

ЗАДАЧИ¹

§ 1.

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

I. Задачи на разбиение плоскости и пространства.²

Задача 1. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых? Какое максимальное число конечных областей и какое максимальное число бесконечных областей они могут ограничить?

Решение. Одна прямая делит плоскость на 2 части. Новая прямая, пересекающая первую, увеличивает число частей на 2. Третья прямая, пересекающая первые две в точках, отличных от точки пересечения первых двух, увеличивает число частей на 3 и т. д. Вообще, всякая новая прямая, не параллельная ни одной из предыдущих и не проходящая через их точки пересечения, увеличивает число частей настолько, каково число областей, через которые она проходит. Поэтому n -ая прямая при соблюдении указанных условий встречается с предыдущими $n-1$ прямыми в $n-1$ точках, разбивающих ее на n частей ($n-2$ отрезка и 2 луча), принадлежащих n различным областям и, следовательно, увеличивает число частей на n . Отсюда следует, что при соблюдении указанных двух условий всегда получается максимальное число частей, равное для n прямых

$$2 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1)$$

При тех же условиях всякая новая прямая увеличивает число бесконечных областей на 2 (соответственно указанным выше в скобках 2 лучам) и, так как одна прямая делит плоскость на 2 бесконечные области, то максимальное число бесконечных областей, ограниченных n прямыми, равно $2n$. Вычитая $2n$ из (1), получаем максимальное число конечных областей, ограниченных n прямыми, равное

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}. \quad (2)$$

¹ Материал этого раздела подобран Л. И. Волковским.

² Нижеследующее представляет извлечение из работы J. Steiner'a „Einige' Gesätze über die Teilung der Ebene und des Raumes“ (см. его Gesammelte Werke, Bd. 1, 1881).

Примечание. Аналогично ставится и решается задача о разбиении плоскости n окружностями, а также n прямыми и m окружностями.³

Задача 2. На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей? Какое максимальное число конечных областей и какое максимальное число бесконечных областей они могут ограничить?

Решение. Одна плоскость делит пространство на две части. Новая плоскость, не параллельная первой, увеличивает число областей на 2. Третья плоскость, не параллельная первым двум, увеличивает число областей на 4, что равно числу предыдущих частей, через которые проходит новая плоскость. Но последнее число равно числу частей, на которые новая плоскость разбивается прямыми, представляющими ее пересечение с предыдущими плоскостями. Отсюда заключаем, что вообще n -ая плоскость увеличивает число частей настолько, каково число частей, на которые она разбивается $n-1$ прямыми, по которым она пересекается с первыми $n-1$ плоскостями. Это число будет равно максимальному числу (1) при замене числа n на $n-1$, которое всегда получается при соблюдении следующих двух условий: никакие две из прямых, образуемых в пересечении плоскостей, не параллельны между собой и ни в одной точке не встречаются более чем 3 такие прямые.

Из предыдущего следует, что максимальное число частей, на которые пространство может быть разбито n плоскостями, равно

$$\begin{aligned} 2 + \left[1 + \frac{2(2-1)}{2} \right] + \left[1 + \frac{3(3-1)}{2} \right] + \dots + \left[1 + \frac{n(n-1)}{2} \right] &= \\ = 1 + n + \frac{1}{2} [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n] &= \\ = 1 + n + \frac{1}{2} \left\{ [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + [1 + 2 + \dots + (n-1)] \right\} &= \\ = 1 + n + \frac{1}{2} \left[\frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \right] &= \\ = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы определить максимальное число бесконечных частей пространства, которые могут быть ограничены n плоскостями, замечаем, что одна плоскость делит пространство на 2 бесконечные области, а всякая новая плоскость увеличивает число бесконечных частей настолько, каково число прежних бесконечных частей, которые она пересекает. Это же число равно числу бесконечных областей в разбиении новой плоскости прямыми ее пересечений с прежними $n-1$ плоскостями. Максимальное их число равно $2(n-1)$ и всегда получается при соблюдении указанных выше условий. Поэтому искомое число равно

$$2 + 2(2-1) + 2(3-1) + \dots + 2(n-1) = 2 + n(n-1), \quad (4)$$

откуда, вычитая (4) из (3), заключаем, что максимальное число конечных областей, которые могут ограничить n плоскостей, равно

³ J. Steiner, там же.

