

РЕЦЕНЗИИ

И. Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ. ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ. Под общей редакцией В. Ф. Кагана, А. П. Котельникова, А. П. Нордена, В. Б. Степанова, Н. Г. Чеботарева, П. А. Широкова. Главный редактор В. Ф. Каган.

Т. I. Сочинения по геометрии. Вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана и А. П. Котельникова. Гостехиздат, М.-Л., 1946, 416 стр., цена 19 рублей.

Т. II. Сочинения по геометрии. Вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана, Б. Л. Лаптева, А. П. Нордена и А. Н. Хованского. Гостехиздат, М.-Л., 1949, 604 стр., цена 24 руб. 85 коп.

Т. III. Сочинения по геометрии. Вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана, Б. Л. Лаптева, А. П. Нордена и А. Н. Хованского. Гостехиздат, М.-Л., 1951, 536 стр., цена 23 руб. 20 коп.

Т. IV. Сочинения по алгебре. Вводные статьи и комментарии Н. Г. Чеботарева. Гостехиздат, М.-Л., 1948, 472 стр., цена 20 руб.

За последние годы чрезвычайно возрос интерес к наследию гениального русского математика — профессора Казанского университета Николая Ивановича Лобачевского, творца неевклидовой геометрии, подлинного революционера в науке. Было издано большое количество работ, посвященных жизни и творчеству Лобачевского.

Государственным издательством технико-теоретической литературы предпринято издание полного собрания сочинений великого русского ученого. Оно содержит в шести томах все научное наследие Лобачевского — не только в области геометрии (тома 1—3), но также работы по алгебре (том 4), анализу, механике и астрономии (том 5). Заключительный, шестой том будет содержать литературное наследие Лобачевского, его жизнеописание и подробный обзор творчества.

Уже вышли в свет первый, второй, третий и четвертый тома.

Первый том содержит две работы: «Геометрические исследования по теории параллельных линий» и «О началах геометрии».

Сочинение «О началах геометрии» было опубликовано Лобачевским в журнале «Казанский вестник» в 1829—30 гг., т. е. спустя три года после знаменательного дня 11 (23) февраля 1826 года, когда в заседании физико-математического факультета Казанского университета был заслушан доклад Лобачевского «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных».

«О началах геометрии» является первым печатным изложением неевклидовой геометрии и справедливо считается гранью двух эпох в истории геометрии. С одной стороны, им завершается более чем двухтысячелетний период многочисленных попыток доказательства постулата Евклида о параллельных прямых. Лобачевский показал, что все эти попытки были безуспешными потому, что этого постулата доказать нельзя, так как он не является следствием аксиом, положенных Евклидом в основу геометрии. С другой стороны, Лобачевский своей работой положил начало новому периоду в развитии геометрии — периоду развития неевклидовой геометрии, дав подробное изложение созданной им «воображаемой» геометрии. Эта геометрия, но-

сящая теперь имя Лобачевского, основана на тех же аксиомах, что и «употребительная» (т. е. евклидова) геометрия, за исключением постулата Евклида о параллельных линиях, который был заменен Лобачевским другим более общим постулатом.

Первая часть сочинения «О началах геометрии» (стр. 185—210 настоящего издания) является извлечением из доклада «Краткое изложение основ геометрии». Здесь устанавливаются основные геометрические понятия, излагаются свойства треугольников, теория параллельных и выводятся тригонометрические формулы, имеющие место в новой геометрии.

Вторая (стр. 210—252) и третья (стр. 252—261) части посвящены приложению «воображаемой» геометрии к анализу — к вычислению и преобразованию определенных интегралов. Сначала выводятся уравнения прямой и важнейших кривых; вычисляются длины дуг линий, площади плоских фигур и кривых поверхностей. Затем много внимания уделено вычислению объемов тел. Однако все эти вычисления, представляющие то, что мы обычно называем приложением анализа к геометрии, не являются для Лобачевского самоцелью. Наоборот, он стремится применять свою «воображаемую» геометрию к анализу. Для этого, пользуясь геометрическими образами «воображаемой» геометрии, он вычисляет с помощью интегралов площадь какой-либо фигуры или объем какого-либо тела различными способами. Найдя для них различные выражения и сравнивая последние, он получает преобразование одного интеграла в другой.

