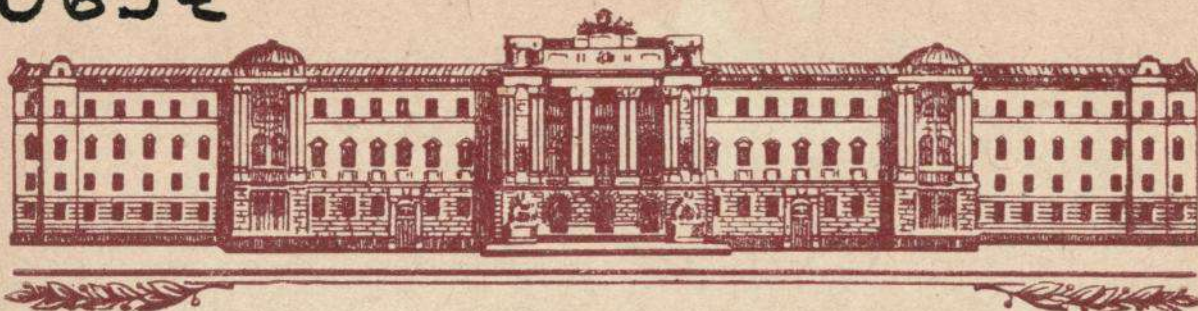


[2]
90637



ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ІВ. ФРАНКА

ЗБІРНИК РОБІТ АСПІРАНТІВ

КАФЕДРИ ПРИРОДНИЧИХ НАУК



ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

1980

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ТА СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ЗБІРНИК РОБІТ АСПІРАНТІВ

КАФЕДРИ ПРИРОДНИЧИХ НАУК

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1960

Друкується за рішенням
редакційно-видавничої ради
при Львівському державному
університеті ім. Ів. Франка

Відповідальні редактори
проф. Я. Б. Лопатинський,
проф. М. П. Шереметьєв

К. П. МАЛЬЧЕВСЬКА

ДО БІОЛОГІЇ РОЗМНОЖЕННЯ ПРОМИСЛОВИХ РИБ ЗАБОЛОТІВСЬКИХ ОЗЕР ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКОГО ПОЛІССЯ

Заболотівська група озер західноукраїнського Полісся займає друге по площі місце серед озер Волинської області, проте іхтіофауна цих водоймищ до останнього часу не вивчена. Дана робота є частиною іхтіологічних досліджень, проведених кафедрою зоології хребетних тварин Львівського державного університету ім. Ів. Франка в різні сезони 1953—1955 рр. і присвячена вивченню характеру та умов розмноження промислових видів риб в озерах Тур, Пісочне та Велике Домашне.

Завданням наших досліджень було виявлення факторів, які негативно впливають на нерест цінних видів риб, та розроблення міроприємств по створенню оптимальних умов для їх розмноження. Поряд з вивченням природних нерестилищ та умов нересту риб, проводилась робота в напрямі підвищення ефективності розмноження ляща шляхом спорудження штучних нерестилищ. В роботі зазначені строки нересту риб. Для деяких видів риб, переважно з одноразовим типом ікрометання, був виявлений час статевого дозрівання.

Результати наших досліджень дали можливість доповнити літературні дані про розмноження риб, розробити заходи по поліпшенню умов відтворення цінних в рибогосподарчому відношенні видів риб та охорони їх в період нересту, а також поставити питання про необхідність здійснення в найближчий час заходів по раціональному використанню запасів риби в Заболотівських озерах.

КОРОТКА ЛІМНОЛОГІЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАБОЛОТІВСЬКИХ ОЗЕР ТА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

Група Заболотівських водоймищ нараховує 21 озеро, які розташовані в північно-західній частині українського Полісся, в межах Волинської області, на водорозділі між басейнами Західного Буга і Прип'яті. Значні простори дослідженої місцевості дуже заболочені у зв'язку з високим стоянням ґрунтових вод, що обумовлюється своєрідними фізико-географічними умовами Поліської низини. Водобіг у більшості Заболотівських озер здійснюється за рахунок повільного руху поверхневих та ґрунтових вод у напрямку дренуючих місцевість річкових систем. У минулому з метою осушення боліт на території досліджуваного району були прориті канали-притоки і канали-стоки, більшість яких з'єднала багато Заболотівських озер між собою і з річками. Зараз ці канали

місцями заросли макрофітами, звузились, дещо обміліли, внаслідок чого зв'язок між озерами погіршився. В залежності від величини площі, глибини, місця розташування і т. п. Заболотівські озера мають різне рибогосподарське значення і по-різному використовуються промислом.

Дослідження проводились на найбільших озерах Заболотівської групи: оз. Тур (1296 га, басейн Західного Буга), оз. Пісочне і Велике Домашнє (281 га і 138 га, басейн р. Прип'яті).

Озеро Тур являє собою обширну мілководну водойму з низькими заболоченими берегами. Максимальна глибина озера 2,6 м. В південно-західну частину озера впадає Заболотівський канал-приток. Турський канал-сток, ширина якого 12 м, виходить з північно-східного краю озера, проходить по болотах в північно-східному напрямку, з'єднується з Оріхівським каналом, який в свою чергу сполучається з Дніпро-Бугським каналом. Дно озера Тур переважно займають відклади мулу (торф'янистий сапропель). В південно-східній частині озера є смуга пісчаних ґрунтів. Більшу частину прибережної зони вкриває надводна рослинність, однак в озері переважає м'яка підводна рослинність, яка займає майже половину дзеркала водойми. Завдяки великій площі та незначній глибині влітку оз. Тур добре прогрівається, внаслідок чого спостерігається достатня аерація по всій товщі води. Вміст кисню в цей час не спадає нижче 6,0 мг/л. Озеро Тур відноситься до евтрофного типу, з деякими ознаками дистрофії. Згідно даним П. Д. Резвого (1955), поживність озера по зоопланктону і зообентосу середня.

Озеро Велике Домашнє, найменше і найглибше з досліджених озер, лежить на південь від р. Прип'яті. Максимальна глибина озера — 9 м. З північної частини озера виходить канал-сток, який проходить по болотистій низині і з'єднує оз. Велике Домашнє з Прип'яттю. Канал, проритий в південно-східній частині озера, зв'язує між собою озера Велике Домашнє і Пісочне. Озерна котловина озера Велике Домашнє вкрита муловими відкладами сапропелевого типу. Пісчані ґрунти займають переважно прибережну смугу в південній і південно-східній частинах озера. Вздовж болотистих берегів в прибережній зоні на північному заході і півночі озера добре розвинені зарості жорсткої надводної та м'якої підводної рослинності. Дві треті берегової обмілі зовсім позбавлені повітряної рослинності.

Влітку 1953 і 1954 рр. спостерігалась термічна стратифікація. Різниця в температурі поверхневих і придонних шарів води складала 5,0°. На глибині 7 м і нижче в придонному горизонті води спостерігається дефіцит кисню. Озеро Велике Домашнє за трофічним характером є типовим евтрофним водоймищем. За даними П. Д. Резвого (1955), це озеро відноситься до високопродуктивних водойм (поживність по рачковому планктону 11,2 г/м³, середня біомаса бентоса — 50 кг/га).

Озеро Пісочне займає друге місце по розмірах серед озер Заболотівської групи. Лежить воно на правобережжі Прип'яті, на південному заході від оз. Велике Домашнє, на віддалі 600 м від останнього. Максимальна глибина озера 8 м. Крім вищезгаданого каналу, що з'єднує між собою озера Пісочне та Велике Домашнє, оз. Пісочне на півдні сполучується завдяки каналу-притоку з оз. Мале Домашнє. В роки з високим рівнем води між озерами Пісочне й Мале Домашнє відбувається водообмін. В північній частині, де знаходяться найбільші глибини, в донних відкладах переважає сапропелевий мул з домішкою вапнякості глини, кількість якої далі, на південь озера збільшується.

В південній частині озера розташовані «грудки» — підвищення дна, утворені з виходів мергелю—відкладів, які складаються з вапнякості глини. Вздовж берега лежать пісчані ґрунти. Прибережна зона озера покрита рослинністю, значні зарості якої, особливо надводної, розташовані на східному побережжі. Влітку спостерігається малопомітна різниця температури в поверхневих і придонних горизонтах води. В придонній частині озера на глибинах нижче 6 м спостерігається недостатня кількість кисню. Озеро Пісочне — евтрофне водоймище, характеризується високою поживністю по планктону ($11,1 \text{ г/м}^3$), але муловий зообентос тут значно бідніший, ніж в оз. Велике Домашнє (П. Д. Резвой, 1955).

При складанні вищенаведеного опису Заболотівської групи озер були використані роботи з питань геологічного минулого, морфометрії, розміщення рослинних угруповань, а також дані гідробіологічних досліджень Заболотівських озер, висвітлені в статтях С. Ленцевича (1931), А. В. Топачевського (1951), П. Д. Резвого (1955), М. А. Бухало (1955), О. Т. Артющенко і О. П. Оксіюк (1955).

Матеріал для даної роботи ми збирали на протязі 1953—1955 років в переднерестовий період і під час нересту промислових видів риб озер Тур, Пісочне і Велике Домашнє.

Для ознайомлення з природними нерестилищами риб в час їх ікрометання на Заболотівських озерах проводились рекогносцировочні обслідування місць нересту. Місця і час нересту визначались шляхом безпосереднього спостереження за поведінкою плідників, огляду нерестилищ та наявності відкладеної ікри на субстраті. При визначенні початку і кінця нересту завжди враховувався стан гонад, а у деяких коропових риб також наявність вторинних статевих ознак у самців. З цією метою систематично досліджувався стан статевих продуктів риб, відловлених промислом. Наявність в уловах текучих самок ми вважали за початок нересту, кінець нересту встановлювали по наявності в уловах самок, переважна більшість яких знаходилась на VI стадії статевої зрілості.

Крім того, в деяких випадках були проведені дослідні відлови під час нересту риб, а також враховувалось, як часто зустрічаються дані види риб у промислових уловах. При вивченні умов розмноження зверталась увага на фактори, які визначають початок і хід нересту, а також впливають на характер розміщення нерестилищ. Нами враховувалась температура води, субстрат, глибина, ґрунт, кількість розчиненого у воді кисню, рН. Ці ж фактори середовища ми брали до уваги в період нересту ляща і розвитку його ікри, відкладеної на штучних нерестилищах. Температуру води на нерестилищах вимірювали тричі на день. Субстрат з ікрою, відкладеною на нерестилищах, діставали за допомогою скребачки, граблів та «кішки». Для вимірювання глибини розташування нерестилищ користувались воронковим лотом. За допомогою лота діставали також зразки ґрунту. Розчинений у воді кисень визначали за методом Вінклера, активну реакцію рН — за Міхаелесом.

Ступінь статевої зрілості риб визначалась за 6-бальною шкалою зрілості статевих гонад.

Матеріал по вивченню риб-хижаків, ворогів ікри риб зібрано під час нересту ляща і плотви на озерах Велике Домашнє і Пісочне шляхом обловлювання їх нерестилищ дрібнокомірковими сітками (дель 7 мм).

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕРЕСТИЛИЩ

Відомо, що найбільш характерною рисою нерестилищ фітофільних риб в озерах є рослинний субстрат, на якому плідники відкладають ікру в поверхневому шарі води, в умовах повільної або цілком відсутньої течії. Рано навесні риби використовують для кладок ікри залишки відмерлої рослинності і коріння, після прогріву води, наприкінці весни та влітку — пагони молодих, свіжих рослин, а також коріння (С. Г. Крижановський, 1948; П. Д. Носаль, 1948; П. А. Дрягін, 1952; Л. К. Захарова, 1956 та інш.). Такий тип нерестилищ переважає і в досліджених нами водоймах.

Розміщення нерестових площ в озерах Заболотівської групи в значній мірі залежить від характеру розташування ґрунтів, рослинних угруповань і висоти повіді, яка має особливо велике значення для ходу нереста щуки і ляща в озері Тур.

Основні нерестилища багатьох видів риб зосереджені в озерах Заболоття на тих самих ділянках. Переважна більшість коропових та щука в роки із зниженим рівнем води (1954) нерестують в прибережному мілководді на глибині до 60 см. В оз. Тур ці риби використовують для нересту субстрат, розміщений здебільшого на муляних ґрунтах, в озерах Пісочне і Велике Домашне — на ділянках з замуленим та піщаним дном. Окуневі нерестують серед залишків торішньої рослинності, близько дна, на твердих, в основному піщаних відмілинах, на глибині 30—80 см. Частково окунь, а також лящ у період другого нересту на оз. Пісочне відкладають ікру в районі підводних горбів (Середня, Кругла та Сякімова «гірки»), розміщених на значній віддалі від берега, в південній частині водойми. Стрічки ікри окуня ми знаходили тут на глибині 1,5—2,5 м. Глибина, на якій нерестував лящ, не перевищувала 3,0 м.

Залежно від гідрометеорологічних умов місця нересту риб у Заболотівських озерах в окремі роки дещо змінюються. Особливо яскраво ця залежність виявляється у щуки озер Тур і Велике Домашне.

Спад рівня води у водоймах дослідженого району в посушливий 1953 р. і невелика кількість опадів, що випала взимку 1953—1954 рр., створили навесні 1954 р. малосприятливі умови для нересту щуки. Внаслідок низького рівня води природні нерестилища щуки — ділянки боліт, що прилягають до озер Тур і Велике Домашне, залишились сухими, і щука вимушена була нерестувати на мілководді вздовж бережжя озер.