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \quad (5)$$

Примечание. Аналогично ставится и решается задача о разбиении пространства n шарами, а также n плоскостями и m шарами.⁴

II. Задачи на взвешивание

Задача 1. Пусть A_n — максимальное число весов, которые можно получить с помощью n гирь с целочисленными весами, кладя их на одну чашку весов. Найти A_n и показать, что гири можно подобрать так, чтобы они позволяли получать все целочисленные веса от 1 до A_n включительно.

Решение. Система n гирь

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \quad (1)$$

позволяет произвести столько взвешиваний (одинаковые по весу гири, если они имеются, маркируем и считаем различными), сколько существует способов для выбора из n элементов одного, двух и т. д. элементов. Так как из n элементов k элементов можно выбрать C_n^k способами, то с помощью n гирь можно произвести

$$C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1 \quad (2)$$

и, следовательно, можно получить не более $2^n - 1$ различных весов.

Если гири (1) при произвольной величине a_1 удовлетворяют соотношениям

$$a_2 \geq a_1 + 1, a_3 \geq a_1 + a_2 + 1, \dots, a_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 1, \quad (3)$$

то, как легко убедиться, никакие два взвешивания не могут дать одинаковый вес. Поэтому всякая система гирь (1), удовлетворяющая соотношениям (3), позволяет получить $2^n - 1$ различных весов и, так как больше различных весов с помощью n гирь получить нельзя, то

$$A_n = 2^n - 1. \quad (4)$$

Беря в (3) знаки равенства и полагая $a_1=1$, получаем систему весов

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1},$$

с помощью которой можно получить A_n различных весов. Так как наибольший получаемый при этом вес равен

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = A_n$$

и число различных получаемых весов и взвешиваний тоже равно A_n , то с помощью системы гирь $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ можно получить все веса

⁴ J. Steiner, там же. См. также М. Б. Балк «О делении пространства любого числа измерений на части сферами», Успехи математич. наук, т. VII, вып. 1 (1952).

от 1 до $2^n - 1$ включительно, притом каждый вес единственным способом.

Задача 2. Сколькими способами можно представить данный вес $p=1, 2, \dots$, имея s гирь с целочисленными весами $a_1, a_2, \dots, a_s$ и кладя их только на одну чашку весов (при наличии одинаковых по весу гирь они маркируются и считаются различными)?

Решение. Рассматривая разложение

$$(1 + x^{a_1}) (1 + x^{a_2}) \dots (1 + x^{a_s}) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots, \quad (5)$$

нетрудно сообразить, что коэффициент C_n при x^n равен числу способов, которыми число n может быть составлено из чисел $a_1, a_2, \dots, a_s$ и, следовательно, число C_n дает ответ на поставленный вопрос (само собой разумеется, что $C_n = 0$ для $n > a_1 + a_2 + \dots + a_s$, кроме того, оно может быть, обращается в нуль для некоторых значений $n < a_1 + a_2 + \dots + a_s$).

Так как

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^8}{1 - x^4} \dots \frac{1 - x^{2^s}}{1 - x^{2^{s-1}}} = \frac{1 - x^{2^s}}{1 - x},$$

то

$$(1 + x) (1 + x^2) (1 + x^4) \dots (1 + x^{2^s - 1}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2^s - 1}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что с помощью гирь $a_1=1, a_2=2, a_3=2^2, \dots, a_s = 2^{s-1}$ можно, притом единственным образом, получить все веса от 1 до $2^s - 1$. Неограниченно увеличивая s , мы из (6), считая $|x| < 1$, получаем соотношение

$$(1 + x) (1 + x^2) (1 + x^4) \dots = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}, \quad (7)$$