Даже для современного читателя, знакомого с содержанием геометрии Лобачевского, чтение мемуара «О началах геометрии», вследствие его чрезвычайной сжатости, представляет большие трудности. Поэтому проф. А. П. Котельников, один из редакторов «Сочинений», сопровождает эту работу более чем двумястами примечаниями, занявшими вдвое большее количество страниц, чем само сочинение. Проф. Котельникову пришлось расшифровать многие вычисления Лобачевского и провести доказательство многих положений, сформулированных Лобачевским, но оставленных им без доказательства.

Сжатость изложения и новизна идей были причиной того, что современниками Лобачевского это сочинение, как и последовавшие за ним «Воображаемая геометрия», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» и некоторые другие, остались непонятыми. Поэтому Лобачевский опубликовал в 1840 г. в Берлине отдельным изданием на немецком языке небольшое сочинение: «Геометрические исследования по теории параллельных линий», в котором очень просто и изящно изложил начала «воображаемой» геометрии. В этой статье он излагает свою теорию параллельных линий и дает остроумный геометрический вывод тригонометрических формул «воображаемой» геометрии. Большое количество изданий (на русском языке — 3 издания, на немецком — 2, на французском — 3, на английском — 5, на сербском — 1) говорят о популярности этой работы.

Совершенно правильно поступила редакция «Сочинений», которая, нарушив хронологический принцип, поместила на первом месте «Геометрические исследования» в новом переводе профессора В. Ф. Кагана. Переводу предпослана вводная статья профессора В. Ф. Кагана «Учение о параллельных линиях и открытие неевклидовой геометрии», в которой дается исторический очерк развития теории параллельных линий от Евклида до Лобачевского и приводятся различные попытки доказательства постулата параллельности (Прокл, Нассир-Эддин, Валлис, Бертран, Лежандр), безуспешность которых привела Лобачевского к мысли о недоказуемости этого постулата и к созданию неевклидовой геометрии. Профессору В. Ф. Кагану принадлежат также многочисленные примечания и комментарии к «Геометрическим исследованиям».

Обе работы Лобачевского, помещенные в первом томе «Сочинений», в соедине-

нии с вводными статьями, примечаниями и комментариями, могут служить хорошим введением в круг замечательных идей, в науку, ныне носящую название неевклидовой геометрии Лобачевского. Книга доступна преподавателям математики, студентам, а в значительной своей части так же и лицам, интересующимся геометрией, но не знакомым с основами высшей математики.

Второй том «Сочинений» содержит две работы Лобачевского: «Геометрия» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

«Геометрия», — самое раннее из дошедших до нас сочинений Лобачевского, при жизни автора напечатана не была. Рукопись этого сочинения была найдена в 1898 году и печатное издание его вышло в свет в 1909 году.

«Геометрия» представляет собой краткий обзор элементарной геометрии, предназначенный Лобачевским для читателей, уже усвоивших ее основы, в частности — для студентов Казанского университета, которым Лобачевский читал курс геометрии в первый период своей педагогической деятельности. В этом сочинении Лобачевский, критически подойдя к традиционной системе Евклида, сделал попытку изложения начал геометрии отличным от Евклида способом. В 1823 году Лобачевский представил рукопись «Геометрии» для напечатания, но в силу отрицательного отзыва академика Н. И. Фусса, не понявшего, для какого читателя предназначалось это сочинение и с какими целями оно было написано, «Геометрия» напечатана не была. Вскоре после этого, к 1826 году, идеи, изложенные в «Геометрии», оказались для Лобачевского пройденным этапом и он не делал повторных попыток опубликования этого сочинения.

Для современного читателя, как указывает в своей статье профессор В. Ф. Каган, «Геометрия» представляет большой интерес как определенный этап в ходе развития идей Лобачевского.

Второе сочинение Лобачевского, вошедшее во второй том — «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», впервые напечатанное в «Ученых записках Казанского университета» в 1835—1838 годах — самое обширное из сочинений Лобачевского по геометрии и является, пожалуй, главным делом его жизни.

В этом сочинении Лобачевский наиболее подробно и систематически изложил свои идеи, относящиеся не только к созданной им неевклидовой геометрии, но также и к изложению основ геометрии, коренным образом отличающемуся от традиционного изложения, восходящего к «Началам» Евклида. «Новые начала» состоят из «Вступления» и тринадцати глав. Весь материал книги может быть разбит на три существенно различные по содержанию части.