Цілком іншим був характер нерестилищ щуки в 1955 р. Значні опади, що випали в західноукраїнському Поліссі на початку 1955 р., визначили високе стояння ґрунтових вод у районі Заболотівських озер (за нашими спостереженнями, у квітні 1955 р., рівень води в оз. Тур піднявся на 65 см). В умовах високої повіді нерест у щуки проходив на залитих весняною водою болотах Островки, Копань, Риз, Липи (оз. Тур) та на болоті Ольшаниця, розташованому між оз. В. Домашне і р. Прип'яттю.

В таких умовах можливі нерестові міграції щуки з озера В. Домашне в Прип'ять і навпаки. Природного виходу на болота для розмноження не має щука оз. Пісочне. Щороку вона нерестує майже на одних і тих самих ділянках, досить обмежених за площею.

Загальна нерестова площа щуки оз. Тур в 1954 р. орієнтовно становила близько 100 га, в 1955 р. — понад 300 га.

Змінює місця нересту в залежності від рівня води і лящ в період першого нересту на оз. Тур. У травні 1954 р. турський лящ відкладав ікру в прибережних скупченнях торішніх рослин — «наметах», зосереджених в північно-східній частині озера на віддалі 200—250 м від берега і складених переважно з кореневищ та стеблин лепешняка водяного. В умовах багатоводної весни 1955 р. в оз. Тур нерестував в основному лящ, мігруючий сюди на нерест з Дніпро-Бугського каналу. Нерестилища його були сконцентровані на вкритих водою вологих луках та ділянках боліт, розміщених в східній частині озера в районі Глубицької затоки та Славця, і охоплювали значно більшу площу, ніж в 1954 р.

На відміну від турського ляща, лящ озер В. Домашнє і Пісочне не виходить для нересту на залиті водою ділянки з пониженням рельєфом в роки з високою повіддю. Площа окремих нерестилищ ляща Заболотівських озер не перевищує 0,1—0,2 га. Дещо подібний характер мають нерестилища і у дніпровського ляща (П. Д. Носаль, 1948), проте Білий М. Д. (1956) вказує, що у Дніпрі площа місць, засіяних ікрою ляща, переважно становить лише 0,01 га.

Найчастіше субстратом для ікри риб, що нерестують в озерах Заболоття у квітні — першій половині травня (щука, окунь, йорж, плотва, а також лящ, краснопірка і верховодка, в період їх першого нересту), є прибережні зарості та плаваючі у воді рештки торішньої озерної і болотно-лугової рослинності — розмиті кореневища та стебла осоки стрункої, лепешняка водяного, тонконога болотного, схеноплектуса озерного, а також покрив зеленого моху, утворений видом *Calliergonella cuspidata*.

Риби, що нерестують наприкінці травня, в червні та липні (лящ, густера, краснопірка, верховодка, карась, лин), використовують здебільшого для кладок ікри пагони зеленої трав'янистої озерної рослинності, переважно листя та стебла осоки стрункої, рдесника маленького, елодеї, харові водорості та кореневища осокових.

Особливо характерно проходить зміна нерестилищ в залежності від часу нересту у ляща озера Пісочне. В другий період ікрометання лящ у цьому озері відкладає ікру майже виключно в заростях харових водоростей, на глибині до 2,5—3,0 м. Спостереження, проведені нами на оз. Світязь в перших числах травня 1954 р., під час заготівлі ікри ляща для зарибку водойм Ровенської області, переконали нас у тому, що і в оз. Світязь основні нерестилища ляща також зосереджені головним чином на підводних полях *Chara fragilis*.

Результати наших досліджень в питанні про характер субстрату, який використовує лящ у період другого і третього нересту, в загальних рисах збігаються з даними по розмноженню ляща в озерах Ільмень та Череменець, де також наприкінці травня лящ відкладає ікру тільки поблизу дна на свіжій рослинності (П. А. Дрягін, 1949).

Цікаво, що у Рибінському водосховищі, за спостереженнями Л. К. Захарової (1956), лящ нерестує лише на торішній рослинності, що свідчить, на думку автора, про адаптивний характер такого нересту. Л. К. Захарова вважає (1956), що відкладені на зелених рослинах ікринки ляща перебували б в несприятливих для їх розвитку умовах дихання.

Вивчення кисневого режиму в місцях нересту ляща на Заболотівських озерах, проведене нами в 1954 і 1955 рр., показало, що в різні години доби, незалежно від характеру субстрату і глибини розміщення кладок ікри, кількість розчиненого у воді кисню була цілком достатньою для розвитку ікринок (табл. 1).

Незначний процент загиблої ікри на нерестилищах ляща в досліджених нами озерах також свідчить про сприятливі умови розвитку ікринок, відкладених на зеленій підводній рослинності.

Таблиця 1

Кількість розчиненого у воді кисню на нерестилищах ляща в озерах Тур, В. Домашнє і Пісочне

Назва озера	Дата і години здобуття проби	Глибина в м	Температура води	мл/л O ₂	мл/л O ₂	% насичення води O ₂	Періоди нересту
В. Домашнє	29. V. 54 5 г.	0,2—0,5	17,5°	8,3—8,6	5,8—6,0	86,2—89,2	другий
— „ —	1. VI. 54 14 г.	0,3	20,5°	10,6	7,4	116,7	— „ —
Пісочне	30. V. 54 7 г.	1,0	17,5°	8,9	6,2	92,1	другий
— „ —	— „ —	2,2	16,5°	8,4	3,9	85,8	— „ —
Тур	8. V. 55 9 г.	0,3	12,3°	10,0—10,3	7,0—7,2	93,2—95,9	перший
— „ —	12. V. 54 14 г.	0,4	13,0°	10,4	7,3	98,6	— „ —
— „ —	16. V. 55 14 г.	0,5	16,5°	9,9	6,9	100,3	другий

З таблиці видно, що вміст кисню на нерестилищах ляща не був нижче 8,3—8,4 мг/л, що становить 86,2—85,8% насичення при температурі води 16,5—17,5°.

Таким чином, думка Л. К. Захарової про адаптивне значення нерестилищ ляща, розміщених на ділянках з відмерлою рослинністю, не є обґрунтованою.

Істотно відрізняється в озерах Заболоття характер субстрату на нерестових ділянках верховодки. Так, верховодка оз. Тур у травні нерестує на плаваючих островах, складених з залишків торішньої рослинності, «наметах», в червні і липні — на пагонах свіжої підводної рослинності. В озерах В. Домашнє і Пісочне верховодка використовує для кладок ікри протягом всього нерестового періоду майже виключно розміті кореневища прибережних рослин, зарості яких зосереджені на піщаному мілководді, близько самого урізу води.

Умови аерації в період розвитку ікри на природних нерестилищах промислових видів риб в озерах Тур, Пісочне і В. Домашнє сприятливі. Навіть рано вранці, коли у водоймах кількість розчиненого у воді кисню спадає до мінімуму, в місцях нересту риб, незалежно від часу нересту і глибини розміщення нерестилищ, вміст кисню був високий і становив звичайно 88,0—96,0% насичення. Мінімальний вміст кисню — 9,0 мг/л при 4,5° (69,5% насичення) спостерігався 30. III. 1955 р. на нерестилищах щуки в районі «Калютицін багон» (оз. Пісочне). Активна реакція води в усіх досліджених озерах під час нересту риб коливалась в межах рН 6,8—7,6.

СТРОКИ І ТЕМПЕРАТУРНІ УМОВИ НЕРЕСТУ РИБ

Хід нересту риб у значній мірі залежить від гідрометеорологічних умов і в першу чергу від температури води, в зв'язку з чим у деяких видів риб Заболотівських озер спостерігаються значні відміни в строках нересту по окремих роках.

Щука. Незважаючи на те, що характер розміщення нерестилищ щуки Заболотівських озер у 1955 р. був зовсім інший, ніж у 1954 р., строки нересту і тривалість періоду ікрометання в обидва роки спостережень були майже однаковими. Уявлення про хід нересту турської щуки дає таблиця 2*.

Таблиця 2

Частота зустрічі щуки в IV, V, V—VI і VI стадіях статевої зрілості в період нересту на оз. Тур у 1954 році (в %)

Дата \ Стадії статевої зрілості	IV	V	V—VI	VI
1—2 квітня	80	20		
3—4 „	40	52	8	
5—6 „	12	52	28	8
7—8 „		28	40	32
9—10 „		8	36	56
11—12 „		8	28	64
13—14 „			24	76
15—16 „			4	96
17—18 „			4	96
19—20 „			—	100
21—22 „			4	96
23—24 „			—	100

З таблиці видно, що нерест у щуки проходив з 2. IV по 22. IV. Найбільш інтенсивно щука нерестувала з 3. IV по 8. IV. В цей час серед розтятих самок було виявлено від 60% до 80% особин в V—VI стадіях статевої зрілості. 9—10. IV в VI стадії зрілості знаходилось більш, ніж половина самок (56%). З 11. IV по 15. IV процент самок з виметаною ікрою збільшився з 64% до 96%. З 16. IV нерестуючі самки в стадії зрілості V—VI зустрічались поодинокі, складаючи досить незначний процент по відношенню до взятої проби (4%). 22. IV була виявлена остання нерестуюча самка щуки, яка знаходилась на V—VI стадії зрілості статевих продуктів.

Вищенаведені дані аналізу стадій статевої зрілості щуки повністю збігаються з спостереженнями над нерестом її в природі. В період з 1. IV по 8. IV 1954 р. ми постійно спостерігали в оз. Тур нерестуючих самок в супроводі 3—7 самців. З 9—10. IV можна було лише деколи побачити окремі нерестуючі гнізда щуки.

* Для аналізу стану гонад щуки за час з 1. IV по 24. IV—54 р. було використано 300 екз. риб, по 25 самок кожні два дні.

В 1955 р. перші самки щуки в IV—V стадії статевої зрілості були виловлені в оз. В. Домашнє 28. III, в оз. Пісочне 30. III при температурі води 4,5°. Масовий нерест спостерігався, як і в 1954 р., протягом 5 днів, з 2. IV по 7. IV при температурі води 5,0—7,0°. З 9. IV нерестуючі особини зустрічались поодинокі. Остання самка з неповністю виметаними статевими продуктами відловлена 16. IV (оз. Пісочне). Мінімальна температура води в нерестові періоди щуки не спадала нижче 1,0°, максимальна не спадала нижче 1,0° і не перевищувала 12,0°.

Значних відмін в температурних умовах, в яких проходить нерест у щуки у водоймищах європейської частини СРСР, немає. Так, П. А. Дрягін (1949) вважає пороговою для нересту щуки в оз. Ільмень температуру води вище 4,0°. У Рибинському водосховищі щука починає нерестувати при 4,0° (Л. К. Захарова, 1956). За даними Ф. Ф. Єгермана (1926), в Кучурганському лимані Дністра щука відкладає ікру при температурі води 3,0—6,0°. У Псковському водоймищі, за спостереженнями В. В. Петрова (1947), щука нерестує під кригою при температурі води, яка не перевищує 2,8°.

Окунь. На хід нереста окуня в Заболотівських озерах вплинули пізні і затяжні весни 1954 і 1955 рр. Перші самки окуня з текучою ікрою в 1954 р. були виявлені нами в промислових уловах на оз. Тур 12. IV. Розпал нересту проходив з 13. IV по 16. IV. Внаслідок похолодання з заморозками, на протязі 6 днів, з 17. IV по 22. IV, спостерігалось різке зниження інтенсивності нерестування. В цей час прибережні ділянки озера вкривались кригою, температура води в районі розміщення нерестилищ спадала до 2,0°. Малопомітне ікрометання продовжувалось до 27. IV. Аналогічна картина нересту окуня спостерігалась на озерах Пісочне і В. Домашнє. Окремі екземпляри з текучими статевими продуктами ми зустрічали на цих озерах до 28. IV. В умовах холодної і тривалої весни 1955 року масовий нерест у окуня Заболотівських озер проходив з 18. IV по 23. IV.

Починає нерестувати окунь на озерах Заболоття при температурі води 7,5°. Основна маса плідників відкладає ікру при 8,0—9,0°.

Як показують літературні дані, у окуня спостерігаються великі відміни в температурних умовах нересту. Так, в оз. Ільмень нерест у окуня проходить при температурі води 8,0° і вище (П. А. Дрягін, 1949), в середній течії Ками при 2,5—7,5° (В. С. Толчанов, 1952). У Рибинському водосховищі, за спостереженнями Л. К. Захарової (1956), порогова температура води для нересту окуня відрізняється по окремих роках, причому різниця надзвичайно велика — від 4,0 до 17,0°.

Спостереження за розвитком ікри окуня, відкладеної на «Малому грудку» оз. Тур в 1954 р., виявили, що перші личинки окуня вийшли з оболонок 24. IV, тобто на 12-й день інкубації. За літературними даними (П. А. Дрягін і Р. Х. Муратова, 1948; П. А. Дрягін, 1949; П. В. Міхеєв, 1953), інкубація ікри в окуня продовжується 8—11 днів. Довший інкубаційний період ікри окуня на оз. Тур в 1954 р., очевидно, пояснюється негативним впливом низьких температур на її розвиток.

Йорж. Порційний характер нересту, виявлений у йоржа Заболотівських озер, обумовлює досить тривалий період ікрометання у нього (Мальчевська К. П., 1956).

Аналіз стану гонад дав можливість встановити, що календарні строки початку нерестового періоду у йоржа в обидва роки спостережень збігались — ікрометання розпочиналось в середині квітня, 14. IV—16. IV в 1954 р., 17. IV—18. IV в 1955 р. Закінчив нерестувати йорж в

1954 р. 15.V—17.V, в 1955 р. внаслідок несприятливих гідрометеорологічних умов — 29.V—31.V. Починаючи з 2.VI 1955 р. в промислових уловах на озерах В. Домашнє і Пісочне зустрічались вже особини, які повністю віднерестували.

Температура води в період ікрометання йоржа на Заболотівських озерах коливалась в межах 3,0—16,0°.