из которого следует, что с помощью бесконечного ряда чисел 1, 2, 4, 8, ... всякое целое положительное число n можно единственным образом представить в виде

$$n = \alpha_0 \cdot 2^m + \alpha_1 \cdot 2^{m-1} + \alpha_2 \cdot 2^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1} \cdot 2 + \alpha_m, \quad (8)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ могут принимать лишь одно из двух значений 0 и 1. Другими словами, *всякое целое положительное число допускает одно, и только одно, представление по двоичной системе счисления.*⁵

Задача 3. Пусть B_n — максимальное число весов, которые можно получить с помощью n гирь с целочисленными весами, кладя их на одну или на обе чашки весов. Найти B_n и показать, что гири можно подобрать так, чтобы они позволяли получать все целочисленные веса от 1 до B_n включительно.

Решение. Система n гирь

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \quad (9)$$

⁵ О различных системах счисления см., например, Г. Н. Берман — «Число и наука о нем», 1948 г.

позволяет произвести столько взвешиваний, сколько существует способов для выбора из n элементов одного, двух и т. д. элементов и последующего их распределения по обеим чашкам весов (при этом два взвешивания, получающиеся друг из друга перестановкой чашек весов, считаются различными). Подсчитаем, сколькими способами можно k фиксированных элементов распределить по обеим чашкам весов. На одну из чашек мы можем положить 1, 2, ..., k элементов, которые можно выбрать соответственно $C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^k$ способами. Если еще учесть, что данную чашку можно оставить вовсе без элементов, то всего способов распределения элементов по обеим чашкам будет

$$1 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k = 2^k$$

и, так как k элементов из n элементов можно выбрать C_n^k способами, то всего различных взвешиваний с n гирями будем иметь

$$2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \dots + 2^n \cdot C_n^n = (1 + 2)^n - 1 = 3^n - 1. \quad (10)$$

Помещая взвешиваемый груз всегда на одну и ту же чашку весов, будем иметь $\frac{3^n - 1}{2}$ различных взвешиваний. Отсюда следует, что максимальное число B_n различных весов, которые можно получить с помощью n гирь, кладя их на любую чашку весов, не превосходит $\frac{3^n - 1}{2}$.

Покажем, что

$$B_n = \frac{3^n - 1}{2}. \quad (11)$$

Для этого заметим, что если система гирь (9) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &\geq a_1 + 1, \\ a_3 - (a_1 + a_2) &\geq (a_1 + a_2) + 1, \end{aligned} \quad (12)$$

.....

$$a_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + 1,$$

то никакие два взвешивания (груз на фиксированной чашке!) не могут дать одинаковый вес и следовательно, всякая система гирь (9), удовлетворяющая (12), позволяет получить $\frac{3^n - 1}{2}$ различных весов, откуда следует (11).

В частности, беря в (12) знаки равенства и полагая $a_1=1$, получаем систему весов 1, 3, 3^2 , ..., 3^{n-1} , с помощью которой можно получить максимальное число весов. Так как наибольший получаемый при этом вес равен

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} = B_n$$

и число различных получаемых весов и взвешиваний с грузом на одной чашке тоже равно B_n , то с помощью гирь $1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}$ можно получить все веса от 1 до B_n включительно, притом каждый вес единственным способом.

Задача 4. Сколькими способами можно представить данный вес $p=1, 2, \dots$, имея s гирь с целочисленными весами $a_1, a_2, \dots, a_s$ и кладя их на любую чашку весов (при наличии одинаковых по весу гирь они маркируются и считаются различными).

Решение. Рассматривая разложение

$$\begin{aligned} (x^{-a_1} + 1 + x^{a_1}) (x^{-a_2} + 1 + x^{a_2}) \dots (x^{-a_s} + 1 + x^{a_s}) = \\ = \dots + D_{-1}x^{-1} + D_0 + D_1x + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

нетрудно сообразить, что коэффициент D_n при x^n равен числу способов, которыми число n может быть составлено из чисел $a_1, a_2, \dots, a_s$ посредством действий сложения и вычитания и, следовательно, число D_n дает ответ на поставленный вопрос.