Первая часть — «Вступление» и главы I—VI (стр. 147—265) — содержит изложение той части геометрии, которая не зависит от аксиомы параллельности, т. е. содержит материал, общий для геометрии Евклида и для геометрии Лобачевского. Эта часть геометрии позднее была названа «абсолютной геометрией».

Вторая часть — главы VII—XI (стр. 266—345) — начинающаяся введением более общей, чем евклидова, аксиомы параллельности, посвящена изложению той части геометрии, которая существенно зависит от этой аксиомы. Здесь Лобачевский развивает свою «воображаемую» геометрию и одновременно развивает «употребительную» (т. е. евклидову) геометрию, представляющую собой простейший предельный случай его «воображаемой» геометрии.

Последняя, третья часть, — главы XII—XIII (стр. 346—454) — посвящена весьма подробному изложению (с исследованием вопроса об ошибках) численного решения прямолинейных треугольников. Эта часть в общем плане всего сочинения почти не связана с первыми двумя частями. Лобачевский не указал причин, побудивших его подробно остановиться на этих вопросах. Повидимому, можно согласиться с редакторами издания «Новых начал», высказавшими предположение, что вычисления Лобачевского являлись подготовкой для опытной проверки справедливости неевкли-

довой геометрии с помощью астрономических измерений. О необходимости и возможности такой проверки Лобачевский неоднократно упоминал в своих сочинениях.

Второй том, как и первый, снабжен вводными статьями и многочисленными примечаниями, помогающими усвоить содержание помещенных в нем двух сочинений Лобачевского.

В третьем томе помещены остальные геометрические сочинения Лобачевского: «Воображаемая геометрия», «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» и «Пангеометрия».

«Воображаемая геометрия» была напечатана в 1835 году в «Ученых записках Казанского университета», а спустя два года с некоторыми сокращениями — в «Журнале чистой и прикладной математики», издававшемся в Берлине. В этом сочинении, в отличие от ранее опубликованных работ, Лобачевский при построении неевклидовой геометрии исходит из соображений аналитического характера. В качестве исходных положений он берет тригонометрические соотношения между элементами прямолинейного прямоугольного треугольника. Здесь же Лобачевский приводит доводы в пользу непротиворечивости своей геометрии. Значительная часть сочинения посвящена аналитическим приложениям «воображаемой» геометрии. Лобачевский получает значения большого количества ранее неизвестных определенных интегралов, пользуясь тем же способом, что и в работе «О началах геометрии».

Сочинение «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» было напечатано в тех же «Ученых записках» на год позже и, являясь естественным продолжением «Воображаемой геометрии», имело целью показать применимость новой геометрии в решении различных задач анализа, особенно в вычислении определенных интегралов. Лобачевский находит около 50 новых интегралов, большая часть которых вошла в различные таблицы и справочники.

«Пангеометрия» была написана учениками под диктовку тяжело больного Лобачевского за год до его смерти. Это было его последнее сочинение. Напечатано оно было в 1855 году в «Ученых записках Казанского университета», а год спустя — на французском языке в специальном юбилейном сборнике, изданном в честь 50-летия Казанского университета. Давая этому сочинению название «Пангеометрия», Лобачевский хотел подчеркнуть, что открытая им геометрия имеет всеобъемлющий характер и включает в себя евклидову («употребительную») геометрию как частный случай.

«Пангеометрия» представляет собой сжатое изложение всех основных результатов по неевклидовой геометрии, полученных Лобачевским в его прежних исследованиях. Сочинение начинается введением и обоснованием неевклидовой геометрии. Затем изложены основные сведения по прямолинейной тригонометрии и аналитической геометрии в неевклидовой плоскости, а также дается применение бесконечно малых для вычисления длин, площадей и объемов. В конце сочинения Лобачевский снова возвращается к вопросу, чрезвычайно интересовавшему его всю жизнь — вопросу о непротиворечивости неевклидовой геометрии.

Отметим еще, что после «Геометрических исследований» «Пангеометрия» — самое распространенное из сочинений Лобачевского. Оно было издано 10 раз на русском, французском, немецком и итальянском языках.

Четвертый том «Сочинений» Лобачевского содержит обе его работы по алгебре: «Алгебра или вычисление конечных» и «Понижение степени в двучленном уравнении, когда показатель без единицы делится на восемь».

