ЗАДАЧИ[1]

§ 1.

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

I. Задачи на разбиение плоскости и пространства.[2]

Задача 1. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых? Какое максимальное число конечных областей и какое максимальное число бесконечных областей они могут ограничить?

Решение. Одна прямая делит плоскость на 2 части. Новая прямая, пересекающая первую, увеличивает число частей на 2. Третья прямая, пересекающая первые две в точках, отличных от точки пересечения первых двух, увеличивает число частей на 3 и т. д. Вообще, всякая новая прямая, не параллельная ни одной из предыдущих и не проходящая через их точки пересечения, увеличивает число частей настолько, каково число областей, через которые она проходит. Поэтому n-ая прямая при соблюдении указанных условий встречается с предыдущими $n-1$ прямыми в $n-1$ точках, разбивающих ее на n частей ($n-2$ отрезка и 2 луча), принадлежащих n различным областям и, следовательно, увеличивает число частей на n. Отсюда следует, что при соблюдении указанных двух условий всегда получается максимальное число частей, равное для n прямых

$$2+2+3+\ldots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}=1+n+\frac{n(n-1)}{2}. \quad (1)$$

При тех же условиях всякая новая прямая увеличивает число бесконечных областей на 2 (соответственно указанным выше в скобках 2 лучам) и, так как одна прямая делит плоскость на 2 бесконечные области, то максимальное число бесконечных областей, ограниченных n прямыми, равно $2n$. Вычитая $2n$ из (1), получаем максимальное число конечных областей, ограниченных n прямыми, равное

$$1-n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}. \quad (2)$$

---

[1] Материал этого раздела подобран Л. И. Волковыским.

[2] Нижеследующее представляет извлечение из работы J. Steiner'a „Einige Gesätze über die Teilung der Ebene und des Raumes" (см. его Gesammelte Werke, Bd. 1, 1881).

Примечание. Аналогично ставится и решается задача о разбиении плоскости n окружностями, а также n прямыми и m окружностями.[3]

Задача 2. На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей? Какое максимальное число конечных областей и какое максимальное число бесконечных областей они могут ограничить?

Решение. Одна плоскость делит пространство на две части. Новая плоскость, не параллельная первой, увеличивает число областей на 2. Третья плоскость, не параллельная первым двум, увеличивает число областей на 4, что равно числу предыдущих частей, через которые проходит новая плоскость. Но последнее число равно числу частей, на которые новая плоскость разбивается прямыми, представляющими ее пересечение с предыдущими плоскостями. Отсюда заключаем, что вообще n-ая плоскость увеличивает число частей настолько, каково число частей, на которые она разбивается n—1 прямыми, по которым она пересекается с первыми n—1 плоскостями. Это число будет равно максимальному числу (1) при замене числа n на n—1, которое всегда получается при соблюдении следующих двух условий: никакие две из прямых, образуемых в пересечении плоскостей, не параллельны между собой и ни в одной точке не встречаются более чем 3 такие прямые.

Из предыдущего следует, что максимальное число частей, на которые пространство может быть разбито n плоскостями, равно

$$2+\left[1+\frac{2(2-1)}{2}\right]+\left[1+\frac{3(3-1)}{2}\right]+\ldots+\left[1+\frac{n(n-1)}{2}\right]=$$

$$=1+n+\frac{1}{2}\left[1.2+2.3+\ldots+(n-1).n\right]=$$

$$=1+n+\frac{1}{2}\left\{\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]+\left[1+2+\ldots+(n-1)\right]\right\}=$$

$$=1+n+\frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\right]=$$

$$=1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}. \qquad (3)$$

Чтобы определить максимальное число бесконечных частей пространства, которые могут быть ограничены n плоскостями, замечаем, что одна плоскость делит пространство на 2 бесконечные области, а всякая новая плоскость увеличивает число бесконечных частей настолько, каково число прежних бесконечных частей, которые она пересекает. Это же число равно числу бесконечных областей в разбиении новой плоскости прямыми ее пересечений с прежними n—1 плоскостями. Максимальное их число равно 2 (n—1) и всегда получается при соблюдении указанных выше условий. Поэтому искомое число равно

$$2+2(2-1)+2(3-1)+\ldots+2(n-1)=2+n(n-1), \qquad (4)$$

откуда, вычитая (4) из (3), заключаем, что максимальное число конечных областей, которые могут ограничить n плоскостей, равно

[3] J. Steiner, там же.