Плотва. Нерестує плотва Заболотівських озер протягом перших 5—6 днів травня, при температурі води 9,0—11,0°. Відхилення в строках нересту її на окремих озерах не перевищують 1—2 днів. Розпал нересту, очевидно, збігається з першими теплими весняними днями, як це мало місце в 1954 і 1955 рр., і проходить майже одночасно на всіх озерах Заболоття.

Масове наближення плотви до нерестилищ ми спостерігали в 1955 році: 1.V на оз. В. Домашнє, 2.V на оз. Пісочне. Нерест розпочинався надвечір в прибережних ділянках озер, зарослих торішньою трав'яною рослинністю, на глибині 10,0—40,0 см при температурі повітря 19,0° і води 10,0°. Проходило ікрометання бурхливо, в супроводі сильного спліскування води.

За літературними даними (П. Ф. Домрачев і І. Ф. Правдін, 1926; В. В. Петров, 1947; П. А. Дрягін, 1949; Л. К. Захарова, 1956 і інші), температурні умови, при яких нерестує плотва, дещо відрізняються в окремих водоймах, коливаючись в межах 5,0—14,0°.

Лящ. В озерах Заболоття лящ відкладає ікру одноразово. Нерестує в два—три строки, з помітними перервами між ними. В 1954 р. перший нерест у ляща розпочався 12.V (на оз. Тур) і 15.VI (на оз. Пісочне), у 1955 р., відповідно 5.VI і 11.VI при температурі води 12,0° (Т° води протягом першого нерестового періоду коливалась в межах 6,0—14,0°). Друге нерестове наближення ляща до нерестилищ у 1954 р. розпочалось після досить тривалого періоду теплої погоди. На всіх озерах лящ нерестував дружно і короткочасно, в останніх числах травня — 26—29.V при температурі води 16,5—17,5°. Цю температуру, при якій нерестувала основна маса плідників у період другого нересту, слід вважати за оптимальну для ляща досліджуваних озер. Внаслідок значного похолодання, що тривало в західноукраїнському Поліссі на протязі останньої декади травня 1955 року, в другий період ікрометання лящ нерестував малопомітно і в різні строки: 15.V (оз. Тур), 20.V (оз. В. Домашнє), 1.VI (оз. Пісочне). В обидва роки спостережень третій період нересту у ляща проходив майже непомітно. Окремі нерестуючі особини ляща зустрічались лише в уловах на оз. Тур (6.VI—7.VI 1955 р.). Можливо, що на озерах Пісочне і В. Домашнє третього нерестового періоду у ляща взагалі не було. П. Ф. Домрачев і І. Ф. Правдін (1926), В. В. Петров (1947), П. Д. Носаль (1948), Л. К. Захарова (1956) також вважають на підставі досліджень на оз. Ільмень, Дніпрі, Псковському та Рибінському водосховищах, що холодна з вітрами погода затримує, а інколи припиняє нерест у ляща.

За даними П. Д. Носаля (1948), в середній течії Дніпра нерест у ляща розпочинається при температурі води 12,5° (оптимальна 18,0—20,0°). П. А. Дрягін (1949) вказує на те, що в оз. Ільмень лящ починає нерестувати при температурі води не нижче 12,0—13,0° (оптимальна 15,0—16,0°). Оптимальними температурними умовами для нересту ляща в Рибінському водосховищі Л. К. Захарова (1956) вважає 15,0—17,0°. З наведеного видно, що оптимальна температура води для нересту ляща в різних водоймах неоднакова.

Краснопірка, верховодка, густера. Початок першого нересту у краснопірки і верховодки, за спостереженнями на оз. Тур, відзначено 13.V (1954), 14.V (1955) при температурі води 15,5°. Ікрометання продовжувалось недовго, внаслідок різкого похолодання і зниження температури води до 9,0—10,0° і припинилось у 1954 р. вже на другий день — 14.V, а у 1955 р. — 16.V. Вдруге нерест у краснопірки і верховодки почався одночасно з густерою, яка нерестувала вперше, і проходив на оз. Тур в 1954 р. з 27.VI по 30.VI, у 1955 р. — в перших числах червня, при температурі води 17,5—18,0°. Неодноразово був відзначений нерест у цих видів риб на озерах Пісочне і В. Домашнє в червні 1953—1955 рр. при температурі води 19,0—24,0°.

Яскраво виявлене нерестове наближення верховодки до місць нересту ми спостерігали 9.VI 1955 р. на оз. Пісочне. Нерест проходив бурхливо, при температурі води 20,0°, на глибині 5,0—30,0 см в заростях ситнягу болотного. На окремих кореневищах спостерігались скупчення прикріплених одна до одної ікринок по 5—8 шт. в одному місці, що безперечно пояснюється великою концентрацією нерестуючого стада. Багато ікри було розкидано також і безпосередньо на піску. При обстеженні цих нерестилищ 12.VI 1955 р. виявилось, що серед поодинокі прикріплених до субстрату ікринок мертвих ікринок майже не було. В скупченнях відзначена підвищена загибель ікринок, очевидно у зв'язку з порушенням процесу дихання.

Спостереження за нерестом у природі завжди підтверджувались наявністю в промислових уловах плідників у V стадії зрілості гонад. Густеру з повністю виметаними статевими продуктами було виявлено в уловах на оз. В. Домашнє і Пісочне 18—20.VI 1953 р., в оз. Тур — 24—25.VI 1954 та 1955 рр. Останні нерестуючі самки краснопірки відловлені на озерах В. Домашнє і Пісочне 6—7.VII 1953 р., верховодки — 7—8.VII 1953 р., 11—13.VII 1954 р. Таким чином, краснопірка і верховодка Заболотівських озер звичайно нерестують з середини травня до десятих чисел липня, густера — з кінця травня або перших чисел червня до 20—25 червня.

За даними П. А. Дрягіна (1939, 1949), температурним порогом для густери оз. Ільмень є температура води 17,0°. Значно відрізняється початкова нерестова температура води густери середньої Волги, яка становить 13,0—14,0° (А. Л. Штейнфельд, 1949) і Рибінського водосховища — 20,0° (Л. К. Захарова, 1956). Наведені дані свідчать про те, що густера нерестує в різних водоймах при різній температурі, але в межах окремих водойм нерест проходить при певній температурі води. Температурні умови, при яких починає нерестувати верховодка в Заболотівських озерах, подібні до початкової нерестової температури верховодки оз. Ільмень (П. А. Дрягін, 1939, 1949).

Лин, карась. Біологія розмноження лина та карася подібна. Нерест у лина на Заболотівських озерах проходить приблизно в ті ж строки і на тих самих ділянках, що й у карася. Це підтверджується і характерними для обох видів особливостями гістологічної будови статевих гонад самок (Б. Н. Казанський, 1949).

В 1953 і 1954 рр. карась почав нерестувати на озерах Тур і Пісочне 30—31.V, лин — на день пізніше, 31.V—1.VI. В 1955 р. в зв'язку з виключно несприятливими гідрометеорологічними умовами весни, нерест у карася розпочався тільки 3. VI, у лина — 4. VI.

На протязі трьох нерестових періодів 1953—1954 рр. вдруге лин почав нерестувати також в один і той же час, 14—16.VI. Багато текучих.

плідників в уловах ми зустрічали ще 27—29.VI. Втретє нерест у лина розпочався 8—10.VII, проте ікрометання проходило повільно, малопомітно. З 15—17.VII в уловах почали зустрічатися самки на VI—II стадії зрілості гонад. Промислові улови лина в цей час значно зменшились і 22—23.VII були відловлені останні нерестуючі особини.

Кількість карася в промислових уловах на озерах Тур і Пісочне також значно скоротилася, починаючи з другої половини липня. Останні самки з неповністю виметаною ікрою зустрічались ще до 26—27.VII.

Пороговою температурою води для нереста лина на Заболотівських озерах слід вважати 20,5°, для карася — 19,5°. Ікрометання в наступні періоди (друга і третя порції ікри) спостерігалось у обох видів при температурі води 20,0—26,5°.

Переважа в уловах текучих особин дає змогу виділити всі три періоди нересту як у лина, так і у карася. Проте самки з текучими статевими продуктами у обох видів зустрічались в уловах на протязі всього нерестового періоду — у червні—липні. Очевидно, це пояснюється великою неоднорідністю зрілості статевих продуктів лина і карася, що знаходить підтвердження в гістологічних дослідженнях Б. Н. Казанського (1949), який виявив, що під час нересту цих видів риб поруч з самками, гонади яких знаходяться на VI стадії зрілості, зустрічається багато самок з гонадами в перехідній III—IV і V стадіях зрілості статевих продуктів.

За даними П. А. Дрягіна (1949), А. П. Маркевича і І. І. Короткого (1954), Л. К. Захарової (1956), нерест у лина і карася розпочинається при температурі води не нижче 18,0—19,0°. Проте верхня температурна межа, при якій, за нашими спостереженнями, успішно нерестують ці види риб, вище зазначеної в літературі (Л. К. Захарова, 1956).

СТАТЕВЕ ДОЗРІВАННЯ ДЕЯКИХ ВИДІВ РИБ

Щука. Для виявлення віку, в якому щука стає статевозрілою, ми проаналізували стан гонад в пробах щуки, взятих з промислових уловів на оз. Тур 4 і 5. IV 1954 р. Всього досліджено 96 екз. риб розміром від 16 до 45 см. Внаслідок визначення віку і статі матеріал був розподілений по трьох вікових групах в таких співвідношеннях (табл. 3).

Таблиця 3

Кількісне й процентне співвідношення нестатевозрілих особин самців та самок щуки в залежності від віку

Вік Стать	1		2		3		Кількість екземпл.
	Кількість екземпл.	%	Кількість екземпл.	%	Кількість екземпл.	%	
Нестатевозрілі (♂♂ та ♀♀)	8	100	12	28,6	—	—	20
Статевозрілі ♂♂			16	38,1	20	26,5	36
Статевозрілі ♀♀			14	33,3	26	43,5	40
Всього:	8	100	42	100	46	100	96

З таблиці видно, що серед щук-однорічок не було статевозрілих особин. Нестатевозрілі самки двохрічного віку складали 28,6%. Наявність у групі двохрічок нестатевозрілих особин свідчить про те, що час-

тина шук дозріває у віці трьох років. Всі шуки-трьохрічки були статевозрілими. Таким чином, статеве дозрівання у шуки Заболотівських озер настає наприкінці другого—третього років життя.

Час статевого дозрівання у шуки залежить від географічного положення водойм, які вона населяє і, за даними Ф. Ф. Єгермана (1926), А. В. Лукіна і А. Л. Штейнфельда (1949), Ю. А. Козьміна (1950) і інш., настає у віці 2—4 років.

Таблиця 4 характеризує залежність між лінійними розмірами і віком шуки в період статевого дозрівання.

Таблиця 4

Співвідношення довжини тіла та віку шуки оз. Тур
під час статевого дозрівання

Класи довжини тіла Стать, вік		16—19	19—22	22—25	25—28	28—31	31—34	34—37	37—40	40—43	43—46	Кількість екземпл.
Нестатевозрілі (♂♂ і ♀♀)	1	3	3	3								8
	2		2	6	4							12
Статевозрілі ♂♂	2		1	4	4	4	3					16
	3			1	2	5	6	3	2	1		20
Статевозрілі ♀♀	2			1	2	4	5	2				14
	3				1	—	5	6	5	6	3	26

Таблиця 4 показує, що лінійна довжина статевозрілого самця оз. Тур віком 2 роки становила 20,0 см, 3 роки — 24,5 см. Лінійна довжина тіла самки під час першого ікрометання у віці 2-х років — 24,0 см, 3-х років — 27,5 см. Максимальна довжина тіла нестатевозрілої самки у віці 2-х років не перевищувала 27,8 см.

Плотва. Для виявлення розмірів і віку, при яких плотва статевозріває, досліджено стан гонад у 145 екз. плотви, взятих з промислових уловів на оз. Тур 15 і 16.IV 1954 р. Розміри плотви коливались в межах від 72 до 160 мм. Після визначення статевого та вікового складу проб плотви матеріал був розбитий на три вікові групи. Статеве і кількісне співвідношення у вікових групах характеризує таблиця 5.

Таблиця 5

Кількісне співвідношення нестатевозрілих особин, статевозрілих ♂♂ і ♀♀ плотви в залежності від віку

Вікові групи Стать	1+		2+		3+		4+		Кільк. екз.
	Кільк. екз.	%	Кільк. екз.	%	Кільк. екз.	%	Кільк. екз.	%	
Нестатевозрілі ♂♂ і ♀♀	4	100	33	41,25	1	2,4	—	—	38
Статевозрілі ♂♂	—	—	26	32,5	21	51,2	9	45,0	56
Статевозрілі ♀♀			21	26,25	19	46,4	11	55,0	51
Всього:	4	100	80	100	41	100	20	100	145

Як видно з таблиці 5, переважна більшість плотви оз. Тур дозріває у віці 3—4 років. Наприкінці третього року життя (2+) статевозрілі ♂♂ і ♀♀ складали 58,75%, четвертого року (3+) — 97,6%.

За літературними даними (А. П. Дрягін, 1949; Б. І. Черфас, 1950 і інші) плотва в інших водоймах статеві дозріває також у віці 3—4 років. А. П. Маркевич і І. І. Короткий (1954) вказують, що у водоймах УРСР плотва інколи починає нерестувати вже на другому році життя.

Таблиця 6 ілюструє кількісне співвідношення у вікових групах плотви в залежності від лінійних розмірів, віку і статі.