Первое сочинение представляет собой обстоятельный учебник алгебры, изданный в Казани в 1834 году и предназначенный для университетского преподавания. Это был первый опубликованный в России оригинальный курс высшей алгебры. В первых главах излагаются начальные основы алгебры, а вторая часть посвящена высшим отделам алгебры и содержит не только много оригинальных выводов, но и но-

вые результаты, особенно в главе XVI — «Решение двучленных уравнений». Отметим также, что в последней, XVII главе — «Решение всякого алгебраического уравнения», дается способ приближенного вычисления корней, впоследствии неправильно получивший название способа Грегге, несмотря на то, что он был найден Лобачевским раньше, чем Грегге.

Во второй работе «Понижение степени в двучленном уравнении» дается решение уравнения $x^n - 1 = 0$, связанного с геометрической задачей деления окружности, для случая, когда число $n - 1$ делится на восемь. По поводу этой статьи профессор Н. Г. Чеботарев пишет: «В этой статье Лобачевский выказал свою многогранность: если в своих геометрических исследованиях он был первоклассным мыслителем, то здесь, в теории чисел, весьма далекой от предмета его постоянных занятий, он проявил себя как блестящий мастер вычислительной техники» (стр. 443—444).

Редактор четвертого тома, покойный профессор Казанского университета Н. Г. Чеботарев, снабдил работы Лобачевского по алгебре ценными вводными статьями и комментариями.

В заключение необходимо отметить, что редакция и издательство подошли к изданию «Сочинений» Лобачевского со вниманием, любовью и тщательностью. Внешнее оформление книги не оставляет желать ничего лучшего. Чертежи сделаны четко. Опечаток почти нет. К книгам приложены на 33 вкладных листах портреты Лобачевского, фотографии титульных страниц первых изданий его сочинений и некоторых документов, связанных с деятельностью Лобачевского.

Будем с нетерпением ожидать выхода в свет последних двух томов этого издания, достойного памяти нашего великого соотечественника.

2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ БИОГРАФИИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Изд. Академии Наук СССР. М.-Л., 1948, 828 стр., тираж 3000, цена 70 руб.

В серии, носящей общее название «Труды комиссии по истории Академии наук СССР», отдельным томом изданы «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Трудно переоценить значение этого издания. Пожалуй, нельзя указать ни одной работы, вышедшей после 1948 года и посвященной изучению различных сторон деятельности Лобачевского, в которой не цитировались бы неоднократно документы, изданные Л. Б. Модзалевским, совершившим огромный труд, собрав и прокомментировав большое количество материалов либо разбросанных по старым, недоступным изданиям, либо находящихся в архивах.

Сборник материалов состоит из трех разделов. В первый, основной раздел включены 622 документа, охватывающих период от 1792 до 1859 года. Сюда же входит сохранившаяся переписка Лобачевского и некоторые другие материалы. Эти документы всесторонне характеризуют факты личной биографии Лобачевского, его многогранную научную, педагогическую, административную деятельность в Казанском университете, его философские и педагогические взгляды, его трудную борьбу за признание своих гениальных научных идей. Многие материалы опубликованы впервые и заставляют коренным образом изменить взгляд на многие факты жизни и деятельности Лобачевского, установившиеся по традиции с легкой руки первых его биографов. Даже такой вопрос, как дата рождения Лобачевского, можно считать окончательно решенным только в 1948 году, когда детальным анализом архивных материалов было установлено, что Лобачевский родился 20 ноября 1792 г. (ст. ст.), а не 22 октября 1793 года (ст. ст.), как считалось прежде.

Второй раздел книги содержит воспоминания о Лобачевском его детей, бывших студентов Казанского университета и других лиц. Эти материалы обладают, конечно, различной степенью достоверности, определяемой характером взаимоотношений и временем написания, но дополняют документальные материалы и характеризуют Лобачевского как человека. Здесь же в приложении даны некоторые материа-

лы, составленные значительно позже смерти Лобачевского — в конце XIX века и позже.

Весьма ценен третий раздел книги, представляющий собой очень подробный словарь-указатель всех лиц, упоминаемых в тексте, а также и других лиц, принадлежащих к казанскому окружению Лобачевского и имеющих отношение к его жизни и деятельности. В этом словаре содержится более 800 имен, о каждом из которых даются некоторые биографические сведения и указываются основные источники. Словарь является своего рода комментарием к изданным материалам и дает много необходимых сведений каждому, занимающемуся биографией Лобачевского, а также историей казанской культурной жизни первой половины XIX века.