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \tag{5}$$

Примечание. Аналогично ставится и решается задача о разбиении пространства n шарами, а также n плоскостями и m шарами.[4]

II. Задачи на взвешивание

Задача 1. Пусть A_n — максимальное число весов, которые можно получить с помощью n гирь с целочисленными весами, кладя их на одну чашку весов. Найти A_n и показать, что гири можно подобрать так, чтобы они позволяли получать все целочисленные весы от 1 до A_n включительно.

Решение. Система n гирь

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \tag{1}$$

позволяет произвести столько взвешиваний (одинаковые по весу гири, если они имеются, маркируем и считаем различными), сколько существует способов для выбора из n элементов одного, двух и т. д. элементов. Так как из n элементов k элементов можно выбрать C_n^k способами, то с помощью n гирь можно произвести

$$C_n^2 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1 \tag{2}$$

и, следовательно, можно получить не более $2^n - 1$ различных весов.

Если гири (1) при произвольной величине a_1 удовлетворяют соотношениям

$$a_2 \geqslant a_1 + 1,\ a_3 \geqslant a_1 + a_2 + 1,\ \ldots,\ a_n \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 1, \tag{3}$$

то, как легко убедиться, никакие два взвешивания не могут дать одинаковый вес. Поэтому всякая система гирь (1), удовлетворяющая соотношениям (3), позволяет получить $2^n - 1$ различных весов и, так как больше различных весов с помощью n гирь получить нельзя, то

$$A_n = 2^n - 1. \tag{4}$$

Беря в (3) знаки равенства и полагая $a_1 = 1$, получаем систему весов

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{n-1},$$

с помощью которой можно получить A_n различных весов. Так как наибольший получаемый при этом вес равен

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = A_n$$

и число различных получаемых весов и взвешиваний тоже равно A_n, то *с помощью системы гирь* $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ *можно получить все веса*

[4] J. Steiner, там же. См. также М. Б. Балк «О делении пространства любого числа измерений на части сферами», Успехи математич. наук, т. VII, вып. 1 (1952).

от 1 до $2^n - 1$ включительно, притом каждый вес единственным способом.

Задача 2. Сколькими способами можно представить данный вес $n=1, 2, \ldots$, имея s гирь с целочисленными весами $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и кладя их только на одну чашку весов (при наличии одинаковых по весу гирь они маркируются и считаются различными)?

Решение. Рассматривая разложение

$$(1 + x^{a_1})(1 + x^{a_2}) \ldots (1 + x^{a_s}) =$$
$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots, \quad (5)$$

нетрудно сообразить, что коэфициент C_n при x^n равен числу способов, которыми число n может быть составлено из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и, следовательно, число C_n дает ответ на поставленный вопрос (само собой разумеется, что $C_n = 0$ для $n > a_1 + a_2 + \ldots + a_s$, кроме того, оно, может быть, обращается в нуль для некоторых значений $n < a_1 + a_2 + \ldots + a_s$).

Так как

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^8}{1 - x^4} \cdots \frac{1 - x^{2^s}}{1 - x^{2^s - 1}} = \frac{1 - x^{2^s}}{1 - x},$$

то

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2^s - 1}) = 1 + x + x^2 +$$
$$+ x^3 + \ldots + x^{2^s - 1}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что с помощью гирь $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2^2, \ldots, a_s = 2^{s-1}$ можно, притом единственным образом, получить все веса от 1 до 2^{s-1}. Неограниченно увеличивая s, мы из (6), считая $|x| < 1$, получаем соотношение