Таблиця 6

Співвідношення довжини тіла та віку у плотви оз. Тур, в період наступу статевої зрілості

Вік і стать		Класи довжини тіла (в мм)									Межі коливання довжини тіла	Кільк. екз.
		70—80	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	140—150	150—160		
Нестатевозрілі ♂♂ і ♀♀	1+	3	1								72—82	4
	2+		6	7	12	6	2			82—122	33	
	3+						1			128	1	
Статевозрілі ♂♂	2+		2	7	6	7	4			82—123	26	
	3+						6	9	3	121—156	21	
	4+								4	5	143—158	9
Статевозрілі ♀♀	2+		1	1	2	9	3	5		87—137	21	
	3+						2	8	3	124—160	19	
	4+							1	2	8	138—160	11
Всього:		3	10	15	20	22	18	23	12	22	72—160	145

Мінімальні розміри плотви Заболотівських озер віком 2+ роки в період наступу статевої зрілості становили серед ♂♂ 8,2 см, серед ♀♀ 8,7 см. У віковій групі трьохрічок (2+) не виявлені нестатевозрілі особини серед плотви, лінійні розміри яких були понад 122 мм. Знаходження у групі чотирьохрічок (3+) нестатевозрілої самки розмірами 128 мм напевно є нетиповим (табл. 6).

За даними М. Д. Білого (1950) і П. А. Дрягіна (1928), мінімальні розміри ♂♂ і ♀♀ плотви у р. Дніпро — 8,0 см, у р. Вятці — для ♂♂ 6,7 см, для ♀♀ — 8,4—8,5 см. Л. С. Берг (1949, за С. М. Сорокіним) вказує, що у Псковсько-Чудському водоймищі ♂♂ і ♀♀ плотви статеві дозрівають при довжині тіла 10,0 см.

Окунь. Про час статевого дозрівання у окуня Заболотівських озер дає уявлення таблиця 7, складена на основі аналізу проб, взятих з промислових уловів на озерах В. Домашнє і Пісочне 25 і 26.III 1955 р. Всього було досліджено 203 екз. окунів (96 ♂♂ і 107 ♀♀).

З таблиці 7 видно, що основна маса самців (89,3%) дозріває на третьому році життя. Частково самці статеві дозрівають вже наприкінці другого року життя (11,9%). Нестатевозрілі самці у віці 3+ зустрічались поодинокі (6,2%). У віковій групі 4+ всі самці були статевозрілими (100%).

Отже окуні Заболотівських озер статеві дозрівають частково на другому, а переважно на третьому (♂♂) і четвертому (♀♀) роках життя.

Результати наших досліджень про час статевого дозрівання у окуня збігаються з результатами спостережень над розвитком статевих гонад у окуня, проведених ще в 1927 р. С. І. Кулаєвим і В. А. Мейєном.

Ці автори виявили, що у самців статеві продукти дозрівають вже на першому році життя, у самок — на третьому.

Таблиця 7

Співвідношення віку і часу наступу статевого дозрівання у окуня озер Пісочне і В. Домашнє (в %)

Вік	♂♂					♀♀				Загальна кількість екземплярів
	Нестатевозрілі		Статевозрілі		Загальна кількість екземплярів	Нестатевозрілі		Статевозрілі		
	%	Кільк. екз.	%	Кільк. екз.		%	Кільк. екз.	%	Кільк. екз.	
1+	88,1	37	11,9	5	42	100	31	—	—	31
2+	10,7	3	89,3	25	28	87,5	28	12,5	4	32
3+	6,2	1	93,8	15	16	25,0	6	75,0	18	24
4+	—	—	100	10	10	11,1	2	88,9	18	20
Всього:					96					107

П. Ф. Домрачев та І. Ф. Правдін (1926), Ф. Ф. Єгерман (1926), К. Н. Беляєва (1946), М. Д. Білий (1950), В. С. Толчанов (1952) і інші відзначають, що окунь починає нерестувати у віці 2—4 років при довжині тіла 5,4—10,0 см. На Заболотівських озерах мінімальний розмір статевозрілого самця віком 1+ становив 8,3 см (оз. В. Домашнє, 26.III 1955 р.), самки віком 2+ — 10,2 см (оз. Пісочне, 25.III 1955 р.). Максимальна довжина тіла нестатевозрілих особин окуня на досліджених нами озерах не перевищувала 14,0 см.

Самки статеві дозрівають пізніше. Незначна кількість самок (12,5%) вперше нерестує на третьому році життя (2+). У віковій групі 3+ статевозрілих самок було 75,0%. Нестатевозрілі самки на п'ятому році життя склали 11,1%.

Густера. Для виявлення лінійних розмірів і віку, при яких густера починає нерестувати, нами досліджено 134 екз. цього вида, взятих з промислових уловів на оз. Тур 12.V і 13.V 1954 р. Розміри дослідженої густери коливались в межах 60—156 мм.

Нижченаведена таблиця 8 характеризує кількісне співвідношення між нестатевозрілими особинами, статевозрілими ♂♂ і ♀♀ густери оз. Тур по вікових групах.

Таблиця 8

Співвідношення віку і статевих дозрівання у густери оз. Тур

Вік Стать	1+		2+		3+		Кількість екземплярів
	кількість екз.	%	кількість екз.	%	кільк. екз.	%	
Нестатевозрілі особини (♂♂ і ♀♀)	18	25	5	10,9	—	—	23
Статевозрілі ♂♂	26	36,1	16	34,8	9	56,25	51
Статевозрілі ♀♀	28	38,9	25	54,3	7	43,75	60
Всього:	72	100	46	100	16	100	134

З таблиці 8 видно, що статевозрілі особини густери у віковій групі 2-х років (1+) складали 75%, серед трьохрічок (2+) — 89,1%, у групі 4-річок (3+) — 100%. Таким чином, більшість ♂♂ і ♀♀ у густери в озері Тур вперше нерестує у віці 2-х років. Частина густери дозріває в 3—4 роки. Про це свідчить наявність нестатевозрілих особин густери, які складали у вікових групах 2-річок 25%, 3-річок — 10,9%.

Залежність між довжиною тіла і віком густери в період статевого дозрівання характеризує таблиця 9.

Таблиця 9

Співвідношення довжини тіла і віку у густери оз. Тур в період статевого дозрівання

Стать	Вік	Класи довжини тіла (в мм)										Межі коливання довжини тіла	Кількість екземплярів
		60—70	70—80	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	140—150	150—160		
Нестатевозрілі особини (♂♂ і ♀♀)	1+	2	4	6	5	1						60—108	18
	2+				1	2	1	—	1			92—134	5
Статевозрілі ♂♂	1+	1	2	11	10	2						68—106	26
	2+				3	2	10	1				90—125	16
	3+						1	6	2			116—138	9
Статевозрілі ♀♀	1+			3	8	15	2					81—118	28
	2+				1	4	2	11	7			95—137	25
	3+							1	4	—	2	122—160	7
Всього:		3	6	20	28	26	16	19	14	—	2	60—160	134

Як видно з таблиці 9, розміри статевозрілих ♂♂ варіювали у окремих особин від 68 до 106 мм у віці 1+, від 90 до 125 мм у віці 2+, від 116 до 136 у віці 3+. Розміри ♀♀ статеводозрілих, віком 1+ коливались в межах 81—118 мм, у віковій групі 2+ — від 95 до 137 мм, в групі 3+ — від 122 до 160 мм. Найменша довжина тіла статевозрілого ♂ 68 мм, ♀ — 81 мм. Звідси виходить, що самки густери дозрівають при більших розмірах тіла, ніж самці.

Вивчення стану гонад густери оз. Тур виявило, що нестатевозрілі ♂♂ і ♀♀ 3-літнього віку (2+) мали розміри 10,0—13,4 см, тобто такі, при яких більшість риб цього виду вже нерестує. Результати наших досліджень збігаються з даними, наведеними М. Д. Білим (1950) для густери Дніпра, в якій також зустрічаються нестатевозрілі особини з розмірами до 15 см.

За даними П. Ф. Домрачева і І. Ф. Правдіна (1926), І. П. Павлова (1946), А. Л. Штейнфельда (1949), М. Д. Білого (1950, 1954) у водоймах Європейської частини СРСР густера статеводозріває у віці 2—7 років, при довжині тіла 6,0—13,0 см.

ШТУЧНІ НЕРЕСТИЛИЩА І УМОВИ РОЗВИТКУ ІКРИ НА НИХ

Щоб з'ясувати питання про необхідність застосування штучних нерестилищ для ляща в майбутньому нами в 1954 і 1955 рр. були закладені дослідні штучні нерестилища на озерах В. Домашнє і Пісочне.

Для спорудження штучних нерестилищ—«куп» ми використовували соснові гілки, які скріплялись за допомогою 8—10 кілків довжиною

1,8—2,5 м кожний. Кілки вбивались по колу в дно водоймища на віддалі 50—60 см один від одного, а між ними складались і переплітались гілки сосни з таким розрахунком, щоб штучні нерестилища мали вигляд горбка, влаштованого на дні водоймища, вершина якого не досягала поверхні води на 10 см. Кожне штучне нерестилище охоплювало площу в 3—4 м².

«Купи» були споруджені 25 і 26.V 1954 р. в місцях розміщення природних нерестилищ ляща на глибині 1,0—1,9 м (в оз. В. Домашнє — 3 шт., в оз. Пісочне — 2 шт.).

Внаслідок обслідування «куп», проведеного на озерах Домашнє (29.V) і Пісочне (30.V і 3.VI), виявлено, що в оз. Домашнє на всіх трьох штучних нерестилищах, на глибині від 0,2 до 1,2 м була відкладена значна кількість ікри, рівномірно розкиданої на хвої соснових гілок. В озері Пісочне лящ на штучних нерестилищах не нерестував.

У 1955 р. на оз. В. Домашнє були використані інші штучні нерестилища — лозові мати з субстратом, подібні до нерестилищ, запропонованих в свій час П. А. Дрягіним (1939). Лозові мати розміром близько 0,5 м² кожний, були сплетені з вербових гілок у вигляді кругів. Поверху матів вплітались або прив'язувались шпагатом кореневища, стебла і листя осоки стрункої та кунічника, а також гілочки сосни. Таких лозових матів було закладено 12 шт. вздовж південносхідного побережжя озера В. Домашнє 18.V 1955 р. на глибинах від 0,4 м до 1,5 м. Районом для закладки штучних нерестилищ ми обрали, як і в 1954 р., ті місця, де навесні звичайно нерестує лящ. Шість штучних субстратів були встановлені на дні озера, на глибині 0,4, 0,6, 0,8, 1,0, 1,2 і 1,5 м за допомогою камінців, які прив'язувались до нижньої сторони матів. Другі 6 лозових матів ми заклали в товщі води на тій же глибині, що й попередні. Утримувались штучні субстрати у воді завдяки камінцям-якорям, що прикріплювались повідцями із шпагату до нижньої сторони матів. Усі лозові мати мали поплавки-орієнтири.

Систематичне обслідування матів, проведене 21.V, 22.V, 28.V і 1. VI 1955 р., дало можливість виявити, що розвиток ікри, відкладеної лящем в значній кількості, на більшості матів проходив нормально. Загальна кількість загиблої ікри наприкінці періоду їх розвитку не перевищувала 5—8%. В усіх інших ікринках спостерігались живі ембріони. Проте перші оболонки і прикріплені до субстрату матів личинки, які щойно вийшли з оболонки, були знайдені лише 1.VI 1955 р. Безперечно, що тривалий період інкубації (11 днів) залежав від температури води, яка в післянерестовий період ляща на протязі кількох днів спадала до 4,0°. З роботи Т. І. Привольневої і А. М. Розумовського (1939) відомо, що тільки на ранніх стадіях розвитку ікри ляща (перші 1,5 доби) спостерігається великий процент загибелі ікринок при низькій температурі води (від 0° до 6°). На пізніших стадіях розвитку ікри, коли ембріон вже сформований, як це мало місце в оз. В. Домашнє у 1955 р., вищезазначені температури не порушують нормального розвитку ембріона. За сприятливих температурних умов (17,0—19,0°) у другий період нересту ляща в оз. В. Домашнє і Пісочне (1954) ми спостерігали личинок вже на п'яту добу після запліднення ікри.

В період розвитку ікри ляща, відкладеної на штучних нерестилищах, частина її була знищена хижаками. На двох матах, закладених на глибині 80 та 60 см, наприкінці періоду розвитку ікри залишилось близько 25% від спочатку відкладеної ікри. На трьох матах, розміщених на глибині 40 і 120 см, було знищено до 50% ікри. Безперечно, що

значну шкоду кладкам ікри спричиняють риби. Так, під час масового нересту ляща на озерах В. Домашнє і Пісочне (28—30.V 1954 р.) в районі розміщення його природних нерестилищ у 22 окунів та плотви (з 34 відловлених в контрольні сітки) в кишкових трактах знаходилась ікра. Особливо багато ікри було виявлено в шлунках окунів. Максимальна кількість ікринок в шлунку одного окуня становила 296 штук. В. Терентьев (1939), П. В. Міхеев (1953), Б. І. Черфас (1950), Л. К. Захарова (1956) також вказують на хижацтво цих видів риб на нерестилищах.

ШЛЯХИ ПОЛІПШЕННЯ УМОВ ВІДТВОРЕННЯ РИБ В ЗАБОЛОТІВСЬКИХ ОЗЕРАХ

В роки з високим рівнем води значна кількість нерестилищ в озерах Тур і Пісочне створює відповідні умови для відтворення запасів промислових видів риб. В найбільш сприятливих умовах розмножуються риби в оз. Тур, де зарості підводної м'якої рослинності — основний субстрат для кладок ікри і нагулу молоді багатьох видів риб — займають майже половину дзеркала водойми. В посушливі роки набагато скорочується нерестова площа щуки і значно погіршується шлях нерестової міграції ляща по Оріхово-Турському каналу. Незначна кількість природних нерестилищ в оз. В. Домашнє зосереджена на обмеженій площі серед досить розріджених заростей підводних і прибережних рослин, не забезпечує нормального ходу нереста у більшості риб цього озера, переважно з родини коропових. Тільки щука в роки з високим рівнем води знаходить сприятливі умови для нересту на великих просторах вкритого водою болота Ольшаниця.