Так как

$$\frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^9}{1-x^3} \cdot \dots \cdot \frac{1-x^{3^s}}{1-x^{3^{s-1}}} = \frac{1-x^{3^s}}{1-x},$$

то

$$\begin{aligned} (1+x+x^2) (1+x^3+x^6) \dots (1+x^{3^{s-1}}+x^{2 \cdot 3^{s-1}}) = \\ = 1+x+x^2+\dots+x^{3^s-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

откуда

$$\begin{aligned} (x^{-1}+1+x) (x^{-3}+1+x^3) \dots (x^{-3^{s-1}}+1+x^{3^{s-1}}) = \\ = x^{-\frac{1}{2}(3^s-1)} + \dots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \dots + x^{\frac{1}{2}(3^s-1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следует, что с помощью гирь $a_1=1, a_2=3, a_3=3^2, \dots, a_s=3^{s-1}$ можно получить, притом единственным образом, все веса от 1 до $\frac{3^s-1}{2}$, что нам уже известно по предыдущей задаче.

Неограниченно увеличивая s , из (14) при $|x|<1$ мы получаем соотношение

$$(1+x+x^2) (1+x^3+x^6) \dots = 1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}. \quad (16)$$

Каждая скобка слева в (16) имеет вид $1+x^{3^k}+x^{2 \cdot 3^k}$, поэтому коэффициент при любой степени x^n справа в (16) равен числу способов представления числа n с помощью чисел $1, 3, 3^2, \dots$ при возможном повторении каждого из них два раза. Так как все коэффициенты справа

в (16) равны 1, то из сказанного следует, что всякое целое положительное число n можно единственным образом представить в виде

$$n = \beta_0 \cdot 3^m + \beta_1 \cdot 3^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} \cdot 3 + \beta_m, \quad (17)$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ могут принимать одно из трех значений 0, 1 и 2. Другими словами, *всякое целое число допускает одно, и только одно, представление по троичной системе счисления.*

ЛИТЕРАТУРА:

1. Леонард Эйлер «Введение в анализ бесконечно малых», т. 1, 1936 г., гл. XVI (здесь читатель найдет чрезвычайно богатое собрание задач, связанных с различными аддитивными представлениями целых чисел).
2. Полия и Сеге «Задачи и теоремы из анализа», ч. 1, 1937 г., гл. 1, задачи 1—15 и дальше (обращаем внимание читателя на эту превосходную книгу, вводящую изучающего в лабораторию математического творчества).
3. Ahrens, „Mathematische Unterhaltungen und Spiele“, Bd. 1, 1910.

III. Задачи для самостоятельного решения.

1. Задача на сочетания. Введем обозначения:

$$F_{\alpha, \beta} = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!}$$

и

$$F_{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)!}{\alpha! \beta! \gamma!},$$

где α, β и γ принимают любые значения 0, 1, 2, ... и $0! = 1$. Величины $F_{\alpha, \beta}$ и $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ очевидно, симметричны относительно своих индексов и, как легко показать, удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$F_{\alpha, \beta} = F_{\alpha-1, \beta} + F_{\alpha, \beta-1}$$

и соответственно

$$F_{\alpha, \beta, \gamma} = F_{\alpha-1, \beta, \gamma} + F_{\alpha, \beta-1, \gamma} + F_{\alpha, \beta, \gamma-1}.$$

Требуется исследовать $F_{\alpha, \beta}$ и $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ на четность и нечетность в зависимости от α и β соответственно α, β и γ .

2. Задачи на ряд Фибоначчи. Рядом Фибоначчи называется последовательность чисел $\{u_n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$), образуемая по следующему закону:

$$u_0 = 1, u_1 = 1; u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Следовательно, начало ряда Фибоначчи имеет вид

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Доказать следующие свойства ряда Фибоначчи:

⁶ О числах Фибоначчи см. Н. Н. Воробьев «Числа Фибоначчи», ГТТИ, 1951.

1) Для любых $n \geq 1$ и $r \geq 1$ отношения

$$\frac{u_{n+1} \cdot u_{n+2} \dots u_{n+r}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_r} \quad \text{и} \quad \frac{u_{nr}}{u_n}$$

представляют целые числа.