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x}, \quad (7)$$

из которого следует, что с помощью бесконечного ряда чисел 1, 2, 4, 8, ... всякое целое положительное число n можно единственным образом представить в виде

$$n = \alpha_0 \cdot 2^m + \alpha_1 \cdot 2^{m-1} + \alpha_2 \cdot 2^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1} \cdot 2 + \alpha_m, \quad (8)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ могут принимать лишь одно из двух значений 0 и 1. Другими словами, *всякое целое положительное число допускает одно, и только одно, представление по двоичной системе счисления.*[5]

Задача 3. Пусть B_n — максимальное число весов, которые можно получить с помощью n гирь с целочисленными весами, кладя их *на одну или на обе* чашки весов. Найти B_n и показать, что гири можно подобрать так, чтобы они позволяли получать все целочисленные веса от 1 до B_n включительно.

Решение. Система n гирь

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \quad (9)$$

[5] О различных системах счисления см., например, Г. Н. Берман — «Число и наука о нем», 1948 г.

позволяет произвести столько взвешиваний, сколько существует способов для выбора из n элементов одного, двух и т. д. элементов и последующего их распределения по обеим чашкам весов (при этом два взвешивания, получающиеся друг из друга перестановкой чашек весов, считаются различными). Подсчитаем, сколькими способами можно k фиксированных элементов распределить по обеим чашкам весов. На одну из чашек мы можем положить 1, 2, ..., k элементов, которые можно выбрать соответственно $C_k^1, C_k^2, \ldots, C_k^k$ способами. Если еще учесть, что данную чашку можно оставить вовсе без элементов, то всего способов распределения элементов по обеим чашкам будет

$$1 + C_k^1 + C_k^2 \cdot C_k^2 + \ldots + C_k^k = 2^k$$

и, так как k элементов из n элементов можно выбрать C_n^k способами, то всего различных взвешиваний с n гирями будем иметь

$$2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + 2^n \cdot C_n^n = (1 + 2)^n - 1 = 3^n - 1. \qquad (10)$$

Помещая взвешиваемый груз всегда на одну и ту же чашку весов, будем иметь $\frac{3^n - 1}{2}$ различных взвешиваний. Отсюда следует, что максимальное число B_n различных весов, которые можно получить с помощью n гирь, кладя их на любую чашку весов, не превосходит $\frac{3^n - 1}{2}$.

Покажем, что

$$B_n = \frac{3^n - 1}{2}. \qquad (11)$$

Для этого заметим, что если система гирь (9) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &a_2 - a_1 \geqslant a_1 + 1, \\ &a_3 - (a_1 + a_2) \geqslant (a_1 + a_2) + 1, \qquad (12) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + 1, \end{aligned}$$

то никакие два взвешивания (груз на фиксированной чашке!) не могут дать одинаковый вес и следовательно, всякая система гирь (9), удовлетворяющая (12), позволяет получить $\frac{3^n - 1}{2}$ различных весов, откуда следует (11).

В частности, беря в (12) знаки равенства и полагая $a_1=1$, получаем систему весов 1, 3, 3^2, ..., 3^{n-1}, с помощью которой можно получить максимальное число весов. Так как наибольший получаемый при этом вес равен

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} = B_n$$

и число различных получаемых весов и взвешиваний с грузом на одной чашке тоже равно B_n, то с помощью гирь $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}$ можно получить все веса от 1 до B_n включительно, притом каждый вес единственным способом.

Задача 4. Сколькими способами можно представить данный вес $n=1, 2, \ldots$, имея s гирь с целочисленными весами $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и кладя их на любую чашку весов (при наличии одинаковых по весу гирь они маркируются и считаются различными).

Решение. Рассматривая разложение

$$\left(x^{-a_1}+1+x^{a_1}\right)\left(x^{-a_2}+1+x^{a_2}\right)\ldots\left(x^{-a_s}+1+x^{a_s}\right)=$$
$$=\ldots+D_{-1}x^{-1}+D_0+D_1x+\ldots, \qquad (13)$$

нетрудно сообразить, что коэфициент D_n при x^n равен числу способов, которыми число n может быть составлено из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ посредством действий сложения и вычитания и, следовательно, число D_n дает ответ на поставленный вопрос.