Проведення комплексу рибовидних заходів на озерах Тур, Пісочне і В. Домашнє значно поліпшить умови нересту риб на природних нерестилищах і умови відтворення запасів ляща в Заболотівських озерах. Серед цих заходів найважливіші такі:

1. Спорудження шлюза-регулятора на Турському каналі, який забезпечить високий і постійний рівень води на природних нерестилищах щуки і створить сприятливі умови для розмноження її в роки з пониженим рівнем води. Побудова шлюза-регулятора послабить негативний вплив періодичних коливань рівня води на іхтіофауну оз. Тур, поліпшить стан водойми як середовища життя риб в цілому і дасть можливість краще використовувати оз. Тур в рибогосподарському відношенні.

2. Проведення меліоративних робіт: а) розчистка, поглиблення і звільнення Турського каналу від зайвої рослинності для поліпшення умов проточності і забезпечення нормального ходу міграції ляща на нерест в оз. Тур; б) обкошування надводної рослинності на озерах Тур і Пісочне з метою збільшення корисної площі цих озер.

3. Систематичне проведення боротьби з окунем — найбільш небажаним компонентом іхтіофауни Заболотівських озер шляхом: а) збільшення в озерах запасів цінних хижаків — щуки і судака, які в значній мірі живляться окунем; б) знищення ікри окуня на нерестилищах механічними засобами; в) відловлювання окуня протягом усього року, особливо в переднерестовий і нерестовий періоди.

4. Заборонити відлов щуки в нерестовий період.

5. Вжити самих рішучих заходів у боротьбі з браконьєрами, які виловлюють велику кількість плідників ляща в період їх нерестового ходу по Оріхо-Турському каналу, а також продовжити строки заборони

відлову ляща до 2.VI в роки з несприятливими для його нересту гідрометеорологічними умовами.

6. Для підвищення ефективності процесу розмноження ляща в оз. В. Домашне запровадити штучні субстрати за зразком штучних нерестилищ, запропонованих для рибних господарств В. Шеперклаусом (1953).

ЛІТЕРАТУРА

1. Артюшенко О. Т. і Оксіюк О. П. Результати спорово-пилкового та діатомового аналізів донних відкладів озера Тур. Ботанічний журн. АН УРСР, т. XII, № 2, 1955.
2. Беляева К. Н. Рыбы Кереть-озера. Тр. Карело-Финск. отдел. ВНИОРХ ч. II, 1946.
3. Берг Л. С. Рыбы пресных вод СССР и сопредельных стран. М.—Л., ч. II, 1949.
4. Білий М. Д., Біла В. К. Біологічні основи промислу густери (*Blicca bjoerkna*) р. Дніпра. Наук. зап. КДПІ ім. О. М. Горького, т. XV, біологічна серія, № 2, 1954.
5. Білий М. Д. Загальні закономірності росту риб. Київ, 1950.
6. Белый Н. Д. Биология и разведение леща. Изд. АН УССР, Киев, 1956.
7. Бухало М. А. Водно-болотная растительность озер Заболотьевского района, Волынской области. Допов. та повідомлення Львів. держуніверситету, вип. 5, ч. II, 1955.
8. Домрачев П. Ф. и Правдин И. Ф. Рыбы озера Ильмень и р. Волхова и их хозяйственное значение. Матер. по исслед. р. Волхова и его бассейна, т. X, ч. I, 1926.
9. Дрягин П. А. О полевых исследованиях размножения рыб. Изв. ВНИОРХ, т. XXX, 1952.
10. Дрягин П. А. Половые циклы и нерест рыб. Изв. ВНИОРХ, т. XXVIII, Л., 1949.
11. Дрягин П. А. Разведение леща способом закладки субстратов. Информ. бюллет. консульт. бюро ВНИОРХа, № 2, Л., 1939.
12. Дрягин П. А. Порционное икротетание у карповых рыб. Изв. ВНИОРХ, т. XXI, Л., 1939.
13. Дрягин П. А. Плотва окрестностей г. Вятки. Труды Вятск. н.-и. ин-та краевед., т. IV, Вятка, 1928.
14. Дрягин П. А. и Муратова Р. X. Наблюдения над размножением некоторых рыб в пойме р. Волги около г. Чебоксар в 1940 и 1941 гг. Тр. Тат. отд. ВНИОРХ, в. 3, Казань, 1948.
15. Егерман Ф. Ф. Материалы по ихтиофауне Кучурганского лимана. Тр. Всеукр. Гос. Азово-Черномор. научн.-пром. опытной станции, т. II, вып. I, Херсон, 1926.
16. Захарова Л. К. Материалы по биологии размножения рыб Рыбинского водохранилища. Труды биол. ст. «Борок», т. 2, АН СССР, М.—Л., 1955.
17. Казанский Б. Н. Особенности функции яичников и гипофиза у рыб с порционным икротетанием. Труды лаб. осн. рыбоводства, т. II, Л., 1949.
18. Козьмин Ю. А. К биологии щуки р. Камы и ее поймы на участке от Вишеры до Чусовой. Изв. Естеств. Научн. ин-та при Пермском госуниверситете им. А. М. Горького, т. XIII, Пермь 1952.
19. Крыжановский С. Г. Экологические группы рыб и закономерности их развития. Изв. ТИНРО, т. XXVII, Владивосток, 1948.
20. Лукин А. В. и Штейнфельд А. Л. Плодовитость главнейших промысловых рыб Средней Волги. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. биол. с.-х. наук, № 1, Казань, 1949.
21. Мальчевская К. П. Пути рационального использования запасов щуки в озере Тур, Волынской области. Допов. та повідомл. Львівськ. держ. універс., вип. VI ч. II, 1955.
22. Мальчевская К. П. К вопросу улучшения качественного состава рыб озера Песочное. Допов. і повідомл. Львівськ. держ. універс., вип. VII, 1956.
23. Мальчевская К. П. О плодовитости и характере размножения ерша из озер Западноукраинского Полесья. Допов. та повідомл. Львівськ. держ. універс., вип. VII, 1956.

24. Михеев П. В. Опыт применения искусственных пловучих нерестилищ в дельте р. Дона. Рыбное хоз-во, № 7, М., 1953.
25. Маркевич О. П., Короткий І. І. Визначник прісноводних риб УРСР. «Радянська школа», Київ, 1954.
26. Носаль П. Д. Біологія розмноження ляща. Труды Інст. гідробіології АН УРСР, № 22, Київ, 1948.
27. Петров В. В. Факторы формирования ихтиофауны Псковско-Чудского водоема. Изв. ВНИОРХ, т. XXVI, в. I, Л., 1947.
28. Привольнев Т. И. и Разумовский. Влияние пониженной температуры на разные стадии развития леща (*Abramis brama*). Докл. АН СССР, т. XXIII, № 6, М., 1939.
29. Резвой П. Д. Гидробиологическая характеристика озер Тур, Большое Домашнее и Песочное. Допов. та повідомл. Львівськ. держ. універс., вип. 5, ч. II, 1955.
30. Терентьев В. Роль хищной и сорной рыбы в Волго-Каспийском районе. Рыбное хозяйство, № 12, М., 1939.
31. Толчанов В. С. Материалы по биологии окуня *Perca fluviatilis* (Linne) средней Камы. Изв. Естеств. научн. ин-та при Пермском гос. ун-те им. А. М. Горького, т. XIII, вып. 4—5, Пермь, 1952.
32. Топачевский А. В. Ухудшение кормности озер Полесья в связи с массовым развитием хар. Ботаніч. журнал, т. VII, № 4, Київ, 1951.
33. Черфас Б. И. Рыбоводство в естественных водоемах. М., Пищепромиздат, 1950.
34. Штейнфельд А. Л. Густера (*Blicca bjoerkna* L.) Средней Волги и ее значение в рыбном хозяйстве. Труды Татарск. отд. ВНИОРХ, в. 5, Л., 1949.
35. Ялынская Н. С. Биологические основы реконструкции рыбного хозяйства озер Шацкой группы Волынской области. Диссертация, Львов, 1953.
36. Heuschmann O. Die Hechtzucht. Handbuch der Binnenfischerei Mitteleuropas, Bd. IV, L. 7. 1940.
37. Lencewicz St. Miedzyrzecze Bugu i Prypeci. Przegl. geograf., t. 9, Warszawa, 1931.
38. Schäperclaus W. Fischereiwirtschaftslehre (Seen und Flusswirtschaft). Fischerei Kunde, 1953.

Н. І. СРЕБРОДОЛЬСЬКА

ДО БІОЛОГІЇ ВЕЛИКОГО ВЕРЕТЕННИКА

Великий веретенник (*Limosa limosa limosa* L.) — один з цінних мисливських птахів, окремі риси біології якого до останнього часу мало вивчені. В Західному Поліссі внаслідок своєрідних історичних умов в минулому фауна, і особливо орнітофауна, вивчалась недостатньо. Праці польських дослідників В. Тачановського (1882), А. Доманевського (1938), З. Годіна (1939) та радянських вчених Ф. Й. Страутмана (1954), О. Б. Кістяківського (1952, 1957), присвячені переважно вивченню орнітофауни Опілля — Розточчя та Закарпаття, Західноукраїнське ж Полісся до цього часу мало досліджене. Деякі відомості про пташине населення Полісся подають В. Храневич (1925), М. В. Шарлемань і Л. Н. Портенко (1926), А. Дунаєвський (1938), частково В. Н. Шнітніков (1913), яким була досліджена Мінська губернія, однак дані ці здебільшого застарілі, інколи фрагментарні. Автори наводять перелік видів, що заселяють дану територію, а на їх екологію, біологію, господарське значення майже не звертають уваги. Деякі сторони екології, наприклад, паразитофауна птахів даної місцевості, не вивчались зовсім. Все це викликало необхідність розпочати всебічне вивчення екології, поширення та взаємовідношення болотяних птахів взагалі і великого веретенника зокрема.

Матеріали з біології великого веретенника ми збирали в весняно-літні сезони 1953—1957 років на заболочених берегах озер Тур, Веліхово, Довгому. Розташовані ці озера в Заболотському районі Волинської області, поблизу Білорусії.

Озеро Тур — найбільше серед озер Заболотського району. Воно займає площу 1296,3 гектара, лежить на низькій рівнинній місцевості, його береги низькі, вода майже стояча, хоч в озеро з південно-західної сторони впадає канал — притока, а з північно-східної виходить Турський канал — стік, який пов'язує озеро з системою Дніпровсько-Бугського каналу. Береги озера Тур заболочені. Особливо великі болота тягнуться вздовж північного та північно-східного берегів. Береги покриті густою рослинністю — сплавиною, під якою знаходиться вода. Інколи ділянки рослинності відриваються від берега, утворюючи островці, інколи прориваються, утворюючи так звані «вікна». Навесні та восени болота майже залиті водою, а влітку тут росте очерет (*Phragmites communis*), рогіз (*Typha latifolia*), комиш (*Scirpus lacustris*), різні осоки (*Carex sp. sp.*), подекуди зустрічаються кущі вільхи (*Alnus glutinosa*), ближче до води — гліцерія (*Glyceria aquatica*), сусак (*Butomus umbellatus*) та ін. Прибережна частина озера покрита жабуринням (*Hydrocharis morsus-ranae*), лататтям (*Nymphaea alba*, *Nuphar utoem*),

гречихою (*Polygonum natans*), ряскою *Lemna minor*, *L. polyrrhiza*), панаючими є рдести (*Potamogeton* sp. sp.), елодея (*Elodea canadensis*), уруть (*Myriophyllum spicatum*) та багато харових водоростей.

Озеро багате рибою. Як вказує К. П. Мальчевська (усні повідомлення) щороку з озера виловлюють до 3000 центнерів риби, переважну більшість якої становить щука, карась, линь, плотва, йорж та ін.

Завдяки наявності і великій кількості поживи та сприятливим умовам для гніздування, на озері є значна кількість водоплаваючих та болотяних птахів. В другу половину літа на відкритих просторах озера можна побачити сотні качок-крижнів (*Anas platyrhynchos*), чирків-свистунків та чирків-тріскунків (*Anas crecca*, *A. querquedula*), серед прибережних заростей багаточисленні колонії крячок (*Chlidonias nigra*), подекуди гніздуються річкові мартини (*Larus ridibundus*), зустрічаються лиски (*Fulica atra*), болотяні курочки (*Gallinula chloropus*), курочки-крихітки (*Porzana pusilla*), погоничі (*Porzana porzana*), великі та малі норці (*Colymbus cristatus*, *C. ruficollis*) та інші птахи. В місцях, більш віддалених від берега, гніздуються кулики: чайки (*Vanellus v.*), бекаси (*Capella gallinago*), турухтани (*Philomachus pugnax*), фіфі (*Tringa glareola*), подекуди кроншнепи (*Numenius arquata*), травники (*Tringa totanus*) та веретенники (*Limosa limosa*); час-то можна побачити сіру чаплю (*Ardea cinerea*), почути крик бугая (*Botaurus stellaris*).

Озеро Веліхово не менш сприятливе для гніздування водоплаваючої та болотяної дичини. Розташоване воно в північно-західному напрямку від озера Тур на границі з Білорусією. Озеро не використовується місцевим населенням, оскільки його береги покриті сплавиною, трясکی, недоступні для пересування. Крім того, озеро віддалене від людських осель і оточене глухим лісом, який в народі має назву «Вовчий кут». Основними лісоутворюючими породами тут є сосна (*Pinus silvestris*), вільха (*Populus tremula*), граб (*Carpinus betulus*), ясень (*Fraxinus excelsior*), пухната береза (*Betula pubescens*), рідше зустрічається дуб (*Quercus robur*) та інші. Пишно розростаються напівчагарники: чорниці (*Vaccinium myrtillus*), голубиці (*Vaccinium uliginosus*), брусниці (*Vaccinium vitis idaea*).