Все документы и материалы, помещенные в книгу, снабжены точными указаниями о местонахождении каждого из них и о месте их опубликования.

В книге имеются около 30 иллюстраций — портреты Лобачевского и близких ему лиц, фотографии некоторых документов, а также копии с литографий и рисунков, изображающих основные постройки в Казани во времена Лобачевского.

В целом рецензируемая книга представляет собой крупнейший вклад в литературу, посвященную нашему великому математику.

В предисловии к книге академик С. И. Вавилов, по инициативе которого она была издана, писал: «Есть основания думать, что настоящая книга с материалами о Н. И. Лобачевском далеко не исчерпывает все интересное и важное о нем, что можно еще разыскать в государственных архивах и у частных лиц, и мы надеемся, что Л. Б. Модзалевский продолжит свою работу». Академик С. И. Вавилов был прав — в последние годы, прошедшие со времени издания книги, в различных архивах было найдено еще много весьма интересных материалов, дополнительно освещающих различные стороны деятельности Лобачевского.

Значительная часть из них не была еще опубликована.

К несчастью, Л. Б. Модзалевский трагически погиб в 1948 г. в расцвете своих сил и не смог продолжить важную для истории русской науки работу. Все же мы надеемся, что в дополнение к основному фонду материалов, изданных Л. Б. Модзалевским, будут отдельным сборником изданы новые найденные документы.

Это даст возможность на основе всех собранных материалов приступить к разработке капитальной научной биографии Лобачевского.

В. Ф. РОГАЧЕНКО.

ЕВКЛИД. «НАЧАЛА». Перевод с греческого и комментарий Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. Книги I—VI, Гостехиздат, М.-Л., 1948, 448 стр., цена 19 руб. Книги VII—X, Гостехиздат, М.-Л., 1949, 512 стр., цена 21 руб. 20 коп. Книги XI—XV, Гостехиздат, М.-Л., 1950, 332 стр., цена 13 руб. 80 коп.

Д. ГИЛЬБЕРТ. ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ. Перевод с 7-го немецкого издания И. С. Градштейна, под редакцией и с вступительной статьей П. К. Рашевского. Гостехиздат, М.-Л., 1948, 492 стр., цена 18 руб.

Первая из этих книг — «Начала», написанная около 300 г. до н. э. знаменитым александрийским математиком Евклидом, является первым дошедшим до нас систематическим изложением геометрии, которую по имени автора «Начал» называют евклидовой геометрией, в противоположность геометрии неевклидовой, созданной великим русским ученым Н. И. Лобачевским.

Вторая книга — «Основания геометрии», принадлежащая перу одного из крупнейших математиков XX века Д. Гильберта, написана в 1899 г. и почти сразу стала классической книгой. В ней подводится итог более чем двухтысячелетнего развития евклидовой геометрии.

На русском языке «Начала» издаются не впервые. С 1739 г. до 1880 г. они издавались семь раз. Некоторые из этих изданий представляют собой переводы не с греческого подлинника, а с латинского и даже с французского и немецкого переводов. Все они в настоящее время устарели.

Настоящее издание является первым полным переводом лучшего критического издания греческого текста, выпущенного Гейбергом в семи томах (1883—1888 гг.). Все издание состоит из трех томов. Первый том содержит I—VI книги «Начал» (планиметрия). Второй том содержит VII—X книги (арифметика и классификация иррациональностей). Третий том содержит остальные книги «Начал» (стереометрия).

Первая книга «Начал», кроме определений и перечня постулатов и аксиом, содержит все основные геометрические предложения и построения. Здесь исследуются свойства треугольников и параллелограммов, рассматривается вопрос о преобразовании площадей. Книга заканчивается теоремой Пифагора и теоремой, ей обратной.

Вторая книга содержит так называемую «геометрическую алгебру» древних греков. В ней рассматриваются соотношения между площадями прямоугольников и квадратов, построенных на отрезках, связанных определенным образом.

В третьей книге изучаются свойства окружности, касательных к ней, центральных и вписанных углов.

В четвертой книге рассматриваются вписанные и описанные многоугольники и построение правильных многоугольников.

Пятая книга посвящена изложению теории отношений и пропорций.

В шестой книге на основании этой теории строится учение о подобии фигур.