2) Имеют место соотношения ($n \geq 0$):

$$u_1 + u_3 + \dots + u_{2n+1} = u_{2n+2},$$

$$u_0 + u_2 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1}.$$

3) Для любого $r > 1$ ряд Фибоначчи содержит по крайней мере четыре и самое большее пять r -значных чисел (т. е. чисел, записываемых с помощью r цифр).

4) Показать, что в разложении

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

справедливого при $|x| < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, последовательность коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$ совпадает с рядом Фибоначчи.

5) Ряд Фибоначчи содержит бесконечно много простых чисел (гипотеза, до сих пор не доказанная и не опровергнутая).

3. Задача на маршруты. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что

1) с любой остановки на любую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересест с одного из этих маршрутов на другой;

3) в каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов? Для каких n можно построить систему из n маршрутов, соблюдая указанные условия?

4. Задача на телефоны. Доказать, что 77 телефонов нельзя соединить между собою так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 15 телефонами.

5. Две задачи из занимательной математики.

1. Три колхозника — Иванов, Петров, Сидоров и их жены Анна, Марфа и Фекла покупали ткани. Каждый из них покупал ткань только одного вида, причем столько метров, сколько он (или она) платил рублей за один метр. Каждый муж истратил на 63 рубля больше чем его жена. Определить имена жен Иванова, Петрова и Сидорова, если известно, что Иванов купил на 23 метра больше, чем Марфа, и Петров — на 11 больше, чем Анна.

2. Два брата продавали свиней. За каждую свинью они брали столько рублей, сколько у них всего было вначале свиней. Выручку они стали делить пополам: старший брат взял себе 10 руб. и дал младшему брату 10 руб., затем снова взял себе 10 руб. и дал брату 10 руб. и т. д. В конце концов, осталось десять рублей (в виде десятки) и несколько рублей на сумму меньшую 10 руб. Десятку старший брат взял

себе, а младшему отдал остальные деньги и в придачу отдал ему свой нож, после чего оба получили поровну. Спрашивается, сколько стоил нож?

§ 2.

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Обобщение постоянной Эйлера.⁷ Известно, что гармонический ряд

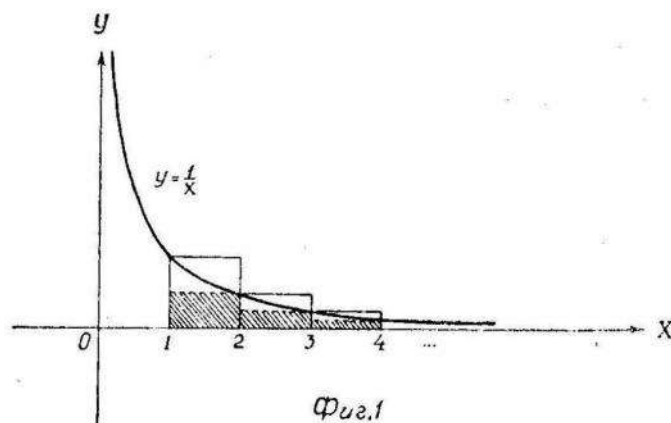
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (1)$$

расходится. Заменяя интеграл

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$$

его интегральными суммами, соответствующими указанным на фиг. 1 ступенчатым линиям, замечаем, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$



и что попарные разности между членами неравенства, считая справа налево, монотонно возрастают; отсюда следует существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right], \quad (2)$$

заключенного между 0 и 1. Этот предел называется постоянной Эйлера и обозначается через С. Приблизленно $C=0,577215\dots$

⁷ Задача была поставлена и решена студентом физико-математического факультета Львовского госуниверситета И. Н. Песиним. Нижеследующее представляет заметку, написанную им для настоящего сборника.