Так как

$$\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x^{3^s}}{1-x^{3^{s-1}}}=\frac{1-x^{3^s}}{1-x},$$

то

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x^3+x^6\right)\ldots\left(1+x^{3^{s-1}}+x^{2\cdot 3^{s-1}}\right)=$$
$$=1+x+x^2+\ldots+x^{3^s-1}, \qquad (14)$$

откуда

$$\left(x^{-1}+1+x\right)\left(x^{-3}+1+x^3\right)\ldots\left(x^{-3^{s-1}}+1+x^{3^{s-1}}\right)=$$
$$=x^{-\frac{1}{2}(3^s-1)}+\ldots+x^{-2}+x^{-1}+1+x+x^2+\ldots x^{\frac{1}{2}(3^s-1)}. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что с помощью гирь $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=3^2, \ldots, a_s=3^{s-1}$ можно получить, притом единственным образом, все веса от 1 до $\frac{3^s-1}{2}$, что нам уже известно по предыдущей задаче.

Неограниченно увеличивая s, из (14) при $|x|<1$ мы получаем соотношение

$$(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)\ldots=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}. \qquad (16)$$

Каждая скобка слева в (16) имеет вид $1+x^{3^k}+x^{2\cdot 3^k}$, поэтому коэфициент при любой степени x^n справа в (16) равен числу способов представления числа n с помощью чисел $1, 3, 3^2, \ldots$ при возможном повторении каждого из них два раза. Так как все коэфициенты справа в (16) равны 1, то из сказанного следует, что всякое целое положительное число n можно единственным образом представить в виде

$$n = \beta_0 \cdot 3^m + \beta_1 \cdot 3^{m-1} + \ldots + \beta_{n-1} \cdot 3 + \beta_m, \tag{17}$$

где $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ могут принимать одно из трех значений 0, 1 и 2. Другими словами, *всякое целое число допускает одно, и только одно, представление по троичной системе счисления.*

ЛИТЕРАТУРА:

1. Леонард Эйлер «Введение в анализ бесконечно малых», т. 1, 1936 г., гл. XVI (здесь читатель найдет чрезвычайно богатое собрание задач, связанных с различными аддитивными представлениями целых чисел).
2. Полиа и Сеге «Задачи и теоремы из анализа», ч. 1, 1937 г., гл. 1, задачи 1—15 и дальше (обращаем внимание читателя на эту превосходную книгу, вводящую изучающего в «лабораторию математического творчества»).
3. Ahrens „Mathematische Unterhaltungen und Spiele", Bd. 1, 1910.

III. Задачи для самостоятельного решения.

1. Задача на сочетания. Введем обозначения:

$$F_{\alpha, \beta} = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \, \beta!}$$

и

$$F_{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)!}{\alpha! \, \beta! \, \gamma!},$$

где α, β и γ принимают любые значения 0, 1, 2, ... и $0! = 1$. Величины $F_{\alpha, \beta}$ и $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ очевидно, симметричны относительно своих индексов и, как легко показать, удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$F_{\alpha, \beta} = F_{\alpha-1, \beta} + F_{\alpha, \beta-1}$$

и соответственно

$$F_{\alpha, \beta, \gamma} = F_{\alpha-1, \beta, \gamma} + F_{\alpha, \beta-1, \gamma} + F_{\alpha, \beta, \gamma-1}.$$

Требуется исследовать $F_{\alpha, \beta}$ и $F_{\alpha, \beta, \gamma}$ на четность и нечетность в зависимости от α и β соответственно α, β и γ.

2. Задачи на ряд Фибоначчи. Рядом Фибоначчи называется последовательность чисел $\{u_n\}$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), образуемая по следующему закону:

$$u_0 - 1, \; u_1 = 1; \; u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \; (n \geqslant 2).$$

Следовательно, начало ряда Фибоначчи имеет вид

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Доказать следующие свойства ряда Фибоначчи:

---

[6] О числах Фибоначчи см. Н. Н. Воробьев «Числа Фибоначчи», ГТТИ, 1951.