В VII—IX книгах излагается арифметика или, вернее, теория целых чисел и строятся рациональные числа. В VII книге даются предложения, позволяющие найти общий наибольший делитель или установить взаимную простоту целых чисел. Здесь изложен так называемый алгоритм Евклида. VIII и IX книги содержат теорию непрерывных числовых пропорций. В IX книге, в частности, доказываются такие интересные предложения, как существование бесконечного множества простых чисел и определение суммы геометрической прогрессии. На базе предложений, рассмотренных в VII—IX книгах, в следующей X книге, являющейся наиболее трудной книгой «Начал», дается полная классификация биквадратных иррациональностей.

XI книга содержит основные предложения стереометрии, в том числе учение об объемах параллелепипедов и призм. Объемы остальных простейших тел рассмотрены в XII книге с помощью так называемого «метода исчерпывания», представляющего собой своеобразную античную форму современного метода пределов.

Последняя, XIII книга, содержит теорию правильных многогранников. Книга заканчивается доказательством того, что рассмотренные Евклидом пять правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр) являются единственными правильными многогранниками.

В третьем томе рецензируемого издания после последней XIII книги евклидовых «Начал» в качестве приложения напечатаны так называемые XIV и XV книги, которые, как было установлено еще в XVI веке, не принадлежат Евклиду. Первая из них была написана александрийским математиком Гипсиклом (ок. 200 г. н. э.), а вторая принадлежит неизвестному автору VI века н. э. Эти две книги обычно включаются в полные издания «Начал», так как в них, как и в XIII книге, проводится исследование правильных многогранников.

Несомненная заслуга Евклида в том, что он достаточно четко поставил требование: на основании небольшого числа первоначальных понятий и основных положений (постулаты и аксиомы) путем логической дедукции построить все здание геометрии — систему теорем, выражающих свойства и отношения геометрических фигур и тел. Это требование Евклид старался выполнить, хотя это ему не везде удавалось.

Изучение «Начал» обнаружило в них ряд недостатков. Некоторые из них были

замечены еще греческими математиками, а некоторые могли быть замечены только в XIX веке. Одним из этих недостатков является то, что Евклид в доказательствах все же иногда обращается к интуиции или пользуется понятиями, не формулируемыми в основных определениях и предложениях. Так, например, уже в первом предложении первой книги («на данном отрезке построить равносторонний треугольник»), Евклид допускает, что две окружности, описанные из концов отрезка, служащего их радиусом, всегда пересекаются в двух точках, т. е. пользуется неявно предположением о непрерывности линий, хотя нигде этого не постулирует. Так же точно в предложении 12 («опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую») Евклид снова обращается к интуиции, считая, что прямая и окружность радиуса, большего чем расстояние точки до прямой, пересекаются в двух точках. В четвертом предложении той же книги Евклид прибегает к движению для доказательства равенства треугольников с помощью наложения, хотя возможность наложения нигде не постулирует. Был обнаружен ряд других недостатков системы Евклида.

Однако, в основном, прав профессор М. Я. Выгодский, который показывает, что слишком суровая критика Евклида в значительной части несправедлива. Не останавливаясь на этом вопросе, отошлем читателя к статье профессора М. Я. Выгодского «Начала» Евклида», помещенной в I выпуске сборника «Историко-математические исследования» (Гостехиздат, 1948). В нем имеется еще ряд статей (И. Г. Башмаковой, А. И. Маркушевича, А. Е. Раик), посвященных VII—X книгам «Начал».

Большую помощь изучающему Евклида окажут подробные комментарии проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского, являющегося одним из лучших знатоков Евклида. О своем переводе и комментариях к нему он пишет в предисловии: «Главное содержание моих комментариев состоит в описании различных евклидовых положений в эволюционирующем в продолжении 400 лет геометрическом учебнике. Можно сказать, что я задаюсь целью дать «Начала» Евклида такими, какими они были в прошлом, т. е. в их первоначальной форме, а затем такими, какими они становятся в процессе эволюции математической мысли, превращаясь постепенно в школьный учебник геометрии».

Для многих поколений «Начала» служили руководством, по которому знакомились с геометрией. Все позднейшие школьные учебники геометрии в той или иной степени находятся под их влиянием. Но не только учебно-методическое значение имеют Евклидовы «Начала». Эта книга является исходным пунктом для многих теоретических работ, а часто и образцом строгого и логически-стройного научного изложения. Так, например, основатель классической механики Ньютон в «Математических началах натуральной философии» изложил результаты, полученные им с помощью анализа бесконечно-малых в форме, близкой к форме Евклидовых «Начал».

