Это гиперболический инверсор, имеющий форму равнобочной трапеции, составленной из четырех стержней $AB=CD=b$ и $BD=AC=a$, скрепленных шарнирами в точках A, B, C, D. Пусть O, P, Q суть точки прямой, параллельной основаниям трапеции. Поместим в точке O остреё, а в точках P и Q карандаши (рис. 29). Если точку O закрепить и передвигать карандаш P по какой-нибудь кривой, то карандаш Q опишет кривую, обратную первой. В самом деле, так как $\triangle OBQ\sim\triangle ABD$ и $\triangle OAP\sim\triangle BAC$ имеем $OQ:AD=OB:AB$ и $OP:BC=OA:AB$. Перемножая эти две пропорции почленно, получим $(OQ\cdot OP):(AD\cdot BC)=(OA\cdot OB):AB^2$; так как рассматриваемая трапеция равнобочная, то около нее можно описать окружность; к ней применима, следовательно, теорема Птоломея, и мы имеем $AD\cdot BC+b^2=a^2$. Таким образом, $OQ\cdot OP=(a^2-b^2)\cdot\frac{OA\cdot OB}{AB^2}=$ $=\text{const}$.

Отсюда также следует, что точки O, P, Q остаются на одной прямой. Больше того: можно закрепить не только одну точку O, но и всю сторону AB. Точки P и Q опишут окружности соответственно с центрами в A и B и радиусами AP и $BQ=PC$. Так как отношение этих радиусов равно отношению OA к OB, то точка O будет центром подобия обеих окружностей. Поскольку радиусы обеих окружностей, проведенные в точки P и Q, не параллельны между собой, эти две точки взаимно инверсны. Таким образом, произведение $OQ\cdot OP$ остается постоянным, если деформировать нашу конструкцию, сохраняя неподвижными точки A и B. Наконец, инверсору можно придать несколько иную форму, соединяя точку P с некоторой неподвижной точкой S (рис. 23) твердым стержнем, длина которого равна SO; тогда точка Q опишет прямую линию.

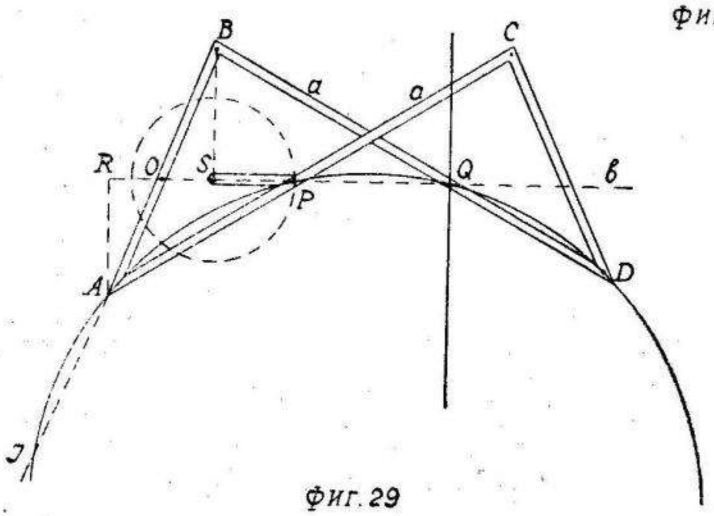
Примечание. Несмотря на видимое различие конструкции инверсоров Поселье-Липкина и Гарта, между ними можно установить геометрическую связь (фиг. 30).



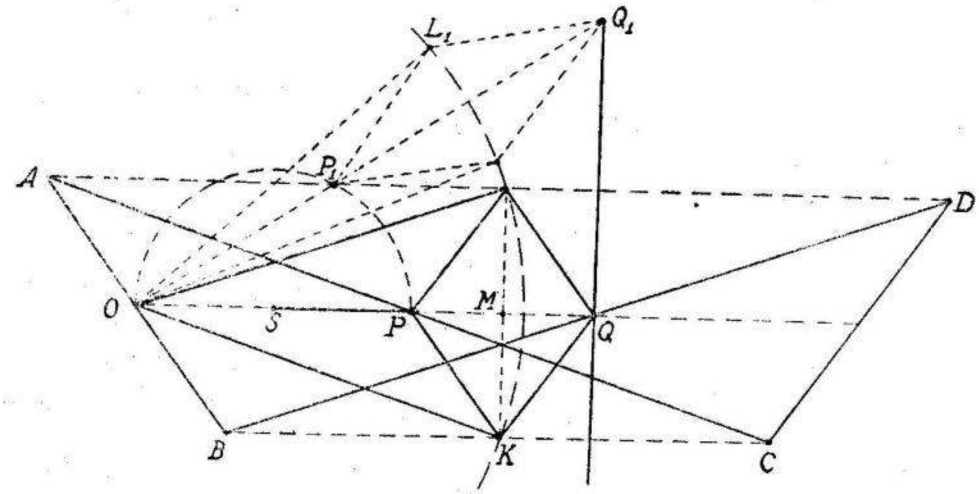
Фиг. 27



Фиг. 28



Фиг. 29



Фиг. 30

Действительно, если точку O закрепить, а точку P двигать по окружности с центром S_1 то Q будет двигаться по прямой $QQ_1 \cdot OQ$, инверсной этой окружности и обратно. В самом деле: $OP \cdot OQ = OM^2 - MQ^2 = OL^2 - LQ^2 = R^2$. Если P переместится в P_1, то Q перейдет в Q и будем иметь также $OP_1 . OQ = Const$.

В данном случае степень инверсии равна $OL^2 - LQ^2$. Для того, чтобы ее можно было менять, стержни OL и OK делаются раздвижными. Легко подобрать длину OL так, чтобы $OL^2 = QL^2 + R^2$.

Инверсор Гарта состоит из четырех стержней AB=DC и BC=AD, скрепленных шарнирами в точках A, B, C, D. Карандаши находятся в P и Q (точках пересечения диагоналей со средней линией OO_1 трапеции ABCD), в точке O — остреё. Пусть L и K середины сторон AC и BD.

Тогда получаем подвижной ромб PLQK и конструкция сведена к инверсору Поселье-Липкина. Степень инверсии $OP . OQ = OL^2 - PL^2$, будет в четыре раза меньше $Bc^2 - AB^2$.

Интересующихся механизмами, переводящими круговое движение в прямолинейное, и другими механизмами отсылаем к работам академика Артоболевского «Курс теории механизмов и машин» (ОГИЗ Гостехиздат, 1945) и «Механизмы» т. I (издание Академии Наук СССР, 1947 г.).