1) Для любых $n \geqslant 1$ и $p \geqslant 1$ отношения

$$\frac{u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p}}{u_1 \cdot u_2 \ldots u_p} \quad \text{и} \quad \frac{u_{np}}{u_n}$$

представляют целые числа.

2) Имеют место соотношения ($n \geqslant 0$):

$$u_1 + u_3 + \ldots u_{2n+1} = u_{2n+2},$$

$$u_0 + u_2 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1}.$$

3) Для любого $p > 1$ ряд Фибоначчи содержит по крайней мере четыре и самое большее пять p-значных чисел (т. е. чисел, записываемых с помощью p цифр).

4) Показать, что в разложении

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$

справедливого при $|x| < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, последовательность коэфициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots$ совпадает с рядом Фибоначчи.

5) Ряд Фибоначчи содержит бесконечно много простых чисел (гипотеза, до сих пор не доказанная и не опровергнутая).

3. Задача на маршруты. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что

1) с любой остановки на любую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) в каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов? Для каких n можно построить систему из n маршрутов, соблюдая указанные условия?

4. Задача на телефоны. Доказать, что 77 телефонов нельзя соединить между собою так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 15 телефонами.

5. Две задачи из занимательной математики.

1. Три колхозника — Иванов, Петров, Сидоров и их жены Анна, Марфа и Фекла покупали ткани. Каждый из них покупал ткань только одного вида, причем столько метров, сколько он (или она) платил рублей за один метр. Каждый муж истратил на 63 рубля больше чем его жена. Определить имена жен Иванова, Петрова и Сидорова, если известно, что Иванов купил на 23 метра больше, чем Марфа, и Петров — на 11 больше, чем Анна.

2. Два брата продавали свиней. За каждую свинью они брали столько рублей, сколько у них всего было вначале свиней. Выручку они стали делить пополам: старший брат взял себе 10 руб. и дал младшему брату 10 руб., затем снова взял себе 10 руб. и дал брату 10 руб. и т. д. В конце концов, осталось десять рублей (в виде десятки) и несколько рублей на сумму меньшую 10 руб. Десятку старший брат взял

себе, а младшему отдал остальные деньги и в придачу отдал ему свой нож, после чего оба получили поровну. Спрашивается, сколько стоил нож?

§ 2.

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Обобщение постоянной Эйлера.[7] Известно, что гармонический ряд

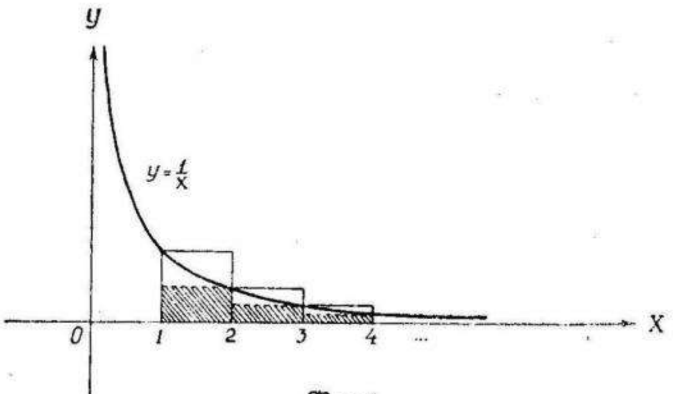
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{1}$$

расходится. Заменяя интеграл

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$$

его интегральными суммами, соответствующими указанным на фиг. 1 ступенчатым линиям, замечаем, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$



Фиг. 1

и что попарные разности между членами неравенства, считая справа налево, монотонно возрастают; отсюда следует существование предела

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n\right], \tag{2}$$

заключенного между 0 и 1. Этот предел называется постоянной Эйлера и обозначается через C. Приближенно C=0,577215...

[7] Задача была поставлена и решена студентом физико-математического факультета Львовского госуниверситета И. Н. Песиным. Нижеследующее представляет заметку, написанную им для настоящего сборника.