Многочисленные попытки доказательства пятого постулата Евклида (о параллельности прямых) послужила стимулом к открытию неевклидовой геометрии, в которой этот постулат заменен другим (постулат Лобачевского).

Работы Лобачевского, Римана, Клейна привели к тому, что в начале восьмидесятых годов прошлого столетия снова была поставлена задача аксиоматического построения евклидовой геометрии. Первое решение этой задачи было дано двадцать два века тому назад Евклидом, но это решение, гениальное для своей эпохи, не могло уже удовлетворить критическую мысль XIX века. Вместе с постановкой этой задачи был подготовлен материал для ее решения. Были выделены группы аксиом и проведено частичное исследование отношения между этими группами. Много ценного в этом вопросе было сделано Пашем в его «Лекциях о новой геометрии» (1882 г.), а также Пеано и рядом его учеников. Наконец, в 1899 г. появилась выдающаяся по богатству идей и разнообразию фактического содержания, книга Гильберта «Основания геометрии», в которой он дал свою систему аксиом, свое построение

теории пропорций и теории измерения, а также выяснил многие другие принципиальные вопросы обоснования геометрии.

Эта книга подвела итог всем предыдущим исследованиям по основаниям геометрии. В ней впервые четко были сформулированы задачи аксиоматического построения геометрии и требования, предъявляемые к такому построению. С другой стороны, книга Гильберта послужила источником дальнейших многочисленных исследований по этим вопросам.

Остановимся вкратце на содержании книги Гильберта. В начале первой главы дается перечень элементов пространства и основных отношений между ними. Затем формулируются аксиомы, являющиеся описанием этих отношений. Здесь же даются необходимые определения и доказываются основные теоремы — следствия перечисленных аксиом. Вторая глава посвящена логическим проблемам, возникающим в связи с аксиоматикой — вопросу о непротиворечивости и взаимной независимости аксиом. Непротиворечивость системы доказывается Гильбертом с помощью построения соответствующей аналитической интерпретации, которая предполагается свободной от противоречий, т. е. построенная система аксиом непротиворечива, если непротиворечива система аксиом арифметики действительных чисел. Вопрос о независимости Гильберт исследует только для некоторых аксиом. Содержание остальных глав посвящено, главным образом, выяснению роли аксиомы непрерывности Архимеда. Главный результат, полученный Гильбертом состоит в том, что геометрия может быть развита во всем существенном без использования этой аксиомы. Такая геометрия называется не-архимедовой. В третьей и четвертой главах Гильберт построил не-архимедову метрическую геометрию, показав, что теория подобия и теория площадей могут быть строго обоснованы без использования аксиом непрерывности. Для этого Гильберт на основании теоремы Паскаля, которая доказывается без привлечения аксиом непрерывности, строит особое исчисление отрезков, позволяющее обосновать эти теории без привлечения действительного числа, как это делается обычно. В пятой и шестой главах Гильберт исследовал не-архимедову проективную геометрию. Прежде всего, построив новое исчисление отрезков без использования аксиом конгруэнтности, он вводит систему координат, а следовательно, и методы аналитической геометрии в не-архимедово проективное пространство. Пользуясь этим, Гильберт исследует значение теоремы Дезарга и гомологических треугольников в построении проективной геометрии. Именно, он установил, что теорема Дезарга не является следствием лишь плоскостных проективных аксиом, т. е., если мы желаем строить плоскую проективную геометрию, то к плоскостным проективным аксиомам необходимо добавить в качестве аксиомы еще и теорему Дезарга. Затем, подвергнув исследованию теорему Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, Гильберт установил, что эта теорема не может быть доказана без аксиом непрерывности на основании только проективных аксиом и не только плоских, но и пространственных. Последняя, седьмая, глава посвящена исследованию вопроса о геометрических построениях в не-архимедовой геометрии, совершаемых с помощью линейки и эталона длины.

К основному тексту книги приложены в качестве дополнений десять статей, написанных Гильбертом в различное время и посвященных различным вопросам обоснования геометрии, а также общим вопросам обоснования математики.

Книге предпослана статья редактора перевода профессора П. К. Рашевского: «Основания геометрии» Гильберта и их место в историческом развитии вопроса».

Основной текст книги сопровождается большим количеством примечаний, поясняющих и более подробно развивающих иногда черезчур краткое изложение автора.

В. Ф. РОГАЧЕНКО.