Орнітофауна лісу бідна, лише інколи можна зустріти глухаря (*Tetrao urogallus*), чорного дятла (*Dryocopus martius*), великого строкатого дятла, сойку, сиворакшу та ін. Навкруги озера Веліхово розкинулось велике болото, де гніздуються веретенники та інші кулики.

Методика роботи. Виявлення біологічних особливостей великого веретенника проводилось як шляхом збирання колекційного матеріалу, так і шляхом спостереження за птахами в природних умовах. Були вибрані окремі гнізда веретенників, за якими під час наших польових робіт ми вели систематичні спостереження. Крім того, приділялась увага вивченню паразитологічних форм гельмінтів, а також ектопаразитів, які зустрічались на пір'ї птахів.¹ В лабораторних умовах зібраний мате-

¹ Велику допомогу в питаннях методики виготовлення препаратів, проведення паразитологічного аналізу птахів та визначення цестод ми отримали з боку старшого наукового працівника відділу паразитології Ленінградського зоологічного інституту АН СРСР канд. біол. наук. М. Н. Дубініної, перові кліщі були визначені проф. В. Б. Дубініним, пухойди — канд. біол. наук Н. С. Дудкіною. Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку цим товаришам.

ріал був відповідним чином опрацьований: визначений вміст шлунків птахів, виготовлені препарати екто- та ендопаразитів.

Всього нами здобуто та проаналізовано 28 дорослих веретенників, один молодий птах та обслідувано 9 гнізд. Великий веретенник — птах значних розмірів. Вага окремих самок досягає 240—360 г, вага самців дещо менша — 220—350 г (див. табл. 1).

Таблиця I

Виміри дорослих веретенників (в см) та їх вага (в г)

Показники	Самці (12 екз.)	Самки (16 екз.)
Вага	220—350 (М 281,7)	240—360 (М 306,2)
Довжина тіла	39,6—41,9 (М 40,7)	38,0—44,3 (М 44,3)
Довжина крила	19,8—23,1 (М 21,32)	20,0—24,0 (М 21,9)
Довжина хвоста	7,4—8,4 (М 7,92)	7,45—9,5 (М 8,2)
Довжина дзьоба	9,2—12 (М 9,93)	9,4—11,9 (М 10,8)
Довжина цівки	6,9—8,4 (М 7,47)	7,2—8,5 (М 7,7)

Для кулика характерні довгі ноги та довгий дзьоб. Основний тон забарвлення — іржастосірий з темними крапками, крила темносірі, хвіст чорний, надхвістя біле, черево бруднобіле. Ноги птаха мають чотири пальці, які закінчуються гребінчасто розсіченими кігтями. Самки відрізняються від самців більшими розмірами, світлішим забарвленням. Взагалі для великого веретенника характерна індивідуальна морфологічна мінливість, що мабуть пов'язане з процесом линяння птахів, яке відбувається дуже поступово і не одночасово (Дементьев, 1951). Дуже важко визначити належність того чи іншого птаха до окремого підвиду. В нашій колекції зустрічались самки і самці з інтенсивно іржастим і з блідим забарвленням вола, з масивним і з порівнюючи тонким дзьобом. Це викликало деякий сумнів щодо їх підвидової належності, однак основні дані визначення дають можливість віднести цих птахів до одного підвиду, а саме — західного великого веретенника (*Limosa limosa limosa* L.). Місцевому населенню веретенник відомий під назвою «дзьобак» або «грицик».

Розповсюджений великий веретенник широко, але густота заселення здебільшого дуже незначна (Дементьев, 1951). На Україні, за даними О. Б. Кістяківського (1957), веретенник зустрічається в лісо-степу, на Поліссі, в Чернігівській, Київській, Черкаській областях, найпівденніше гніздується біля гирла Дністра. В. Тачановський (1882) вважав на заході України та в Польщі веретенника рідкісним гніздовим птахом. В Українських Карпатах веретенники помічені на прольоті, а в Закарпатті, як вказує Ф. Й. Страутман (1954), веретенники не зустрічаються. Наші спостереження підтверджують дані О. Б. Кістяківського (1957) щодо спорадичного поширення веретенника, а також вказують на непостійність місць їх гніздування. На озерах Тур, Довгому та Веліхово веретенники зустрічались досить часто, але не кожного року. В 1953 р. колонія веретенників з 15—20 особин гніздилась на північно-східному березі озера Тур, близько Турського ка-

налу. В 1954 і 1955 роках в районі наших досліджень веретенників зовсім не було. В 1956 році поодинокі гніздові пари спостерігались нами на північному березі озера Тур, на південно-східному березі озера Веліхово. Але вже в 1957 р. веретенники зустрічались тут як окремими гніздовими парами, так і колоніями з 16—19 особин. Прилітають веретенники на Україну досить рано. Як вказує О. Б. Кістяківський (1957), в Київській області веретенники з'являються 6-го квітня, в Харківській — на початку квітня (2—12), а в Мінській області, за даними В. Шнітнікова (1913), вони прилітають 22-го березня.

Нами перший птах був помічений 3-го квітня, а вже 6—8 квітня веретенники зустрічались окремими групами з 16—18 особин досить часто. Групи веретенників можна було помітити на підвищених місцях, інколи близько дороги, тому що болота були ще залиті водою. В цей період крики птахів були подібні до крику мартинів; вони літали над болотами, нахилиючись то на одне крило, то на інше, токували. Вже 10—15 квітня птахи паруються і починають гніздуватися.

Свої гнізда веретенники будують на топких трав'янистих болотах. На напівсухих болотах, всупереч даним Г. П. Дементьєва (1951), гнізд веретенників ми не зустрічали. З дев'яти знайдених і обслідуваних гнізд веретенника п'ять розташовувались на рівнинних ділянках болота, покритих густою невисокою травою, чотири гнізда знайдені на осокових купинах близько води. Підстилка в гнізді товста, досягає 5—9 см, складається з тоненьких сухих травинок, стебел осоки та моху. Гніздо добре замасковане, непомітне. Перше яйце в гнізді ми побачили 20-го квітня 1957 р., 6—12 травня в гніздах зустрічались повні кладки з чотирьох яєць, 22—29 травня яйця в гніздах вже були дуже засиджені. Так, 29-го травня було взяте з гнізда яйце, яке вміщало цілком сформоване пташеня. В цей період в деяких гніздах вже були малі пташенята (29. V, 7. VI, 26. VI).

Яйця веретенника великі (50,6—30,4), грушоподібної форми, забарвлені в грязнозелений колір, з неясними темними плямами. Веретенники досить непомітні серед пташиного населення боліт. В період гніздобудування та насиджування ці птахи дуже обережні, вже при незначному шумі вони покидають небезпечні місця. Однак їх поведінка цілком змінюється в час виводу пташенят: в цей період при небезпеці веретенники не покидають місць гніздування, з криком кружляють над ворогом, не бояться навіть пострілів з рушниць.

Найбільш діяльні веретенники на зорі. Рано вранці їх можна побачити разом з травниками, інколи з куликами-чайками на луках: спокійно пересуваючись по грузькому болоту, вони схоплюють різних жуків, гусінь, метеликів та водяних комах. Літати молоді починають, за даними Г. П. Дементьєва (1951), в місячному віці. Цілком оперених зльотків ми спостерігали в останніх числах червня (29—30), а 14-го липня нами був добутий молодий птах, який вже добре літав. В першій половині липня веретенники зустрічались значними скупченнями з 10—25 птахів і поступово зникали. Останню зграйку веретенників ми бачили 23-го липня. Закінчують переліт веретенники на півдні в кінці вересня — на початку жовтня (О. Б. Кістяківський, 1957). В цей період птахи тримаються великими скупченнями. Зупиняються вони на мулистих берегах річок, на сінокосах, де рослинність невисока.

Линяють птахи довго. За даними Г. П. Дементьєва (1951), птахи влітку не линяють дуже короткий час. З лютого по червень відбувається неповне весняне линяння. Після закінчення гніздового періоду

з липня місяця починається повне післяшлюбне линяння дорослих птахів. Проте строки та інтенсивність линяння не однакові. Деякі птахи починають линяти лише наприкінці серпня. Молоді птахи змінюють своє оперення в період з серпня по січень місяць.

Живлення веретенника вивчалось на підставі аналізу шлунків, добутих в весняно-літні сезони 1953, 1956, 1957 рр. З 29 проаналізованих шлунків два були порожні, не приймаючи до уваги наявність гастролітів-камінців, які знаходились без виключення в кожному шлунку веретенників.

Видовий склад компонентів живлення веретенника в Західноукраїнському Поліссі наведений в таблиці 2.

Таблиця 2

Склад їжі великого веретенника

Компоненти живлення	Загальна кількість екземпл.	Кількість шлунків, в яких знайдено	Зустрічальність в %
Жуки (<i>Coleoptera</i>)			
жужелиці (<i>Carabidae</i>)			
чорна жужелиця (<i>Carabus</i>) (<i>coriaceus</i>)	1	1	3,7
<i>nebria</i> sp.	16	1	3,7
жужелиці невизначені	189	6	22,2
листоїдові (<i>chrisomelidae</i>)			
—щитоноски (<i>cassidini</i>)	6	1	3,7
інші листоїди	25	2	7,4
Плавунці (<i>Dytiscidae</i>)			
личинки плавунців (<i>Dytiscus</i> sp.)	16	5	18,5
Водолюбові (<i>Hydrophilidae</i>)			
личинки великого водолюба (<i>Hydrous</i>)	1	1	3,7
жуки невизначені	48	9	33,3
Двокрилі (<i>Diptera</i>)			
довгоніжки (<i>Tipulidae</i>)	54	8	29,6
Бабки (<i>Odonata</i>)			
стрілкові (<i>Agrionidae</i>)	96	4	14,8
люткові (<i>Lestidae</i>)	10	2	7,4
інші бабки	34	6	22,2
Метелики (<i>Lepidoptera</i>)			
гусениці	19	6	22,2
дорослі	2	1	3,7
Перетинчастокрилі (<i>Hymenoptera</i>)	2	2	7,4
Клопи (<i>Hemiptera</i>)	8	1	3,7
Ручейники (<i>Trichoptera</i>) <i>Malanidae</i> sp.	1	1	3,7
інші ручейники	27	2	7,4
Молюски (<i>Mollusca</i>)			
Котушка (<i>Planorbis spiralis</i>)	12	5	18,5
Затулка звичайна (<i>Valvata piscinalis</i>)	10	6	22,2
інші молюски	шматки	6	22,2
Рослинна їжа			
насіяння рдесту (<i>Potamogeton</i> sp.)	56	1	7,4
„ невизначене	1	1	3,7
листочки, стебла, корінці	мало	12	44,4

Як видно з таблиці 2, під час наших спостережень (квітень—травень—червень) основними компонентами живлення веретенника були жуки, бабки, двокрили, гусениці метеликів та молюски. Отже, в першу половину літа, в період розмноження, веретенники живуть на мокрих болотах, де харчуються в основному водяними комахами та їх

личинками, переважна більшість яких є шкідниками (*Ditiscidae*, *Hydrophilidae*, *Tipulidae*, *Lepidoptera*, *Hemiptera* і інші).

В другу половину літа (липень—серпень) за даними О. Б. Кістяківського (1957) під час осіннього перельоту веретенники живляться на сухих луках, поїдаючи велику кількість прямокрилих (саранових та коникових). Таким чином, на протязі цілого літа веретенники винищують шкідників сільського господарства.

Рослинна їжа в дуже незначній кількості була виявлена нами в 15 проаналізованих шлунках веретенника. Це невеличкі стебельця, листочки, корінці. Лише в одному шлунку знаходились тверді насінини рдесту в кількості 56 екземплярів. Очевидно, насінини в даному випадку виконували функцію гастролітів, оскільки останніх було лише три, а звичайно буває 16—26. Отже, рослинна їжа в харчуванні веретенників не має суттєвого значення, а потрапляє до шлунка механічно, разом з тваринною поживою. Склад їжі веретенника досить різноманітний. В середньому в шлунку веретенника знаходиться 4—5 компонентів поживи, але часом буває набагато більше. Так, в проаналізованому шлунку самця веретенника за номером 34/13, здобутого 9-го червня 1956 р., знаходилась така їжа:

1. <i>Chrisomelidae</i>	1
2. <i>Dytiscus</i> sp. (личинки)	7
3. <i>Lepidoptera</i> (гусінь)	4
4. <i>Odonata</i>	20
5. <i>Hymenoptera</i>	1
6. <i>Trichoptera</i>	1
7. <i>Hydrophilidae</i>	1
8. <i>Valvata piscinalis</i>	2
9. Рослинні рештки	мало

За літературними даними (В. Тачановський, 1882; Г. П. Дементьев, 1951), веретенники можуть поїдати маленьку рибу та ікру. Однак нами цей компонент поживи ні одного разу не був помічений.

П а р а з и т о ф а у н а птахів України до останнього часу вивчена недосить повно. Опублікований ряд робіт, присвячених фауні гельмінтів і ектопаразитів птахів центральних, східних та південних районів республіки; дані з паразитофауни птахів Західного Полісся взагалі, і веретенників зокрема, нам невідомі. Тому при дослідженні птахів велика увага була приділена вивченню їх паразитофауни. В результаті наших досліджень встановлено, що веретенники в значній мірі заражені паразитами; з 29 проаналізованих птахів лише один молодий був позбавлений паразитів. З паразитів особливо поширені перові кліщі (*Analginae*), які локалізуються на борідках другого порядку першорядних махових; інколи вони оселяються в очині пера, дужці.

