себе, а младшему отдал остальные деньги и в придачу отдал ему свой нож, после чего оба получили поровну. Спрашивается, сколько стоил нож?

§ 2.

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Обобщение постоянной Эйлера.[7] Известно, что гармонический ряд

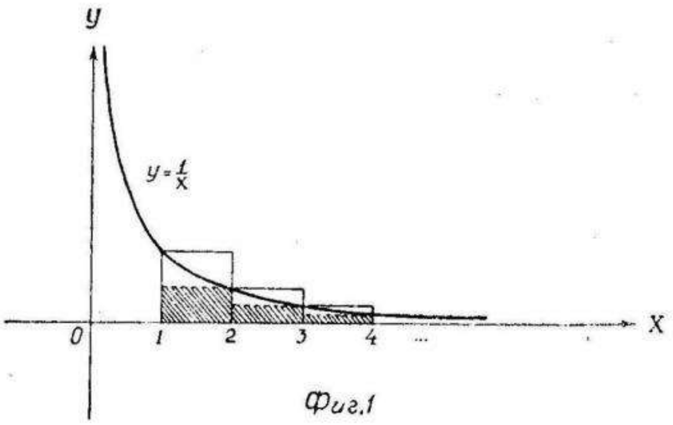
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{1}$$

расходится. Заменяя интеграл

$$\int\limits_1^n \frac{dx}{x}=\log n$$

его интегральными суммами, соответствующими указанным на фиг. 1 ступенчатым линиям, замечаем, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\int\limits_1^n \frac{dx}{x}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$



Фиг. 1

и что попарные разности между членами неравенства, считая справа налево, монотонно возрастают; отсюда следует существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\log n\right], \tag{2}$$

заключенного между 0 и 1. Этот предел называется постоянной Эйлера и обозначается через C. Приближенно C=0,577215...

[7] Задача была поставлена и решена студентом физико-математического факультета Львовского госуниверситета И. Н. Песиным. Нижеследующее представляет заметку, написанную им для настоящего сборника.

Образуем теперь с помощью произвольной последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ положительных чисел новые последовательности $\{s_n\}$ и $\{q_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$s_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \tag{3}$$

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{s_k} - \log s_n. \tag{4}$$

Так как при $p_1 = p_2 = \ldots = 1$ последовательность (4) превращается в последовательность

$$q_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n,$$

рассматриваемую в (2), то в случае существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$, его естественно рассматривать как (обобщенную) постоянную Эйлера последовательности $\{p_n\}$. Отсюда возникает следующая задача:

Найти необходимые и достаточные условия, чтобы последовательность $\{p_n\}$ имела конечную постоянную Эйлера.

Докажем сперва следующую известную лемму:

Пусть $\{u_n\}$ произвольная последовательность чисел, не превосходящих по абсолютной величине 1. Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\log(1 - u_n) + u_n], \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \tag{5}$$

сходятся или расходятся одновременно.[8]

Доказательство. Так как, по формуле Тейлора,

$$\log(1 - u) = -u - \frac{n^2}{(1 - \Theta u)^2}, \quad 0 < \Theta < 1, \tag{6}$$

то

$$\log(1 - u_n) + u_n = -\frac{u_n^2}{(1 - \Theta_n u_n)^2}, \quad 0 < \Theta_n < 1 \tag{7}$$

и ряд справа в (5) сходится одновременно с рядом слева. Если же сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$, то $u_n \to 0$, поэтому множители

$$\frac{1}{(1 - \Theta_n u_n)^2}$$

в (7) равномерно ограничены, откуда следует сходимость ряда слева в (5).

---

[8] См., например, Привалов «Введение в теорию функций комплексного переменного», где (гл. IX), вместо рядов (5), рассматриваются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(1 - u_n) + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \ldots + \frac{u_n^{k+1}}{k-1}\right], \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_n^k.$$

Докажем теперь следующую теорему:

Для того, чтобы последовательность положительных чисел $\{p_n\}$ *имела конечную постоянную Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p_n}{s_n}\right)^2.$$

Доказательство. Имеем

$$-\log s_n=\log\frac{1}{s_1}+\log\frac{s_1}{s_2}+\ldots+\log\frac{s_{n-1}}{s_n}=$$

$$=\log\frac{1}{s_1}+\log\left(1-\frac{p_2}{s_2}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{p_n}{s_n}\right),$$

поэтому

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{s_k}-\log s_n=\frac{p_1}{s_1}+\log\frac{1}{s_1}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{p_k}{s_k}+\log\left(1-\frac{p_k}{s_k}\right)\right]$$

или

$$q_n=1-\log p_1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{p_k}{s_k}+\log\left(1-\frac{p_k}{s_k}\right)\right], \tag{9}$$

откуда, на основании вышедоказанной лемпы, последовательность $\{q_n\}$ имеет конечный предел тогда, и только тогда, когда сходится ряд (8).

Из (6) видно, что под знаком Σ в (9) стоят отрицательные величины, поэтому

$$\lim_{h\to\infty} q_n<1-\log p_1. \tag{10}$$

2. Одновременная сходимость двух рядов или несобственных интегралов.

1) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — положительные монотонно возрастающие функции, определение для $x>o$. Доказать, что если существует такая постоянная C, что

$$g(x)<Cx,$$

то интегралы

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{f(x)+g(x)},\quad \int_a^{\infty}\frac{dx}{f(x)}\quad (a>0)$$

сходятся и расходятся одновременно.[9]

[9] Настоящая задача в качестве леммы приводится в статье Ульриха помещенной в журнале Duke Math. J, 5, 1939.

2) Показать, что для монотонно возрастающей последовательности положительных чисел $\{\varrho_n\}$ (n=1, 2, ...) ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\log\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\varrho_n}{2^n}$$

сходятся и расходятся одновременно. Эти же ряды сходятся и расходятся одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\beta_n\varrho_n+(\varrho_{n+1}-\varrho_n)]}{2^n},$$

где $\{\beta_n\}$ последовательность положительных чисел, образующая сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{2^n}.$$

3) Показать, что для монотонно убывающей последовательности положительных чисел $\{\varrho_n\}$ при дополнительном условии

$$1<\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\leqslant\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\leqslant\ldots\leqslant\frac{\varrho_n}{\varrho_{n+1}}\leqslant\ldots$$

ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\log\frac{\log\frac{1}{\varrho_{n+1}}}{\log\frac{1}{\varrho_n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\log\frac{\varrho_n}{\varrho_{n+1}}$$

сходятся и расходятся одновременно.

3. К признаку сходимости Вейерштрасса. Дан ряд

$$\sum a_n \tag{1}$$

с произвольными комплексными членами, обладающими следующим свойством: начиная с некоторого n, отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ может быть представлено в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a}{n}+c_n, \tag{2}$$

где a — постоянная и ряд Σc_n абсолютно сходится. Доказать, что при этом ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}(a)<-1$, и что сходимость в этом случае абсолютная (см. H. Jehle „Eine Bemerkung zum Konvergenskriterium von Weierstrass". Math. Z. 52:1 (1949), 60—61).

4. Несобственные интегралы и интегральные суммы.[10]

1) Пусть $f(x)$ монотонна в интервале $0<x<1$; пусть далее в одной из точек $x=0$ и $x=1$ или в обеих функциях неограничена, но так, что несобственный интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ существует. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx \tag{1}$$

(задача из Полиа и Сеге, № 20 — см. подстрочное примечание).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной внутри интервала $0<x<1$ и *абсолютно* там интегрируемой, для которой предел слева в (1) не существует.

2) Если $f(x)$ в интервале $0<x<1$ монотонна, конечна в точке $x=0$ или $x=1$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} \tag{2}$$

существует, то также существует и $\int_0^1 f(x)\,dx$ (Полиа и Сеге, там же, № 25).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной в интервале $0<x<1$, конечной в одной из точек $x=0$ или $x=1$, для которой существует предел (2), но интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ не существует.

3) Существуют монотонные в интервале $0<x<1$ функции $f(x)$, для которых предел (2) существует, но интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ не существует. (Полиа и Сеге, там же, № 24).

Построить пример функции $f(x)$, непрерывной и монотонной в интервале $0<x<1$ и неограниченной на его концах, для которой предел (2) существует, но интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ не существует даже в смысле

как $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

---

[10] Ниже приводятся три задачи из Полиа и Сеге «Задачи и теоремы из анализа», ч. 1, отд. 2, №№ 20, 23, 24 и предлагается построить к ним примеры, выясняющие значение того или иного условия задач. Такие примеры были построены студентом физико-математического факультета Львовского университета А. А. Гольдбергом.

5. Из занимательной математики.

1) Докажем «исправленную» теорему Пифагора: сумма катетов равна гипотенузе. В самом деле, опуская из середины гипотенузы перпендикуляры на оба катета, получаем два прямоугольных треугольника, сумма четырех катетов которых равна сумме прежних двух. Повторяя указанное разбиение, получаем четыре прямоугольных треугольника с прежней суммой катетов и т. д. Но получающаяся ломаная в пределе стягивается к гипотенузе исходного треугольника, откуда следует наше утверждение. Где ошибка?

2) Чтобы найти сумму бесконечного ряда

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

можно поступить трояким способом: во-первых, имеем

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots,$$

откуда $s=0$. Во-вторых, имеем

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots,$$

откуда $s=1$. Наконец, полагая в ряде

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

$x=1$, получаем для s значение $\frac{1}{2}$. Какое же из трех значений 0, 1 и $\frac{1}{2}$ является истинным значением s?

3) В комоде три ящика с двумя отделениями в каждом. В одном ящике в обоих отделениях золото, в другом ящике в обоих отделениях серебро, а в третьем ящике в одном отделении золото, а в другом серебро.

Вынимают один ящик и смотрят в одно из его отделений: там золото. Спрашивается, какова вероятность того, что во втором отделении ящика также золото?

Решение 1. Так как во втором отделении может быть только золото или только серебро, то искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

Решение 2. Для того чтобы во втором отделении оказалось золото, должен был быть вынут ящик, имеющий в обоих отделениях золото. Но из всех трех ящиков имеется только один такой ящик. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Спрашивается, каково же действительное значение искомой вероятности?