Образуем теперь с помощью произвольной последовательности $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ положительных чисел новые последовательности $\{s_n\}$ и $\{q_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), полагая

$$s_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad (3)$$

$$q_n = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{s_k} - \log s_n. \quad (4)$$

Так как при $p_1 = p_2 = \dots = 1$ последовательность (4) превращается в последовательность

$$q_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log n,$$

рассматриваемую в (2), то в случае существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$, его естественно рассматривать как (обобщенную) постоянную Эйлера последовательности $\{p_n\}$. Отсюда возникает следующая задача:

Найти необходимые и достаточные условия, чтобы последовательность $\{p_n\}$ имела конечную постоянную Эйлера.

Докажем сперва следующую известную лемму:

Пусть $\{u_n\}$ произвольная последовательность чисел, не превосходящих по абсолютной величине 1. Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log(1 - u_n) + u_n], \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \quad (5)$$

сходятся или расходятся одновременно.⁸

Доказательство. Так как, по формуле Тейлора,

$$\log(1 - u) = -u - \frac{u^2}{(1 - \theta u)^2}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (6)$$

то

$$\log(1 - u_n) + u_n = -\frac{u_n^2}{(1 - \theta_n u_n)^2}, \quad 0 < \theta_n < 1 \quad (7)$$

и ряд справа в (5) сходится одновременно с рядом слева. Если же

сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$, то $u_n \rightarrow 0$, поэтому множители

$$\frac{1}{(1 - \theta_n u_n)^2}$$

в (7) равномерно ограничены, откуда следует сходимость ряда слева в (5).

⁸ См., например, Привалов «Введение в теорию функций комплексного переменного», где (гл. IX), вместо рядов (5), рассматриваются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(1 - u_n) + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \dots + \frac{u_n^{k+1}}{k+1} \right], \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_n^k.$$

Докажем теперь следующую теорему:

Для того, чтобы последовательность положительных чисел $\{p_n\}$ имела конечную постоянную Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы сходилась ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{s_n} \right)^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} -\log s_n &= \log \frac{1}{s_1} + \log \frac{s_1}{s_2} + \dots + \log \frac{s_{n-1}}{s_n} = \\ &= \log \frac{1}{s_1} + \log \left(1 - \frac{p_2}{s_2} \right) + \dots + \log \left(1 - \frac{p_n}{s_n} \right), \end{aligned}$$

поэтому

$$q_n = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{s_k} - \log s_n = \frac{p_1}{s_1} + \log \frac{1}{s_1} + \sum_{k=2}^n \left[\frac{p_k}{s_k} + \log \left(1 - \frac{p_k}{s_k} \right) \right]$$

или

$$q_n = 1 - \log p_1 + \sum_{k=2}^n \left[\frac{p_k}{s_k} + \log \left(1 - \frac{p_k}{s_k} \right) \right], \quad (9)$$

откуда, на основании вышедшей леммы, последовательность $\{q_n\}$ имеет конечный предел тогда, и только тогда, когда сходится ряд (8).

Из (6) видно, что под знаком Σ в (9) стоят отрицательные величины, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n < 1 - \log p_1. \quad (10)$$

2. Одновременная сходимость двух рядов или несобственных интегралов.

1) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — положительные монотонно возрастающие функции, определение для $x > 0$. Доказать, что если существует такая постоянная C , что

$$g(x) < Cx,$$

то интегралы

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{f(x) + g(x)}, \quad \int_a^{\infty} \frac{dx}{f(x)} \quad (a > 0)$$

сходятся и расходятся одновременно.⁹

⁹ Настоящая задача в качестве леммы приводится в статье Ульриха помещенной в журнале Duke Math. J., 5, 1939.

2) Показать, что для монотонно возрастающей последовательности положительных чисел $\{q_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{q_{n+1}}{q_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_n}{2^n}$$

сходятся и расходятся одновременно. Эти же ряды сходятся и расходятся одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\beta_n q_n + (q_{n+1} - q_n)]}{2^n},$$

где $\{\beta_n\}$ последовательность положительных чисел, образующая сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{2^n}.$$

3) Показать, что для монотонно убывающей последовательности положительных чисел $\{q_n\}$ при дополнительном условии

$$1 < \frac{q_0}{q_1} \leq \frac{q_1}{q_2} \leq \dots \leq \frac{q_n}{q_{n+1}} \leq \dots$$

ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{\log \frac{1}{q_{n+1}}}{\log \frac{1}{q_n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log \frac{q_n}{q_{n+1}}$$

сходятся и расходятся одновременно.