Скупчення кліщів часами буває дуже велике: на одному пері нараховується понад 1000 екземплярів кліщів. Найбільш поширеними серед них є кліщі *Bregetovia obtusolobata* (W. Dyb, 1951), які виявлені на 24 птахів, що становить 82,4% зараження, та кліщі *Montchadskiana buchholzi* (Cap, 1878), які зустрічались на 22 веретенниках — 76% зараження.¹

Пухоїди (*Mallophaga*) з родів *Menopon* та *Laemobothrion* зустрічались поодинокими особинами в ділянці шиї, вола та на боках веретенника.

¹ За 100% приймається 29 проаналізованих птахів.

Серед ендопаразитів виявлені трематоди у 8 птахів, цестоди у 7 птахів, нематоди у 5 веретенників. Взагалі ендопаразити зустрічались декількома екземплярами або одиницями. Великих скупчень ми не виявили. Цестоди здебільшого мали невеликі розміри — від 0,25 до 1,5 см.

Ступінь зараження веретенників паразитами подано в таблиці 3.

Таблиця 3

Ступінь зараження веретенників паразитами

Назва паразита	Загальна кількість особин	Кількість птахів, на яких зустріч.	% зараження	Локалізація
Перові кліщі (<i>Analginae</i>)				
<i>Bregetovia obtusolobata</i> (W. Dyb, 1951)	багато	24	82,4	першорядні махові
<i>Montchadskiani buchholzi</i> (Can, 1878)	—, —	22	76	—, —
<i>Thecarthra</i> (<i>Phyllochaeta</i>) <i>setigera</i> (Megn et Trt, 1884)	20	3	10,3	—, —
<i>Avenzoaria totani</i> (Can, 1878)	4	2	6,9	—, —
Пухойди (<i>Mallophaga</i>)				
<i>Menopon Nitzsch.</i>	6	3	10,3	тіло
<i>Laemobothrion Nitzsch.</i>	5	2	6,9	—, —
Сисуни (<i>Trematoda</i>)				
<i>Cyclocoelum microstomum</i> (Creplin, 1829)	1	1	3,4	порожнина тіла
<i>Echinostoma revolutum</i> (Fröhlich, 1802)	14	5	17,4	тонкий кишечник
Інші сисуни	27	5	17,4	—, —
Стюжкові черв'яки (<i>Cestodea</i>)				
<i>Anomotaenia paramicrorhyncha</i> (M. Dubiniņa, 1953)	12	3	10,3	—, —
<i>Choanotaenia cingulifera</i> (Krabbe, 1869)	10	2	6,9	—, —
<i>Gonoscolex paradoxus</i> (Saakova, 1958)	3	2	6,9	—, —
<i>Hymenolepis</i> sp.	7	3	10,3	—, —
Інші цестоди	16	3	10,3	—, —
Круглі черв'яки (<i>Nematoda</i>)	9	5	17,2	—, —

Переважає більшість трематод та цестод локалізувалась в тонкому кишечнику, круглі черв'яки — в товстому. Трематода *Echinostoma revolutum* (Fröhlich) з родини *Echinostomidae* (Dietz, 1939) була виявлена в тонкому кишечнику п'яти птахів. Це плоский видовжений паразит розміром до 1 см, з ясно вираженими кріючками на головній присосці, кількість яких дорівнює 35. Як вказує І. Є. Биховська-Павловська (1953), цей паразит дуже поширений серед болотяних птахів. Велика кількість його особин приводить до запалення тонкого кишечника птаха. Зараження можливо відбувається через молюсків, які становлять основний компонент живлення веретенника.

Значення веретенника. На підставі аналізу живлення веретенника можна сказати, що цей птах безумовно корисний. Винищуючи протягом літа шкідливих комах (плавунців, водолюбів, довгоніжок, гусінь метеликів, саранових та коникових) ці птахи приносять значну користь народному господарству. Крім того, веретенник має значення як мисливський птах.

Особливо розвинене полювання на веретенників, як вказує О. Б. Кістяківський (1953), в південних районах республіки в період осіннього перельоту, коли птахи збираються великими скупченнями з 30 і навіть 50 особин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Быховская-Павловская И. Е. Фауна сосальщиков птиц Западной Сибири и ее динамика. Паразитологический сборник ЗИН АН СССР, т. XV, стр. 5—16, М.—Л., 1953.
2. Бутурлин С. А. Кулики Российской империи, вып. II, Тула, 1905.
3. Бутурлин С. А., Дементьев Г. П. Полный определитель птиц СССР, т. I, М.—Л., 1934.
4. Воїнственський М. А., Кістяківський О. Б. Визначник птахів УРСР, Учпедгиз, Київ, 1952.
5. Дементьев Г. П., Гладков Н. А., Птушенко Е. С., Судилова А. М. Определитель птиц СССР. Госиздат, М., 1948.
6. Дементьев Г. П., Гладков Н. А., Спангенберг Е. П. Птицы Советского Союза, т. III, «Советская наука», М., 1951.
7. Дубинин В. Б. Перьевые клещи (Analgesoidea), ч. I. Фауна СССР. Паукообразные, 6(5), изд. АН СССР, М., 1935.
8. Дубинина М. Н. Паразитологическое исследование птиц. Изд. АН СССР, М.—Л., 1955.
9. Дубинина М. Н. Ленточные черви птиц, гнездящихся в Западной Сибири. Паразитологический сборник ЗИН АН СССР, т. XV, стр. 117—234, М.—Л., 1953.
10. Жадин В. И. Жизнь пресных вод, т. I, изд. АН СССР, 1940.
11. Жадин В. И. Моллюски пресных вод СССР, М., 1952.
12. Иванов А. И., Козлов Е. Б., Портенко Л. А., Тугаринов А. Я. Птицы СССР, ч. II, Изд. АН СССР, М.—Л., 1953.
13. Кістяківський О. Б. Фауна України, т. IV, Птахи. Київ, 1957.
14. Плавильщиков Н. Н. Определитель насекомых. М., 1957.
15. Потемкина В. А. Основные гельминтозы домашних птиц. Сельхозгиз, М., 1953.
16. Страутман Ф. И. Птицы Советских Карпат. Изд. АН СССР, 1954.
17. Скрябин К. И., Матевосян Е. М. Ленточные гельминты-гигиенические педицы домашних и охотничье-промысловых птиц. Сельхозгиз, М., 1945.
18. Храневич В. Нарис фавни Поділля, ч. I, Вінниця, 1925.
19. Храневич В. Птахи Поділля, Вінниця, 1925.
20. Шарлемань М. В., Портенко Л. А. Записки про птахів Волині. Матеріали для орнітофавни України. Вид. АН УРСР, Київ, 1926.
21. Шнитников В. Н. Птицы Минской губернии. Матер. к познанию фауны и флоры Российской империи, отд. зоол., вып. XII, М., 1913.
22. Филиппев И. Н. Определитель насекомых, М., 1928.
23. Godun L. Badania awifauny północnej krawędzi Podola, 1939.
24. Domaniowski I. Materiały do ornitofauny ziem Polskich, część Archiwum Nauk biologicznych. Tow. Nauk. Warszawskiego, 1922.
25. Dunajewski A. Badania nad ptakami Wołynia. Acta ornitologica Musei Zoologici Polonici, t. II N 17, Warszawa, 1938.
26. Taczanowski W. Ptaki krajowe, t. II, Kraków, 1882.

Д. Г. СТАДНИЦЬКИЙ

ГЕОМОРФОЛОГІЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДОЛИНИ р. ЛОМНИЦІ В МЕЖАХ ГОРГАН

Однією з найбільших рік Зовнішніх Горган є Ломниця, яка бере свій початок на північно-східних схилах Головного вододільного хребта. Ломниця є правою притокою Дністра, в який вона впадає в районі Галича. Довжина Ломниці 122 км, площа водозбірного басейну — 1430 км². Протікає ця річка по добре виробленій долині, яка чітко виділяється в рельєфі Радянських Карпат і Прикарпаття і має загальне простягання з південного заходу на північний схід.

В зв'язку з тим, що долина р. Ломниці пересікає поперек різні тектонічні зони (Зовнішню антиклінальну зону і Прикарпатський прогин) і різні геоморфологічні райони, її можна поділити на дві різко відмінні між собою частини: 1) гірську і 2) передгірську (рівнинну).

Гірська частина долини р. Ломниці розташована в середньогірському районі Зовнішніх Горган з дуже своєрідним рельєфом.

Загальною рисою рельєфу Горган являється відображення в формах поверхні структурно-літологічної зональності, характерної для Зовнішньої (Скибової) зони. Гірські хребти в басейні р. Ломниці приурочені до ямненських пісковиків і пісковиків іноцерамової серії, які виходять на поверхню в гребневих частинах антиклінальних складок.

Антиклінальні складки в Горганах насуваються одна на одну своїми північними крилами, внаслідок чого гірські хребти мають асиметричну будову. Північні їх схили круті, а південні пологі. В плані вони витягуються згідно до структурно-літологічних зон з північного заходу на південний схід, причому дуже звивисто.

Гребневі лінії гірських хребтів вирівняні, і лише де-не-де піднімаються окремі вершини, які досягають значних висот. Вершини мають форму стіжки, причому їх північні схили круті, а південні пологі. Більшість окремих гірських хребтів (Аршиця, Сивулянський) і вершин (Лопушна — 1836 м, Сивуля — 1818 м, Ігровец — 1803 м, Висока — 1808 м, Грофа — 1748 м, Попада — 1740 м і др.) піднімаються вище верхньої границі лісу і покриті кам'яними розсипищами.

Долина ріки Ломниці не пристосовується до основної структурно-літологічної зональності Горган. Вона витягується з південного заходу на північний схід і пересікає поперек всі структурно-літологічні зони Горган, що й відбивається в морфології самої долини. В тих місцях, де Ломниця поперек розрізає гірські хребти і на поверхню виходять тверді пісковики, її долина сильно звужується і має вигляд ущелини. В місцях виходів м'яких сланців, приурочених до синклінальних заглибин, долина розширюється і часто приймає форму витягну-

тої улоговини. В таких місцях Ломниця приймає бічні допливи. Долина Ломниці являється типовою для Горган поперечною річковою долиною, яка в плані представляє собою ланцюг невеликих улоговин, поєднаних між собою ущілинами.

Ріка Ломниця утворюється з трьох невеличких потічків, які стікають з крутих північних схилів вершин Прелука (1527 м), Буштула (1601 м) і Великого Кепута (1607 м) в невелику водозбірну улоговину, оточену крутими схилами навколишніх гірських хребтів. В водозбірній котловині р. Ломниця має вигляд бурхливого гірського потоку, шириною в 1,5 м, який протікає серед низьких, але досить широких берегів. На північ улоговина звужується і переходить в ущелину з крутими схилами. Річка тут врізується в корінні породи, і галька в руслі відсутня. Ущелина вниз по течії поступово розширюється і в місці впадіння в р. Ломницю зліва безіменного потоку перетворюється в улоговину. Розміри котловини невеликі. Вона має 150—180 м в ширину і 350—400 м в довжину. По боках котловини піднімаються високі схили гірських хребтів, на яких відслонюються корінні породи, а в деяких місцях утворюються невеликі кам'яні осипища.

В улоговині добре виділяються I, II і III тераси з відповідними висотами в 0,5, 3—3,2 і 6—7 м. Перша тераса повністю збудована з гальки, а друга і третя — з гальки, перекритої тонким шаром жовтобурих суглинків (6—10 см). На третій терасі суглинки перемішані з добре вкатоною галькою. Галька різних розмірів — від дрібної до 20 см в діаметрі.

Русло ріки в котловині розширюється до 3,2—4 м і сильно підмиває крутий правий берег.

Від вищезгаданої котловини до с. Сплаї р. Ломниця тече в уще- леподібній, дуже вузькій долині, в якій можна виділити лише окремі ділянки I, II і, на правому березі, V тераси. Всі інші тераси тут розмиті. Русло ріки врізується в корінні породи. Ріка неглибока, і її русло заповнене некатаними уламками корінних порід, до яких примішується незначна кількість гальки.

В районі с. Сплаї в р. Ломницю впадає ліва притока, і долина ріки знов розширюється в улоговину шириною 200—300 м і довжиною 600—700 м. Улоговина, як і попередня, має загальний нахил вздовж течії ріки. Ріка підмиває крутий правий берег, і улоговина повністю розміщується на лівому березі, де в рельєфі виділяється три терасових рівня.

Перша тераса має висоту 0,5—0,6 м і складена добре вкатоною галькою. Вона має невеликі розміри. Друга тераса, висотою в 1,5—2 м і шириною до 100 м, збудована з гальки, яка перекрита зверху жовтобурими суглинками.

Третя тераса зустрічається лише окремими ділянками. Її висота досягає 6—7 м. Збудована вона з корінного цоколя, перекритого шаром гальки і суглинків. На правому березі до русла р. Ломниці підходить крутий схил гірського хребта, і тераси на ньому не виділяються.

Від с. Сплаї до с. Брустури долина р. Ломниці вже значно ширша і більш різноманітна. Вона то розширюється в місцях виходів на поверхню глинистих сланців, то звужується в тих місцях, де ріка перерізає поперек гірські хребти. Відповідно до цього схили долини бувають часом пологі, широкі і терасовані, часом круті і високі, без терас. Окремі ділянки терас зустрічаються тут на обох берегах. Найчастіше

виділяються в рельєфі долини рівні I, II, III і IV терас, а V і VI терасові рівні представлені лише окремими ділянками. Біля села Брустури долина р. Ломниці звужується до 60—70 м і в ній виділяється лише I і II тераси.