3. К признаку сходимости Вейерштрасса. Дан ряд

$$\sum a_n \tag{1}$$

с произвольными комплексными членами, обладающими следующим свойством: начиная с некоторого n , отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ может быть представлено в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n, \tag{2}$$

где a — постоянная и ряд $\sum c_n$ абсолютно сходится. Доказать, что при этом ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(a) < -1$, и что сходимость в этом случае абсолютная (см. H. Jehle „Eine Bemerkung zum Konvergenzkriterium von Weierstrass“. Math. Z. 52:1 (1949), 60—61).

4. Несобственные интегралы и интегральные суммы.¹⁰

1) Пусть $f(x)$ монотонна в интервале $0 < x < 1$; пусть далее в одной из точек $x=0$ и $x=1$ или в обеих функциях неограничена, но

так, что несобственный интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ существует. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x) dx \quad (1)$$

(задача из Полия и Сеге, № 20 — см. подстрочное примечание).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной внутри интервала $0 < x < 1$ и абсолютно там интегрируемой, для которой предел слева в (1) не существует.

2) Если $f(x)$ в интервале $0 < x < 1$ монотонна, конечна в точке $x=0$ или $x=1$ и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \quad (2)$$

существует, то также существует и $\int_0^1 f(x) dx$ (Полия и Сеге, там же, № 25).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной в интервале $0 < x < 1$, конечной в одной из точек $x=0$ или $x=1$, для которой существует предел (2), но интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ не существует.

3) Существуют монотонные в интервале $0 < x < 1$ функции $f(x)$, для которых предел (2) существует, но интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ не существует. (Полия и Сеге, там же, № 24).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной и монотонной в интервале $0 < x < 1$ и неограниченной на его концах, для которой предел

(2) существует, но интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ не существует даже в смысле

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) dx.$$

¹⁰ Ниже приводятся три задачи из Полия и Сеге «Задачи и теоремы из анализа», ч. 1, отд. 2, №№ 20, 23, 24 и предлагается построить к ним примеры, выясняющие значение того или иного условия задач. Такие примеры были построены студентом физико-математического факультета Львовского университета А. А. Гольдбергом.

5. Из занимательной математики.

1) Докажем «исправленную» теорему Пифагора: сумма катетов равна гипотенузе. В самом деле, опуская из середины гипотенузы перпендикуляры на оба катета, получаем два прямоугольных треугольника, сумма четырех катетов которых равна сумме прежних двух. Повторяя указанное разбиение, получаем четыре прямоугольных треугольника с прежней суммой катетов и т. д. Но получающаяся ломаная в пределе стягивается к гипотенузе исходного треугольника, откуда следует наше утверждение. Где ошибка?

2) Чтобы найти сумму бесконечного ряда

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots,$$

можно поступить трояким способом: во-первых, имеем

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots,$$

откуда $s=0$. Во-вторых, имеем

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - \dots,$$

откуда $s=1$. Наконец, полагая в ряде

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$x=1$, получаем для s значение $\frac{1}{2}$. Какое же из трех значений

0, 1 и $\frac{1}{2}$ является истинным значением s ?

3) В комодке три ящика с двумя отделениями в каждом. В одном ящике в обоих отделениях золото, в другом ящике в обоих отделениях серебро, а в третьем ящике в одном отделении золото, а в другом серебро.

Вынимают один ящик и смотрят в одно из его отделений: там золото. Спрашивается, какова вероятность того, что во втором отделении ящика также золото?

Решение 1. Так как во втором отделении может быть только золото или только серебро, то искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

Решение 2. Для того чтобы во втором отделении оказалось золото, должен был быть вынут ящик, имеющий в обоих отделениях золото. Но из всех трех ящиков имеется только один такой ящик. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Спрашивается, каково же действительное значение искомой вероятности?