В с. Брустури в Ломницю впадає два потоки: Великий Щавник і Малий Щавник. Ці два потоки виробили в м'яких менілітових породах досить велику котловину. Котловина с. Брустури має 200—250 м в ширину, 700—800 м в довжину. Вона характеризується дуже рівним дном, яке складене II терасою. Ріка в котловині відхиляється вправо і підмиває верхні тераси.

В улоговині можна виділити декілька терасових рівнів. На лівому березі тут добре виділяється I, II і III тераси з відповідними висотами в 0,5, 2—2,8 м і 6—6,5 м. На правому березі в рельєфі добре виділяються III, IV, V і VI тераси. I і II тераси складені галькою, яка на II терасі перекрита шаром суглинків, а III, IV, V і VI тераси мають корінний цоколь, перекритий галькою і жовтобурими суглинками. На схилах навколишніх гірських хребтів в багатьох місцях спостерігаються кам'яні осипища.

Нижче с. Брустури долина р. Ломниці значно ширша, ніж у верхів'ях, але в місцях, де вона перерізає гірські хребти, звужується в ущелину. На всьому протязі від с. Брустури до с. Дарів в долині спостерігаються I, II, III тераси, і лише в місцях, де близько підходять гірські хребти, II і III тераси відсутні.

В районі с. Дарів долина р. Ломниці утворює улоговину шириною 400—500 м і довжиною близько 1 км. В цьому місці впадає в Ломницю її ліва притока — потік Дарів. Ріка Ломниця утворює тут велику петлю і підмиває то лівий, то правий берег. Справа до котловини близько підходять гірські хребти, круті схили яких вкриті кам'яними осипищами і кам'яними потоками. На лівому березі в котловині виділяються I, II, III тераси, а IV і V тераси представлені лише окремими ділянками.

Від с. Дарів вниз по течії долина р. Ломниці сильно звужується і перетворюється в ущелину, яка простягається аж до впадіння в Ломницю її лівої притоки — р. Молодої в районі с. Осмолода. На цій ділянці ріка перерізає поперек потужні гірські хребти, в зв'язку з чим схили долини круті і покриті кам'яними осипищами. В багатьох місцях на поверхню виходять корінні породи. На лівому березі тераси зовсім відсутні, а на правому є лише вузька полоса II і в деяких місцях III тераси. Річка вривається в корінні породи і стає дуже порожистою. Недалеко від с. Дарів (500—600 м північніше) на правому березі Ломниці пологий гірський схил повністю покритий кам'яними розсипищами, де уламковий матеріал досягає від 0,2 до 3 м в діаметрі. Площа, зайнята кам'яними розсипищами, тут досягає приблизно 500 м × 600—700 м.

Особливо звужується долина р. Ломниці в місці впадіння її лівої притоки — потоку Петрос. В цьому місці лівий берег р. Ломниці прямовисний і зложений корінними породами. Потік Петрос також протікає в типовій ущелині з прямовисними схилами, збудованими корінними породами. Як русло р. Ломниці, так і русло Петроса заповнені обломочним матеріалом, який сповзає з крутих схилів гірських хребтів. В цих місцях, де на поверхню виходять масивні пісковики, в русло ріки скочуються великі брили, які утворюють в руслі ріки цілі каскади перекатів. В місцях, де виходять менілітові сланці, звітрілий матеріал

сповзає з схилів у вигляді кам'яних потоків, конуси виносу яких досягають русла ріки.

В місці впадіння до р. Ломниці її правої притоки — р. Бистриці долина дещо розширюється. Тут лівий берег ріки крутий, а на правому можна спостерігати невеликі ділянки IV, V і VI терас. Всі останні тераси розмиті, і русло ріки врізується в корінні породи.

Далі до Осмолоди долина р. Ломниці являє собою типову ущелину, яка дещо розширюється лише в місцях виходів м'яких менілітових сланців. Схили долини круті і мають У-подібну форму. Тераси спостерігаються лише в розширених місцях. Найчастіше просліджується рівень I, III, IV і VI терас. Русло ріки глибоко врізується в корінні породи і утворює ряд порогів.

Прорізавши поперек цілий ряд гірських хребтів і залишивши по лівий бік хребти Петрос, Канюсяк і Грофу, а по правий — хребет Сивулю, долина р. Ломниці виходить в районі с. Осмолоди в досить велику улоговину, яка є найбільшою улоговиною в долині р. Ломниці. Вона розташована в місці злиття р. Молодої з р. Ломницею. Ріка Молода є найбільшою лівою притокою р. Ломниці і має добре вироблену поздовжню долину з цілою серією терас на правому березі (I, II, IV і VI) і крутим схилом хребта Аршиця на лівому. В місці її впадіння в Ломницю утворилась Осмолодська улоговина шириною 600—700 м і довжиною 1000—1500 м.

З півдня в улоговину спускається декількома східцями північні схили Канюсяка Малого; зі сходу улоговина обмежується крутими схилами високого хребта Матахів; з заходу — крутими схилами хребта Аршиця; з півночі — боковими відрогами хребтів Матахів і Аршиця.

Улоговина витягнена вздовж течії ріки і має загальний нахил на північ. В рельєфі улоговини виділяється три тераси, які повністю розміщені на лівому березі річки. На правому березі тераси відсутні, внаслідок того, що ріка підмиває круті схили хребта Матахів.

Перша тераса в улоговині має висоту 0,5—0,7 м і повністю складена галькою і крупним уламковим матеріалом, який утворюється на місці внаслідок руйнування корінного цоколя II і III терас.

Друга тераса має висоту 2,0—2,5 м і ширину 10—15 м. Основа її збудована корінними породами, які перекриті галькою і тонким шаром бурих суглинків.

Третя тераса в Осмолодській улоговині має висоту 5,5—6,5 м і ширину від 400 до 600 м. Поверхня її вирівняна. В основі тераси відслонюють корінні породи, в яких переважають сланці. Корінні породи перекриваються галькою, над якою залягає шар жовтобурих суглинків товщиною 30—50 см. Галька, яка залягає під суглинками, добре вкатана і має різну величину — від дрібної до крупної з діаметром 20—30 см. Русло ріки в улоговині відхиляється вправо і розмиває схили хребта Матахів, крутість яких досягає 40°. На них поширені кам'яні осипища. Русло ріки нешироке (8—12 м), але швидкість течії дуже велика.

В північній частині улоговини русло ріки повертає вліво і виходить у вузьку ущелиноподібну частину долини між с. Осмолодою і с. Підлютим. На цій ділянці річка перерізає поперек гірські хребти, збудовані з яменських пісковиків і пісковиків іноцерамової серії. Схили річкової долини круті і багаті осипищами та обвалами. В с. Підлютому долина дещо розширюється в зв'язку з тим, що в Ломницю справа впадає досить великий потік Кузьмінець. Тут в долині Ломни-

ці нараховується чотири—п'ять терас. Особливо добре розвинена II і III тераси, на яких і розташоване село. IV, V, VI, VII і VIII тераси зустрічаються окремими ділянками.

Від села Підлютого долина Ломниці починає поступово розширюватися в бік Прикарпаття. Русло ріки петляє по долині і підмиває то лівий, то правий береги. В багатьох місцях русло розділяється на ряд великих і малих рукавів, які врізуються у власні наноси. Долина звужується лише в місцях, де до неї близько підходять хребти Пасічний і Тодор, але ширина її тут не менше 200—300 м. Схили долини становляться пологими і терасованими. Терасові рівні добре виділяються в рельєфі, оскільки вони не заліснені. Особливо добре виділяються тераси в районі сіл Ясеня і Сливки.

В селі Ясеня русло Ломниці ділиться на декілька рукавів, які розділяють долину на ряд островів. Долина має тут ширину до 1,5 км. В ній виділяється ціла серія терас як на правому, так і на лівому березі. На лівому березі виділяється три тераси I, II і III. Перша тераса має висоту 0,5—0,8 м і складена з добре окатаної гальки. Ширина її — 1—10 м. Друга тераса, висотою 1,5—2,5 м і шириною 20—80 м, також збудована галькою, яка перекрита шаром суглинків. Третя тераса має висоту 4,5—5 м і ширину 80—100 м. Її корінний цоколь перекритий жовтобурими суглинками, перемішаними з галькою. Між окремими терасами добре виражені терасові уступи.

На правому березі виділяється шість терасових рівнів. Тут особливо добре розвинена II, III і IV тераси, які утворюють одна до одної круті і високі уступи. Перша тераса, як і друга, повністю збудовані з наносного річкового матеріалу. Друга тераса має ширину до 550 м і висоту 1,5—2,5 м. Зверху галька перекривається суглинками. Поверхня тераси прорізається старицями і широкими рукавами р. Ломниці, один з яких в селі підмиває III терасу.

Висота третьої тераси 4—5 м, ширина — 640 м. Вона має корінний цоколь, який перекривається шаром гальки, що, в свою чергу, покрита жовтими суглинками. Над III терасою піднімається добре виражений крутий уступ 10—12-метрової IV тераси, ширина якої 150—230 м. Над IV терасою піднімаються пологими уступами V і VI тераси.

Схили V і VI терас сильно розмиті і прорізані балками.

В районі с. Сливки добре виділяються I, II, III і IV тераси. Русло ріки сильно розширюється і утворює ряд рукавів і стариць. Через с. Сливки проходить старе русло, яким 25—30 років тому протікала р. Ломниця. Під час великих паводків воно заповнюється водою і перетворюється в бурхливу ріку.

Всі тераси повністю збудовані з наносного матеріалу. I тераса займає нешироку смугу і складена галькою. Висота її 0,5—0,7 м. II тераса має висоту 1,4—1,6 м і збудована з галечника, перекритого супісками. Третя тераса має висоту 4—4,5 м. Складена вона товщею суглинків, в основі яких лежить галька. Особливо виділяється IV тераса, що має висоту 10—12 м, повністю збудована з жовтобурих суглинків, які вверх переходять в супіски.

В нижніх шарах суглинків зустрічається слабо вкатана галька, часто великих розмірів. В напрямку до с. Небилів IV тераса поступово понижується, а в III терасі зникає галька.

В районі Перегінська долина р. Ломниці виходить на територію Прикарпаття і досягає 4—6 км ширини. Русло ріки розділяється на ряд рукавів, які врізуються у власні наноси. В долині ріки нарахову-

ється чотири тераси. I тераса має висоту 0,4—0,5 м. Складена вона з гальки, в якій вироблене русло ріки. Розмір гальки коливається в середньому від 10—15 до 20—25 см.

II тераса висотою 1,5—2 м має на лівому березі ширину 80—100 м, а на правому — 10—15 м.

На правому березі ріка підмиває цю терасу і утворює відслонення, де добре видно її будову.

Тераса складена жовтобурими суглинками, товщина яких досягає 20—25 см. Під суглинками лежить тонкий шар мілкої гальки, діаметром 5—10 см. Нижче по розрізу галька змінюється тонким шаром суглинків, під яким залягає крупна галька, діаметром в 18—20 см.

III тераса висотою 2,5—3 м має в районі Перегінська найбільше поширення. В будові цієї тераси значне місце займає жовтобурий суглинок, потужність якого досягає 50—70 см. Під ним лежить тонкий шар дрібної гальки, діаметр якої не перевищує 5 см. Під галькою залягає потужна товща крупнозернистого супіску, який вниз по розрізу переходить в дрібнозернистий.

На правому березі р. Ломниці в районі Перегінська велику площу займає IV тераса, яка опускається до III крутим уступом. Збудована вона з суглинків, в основі яких залягають слабовкатані галечники, змішані з глиною. Товща суглинків на IV терасі досягає 5—6 м.

Висота тераси коливається в межах від 10 до 12 м. Поверхня її вирівняна.

Далі на північ від м. Перегінськ р. Ломниця протікає по території Прикарпаття в добре виробленій і широкій долині, яка в значній мірі заболочена. Ріка тут сильно меандрує і має рівнинний характер.

Долина р. Ломниці, як і інші поперечні долини Горган, була оформлена до початку верхньосарматського підняття Карпат. Під час верхньосарматського підняття вона була омоложена і сильно врізувалась в пенеплен. В пліоцені відбувся новий вріз, про що свідчать ділянки VIII тераси висотою 180—200 м. З плейстоценового часу до сьогоднішнього дня в Карпатах відбулось декілька піднять, внаслідок чого р. Ломниця періодично врізувалась в корінні породи і створила сім терас різної висоти. Поперечний напрямок долини Ломниці, як і інших рік Горган, на нашу думку, був визначений тектонікою — молодим тектонічним утворенням сарматського віку і, можливо, зв'язком з тектонічною тріщиною в дофлішевому фундаменті Карпат.

Долина р. Ломниці має велике значення в господарському освоєнні найбільш високої і труднодоступної частини Горган. Вона заходить всередину Горган і використовується, в першу чергу, для прокладання шляхів сполучення. Шляхи сполучення, населені пункти і сільськогосподарські угіддя розміщуються, як правило, на II і III терасах.

Долина р. Ломниці, крім того, являється ще вихідним пунктом для освоєння величезних лісових масивів в її верхів'ях.

А. М. КУЗЕМКО

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ТРИШАРОВОЇ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ У ВИГЛЯДІ ПРОСТИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

Напружений стан тришарової пологої оболонки визначається функціями W і Φ , які, як відомо [2], задовольняють рівнянням

$$\frac{D}{2t} \nabla^2 \nabla^2 W = \left(1 - \frac{D}{G_3 h} \nabla^2\right) \left[\kappa_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \kappa_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{2t} \right], \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = - \kappa_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \kappa_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (2)$$

і відповідним граничними умовам, де

W — функція прогинів;

Φ — функція напружень;

D — циліндрична жорсткість;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

κ_x, κ_y — головні кривизни серединної поверхні;

t — товщина зовнішнього шару;

h — товщина оболонки;

G_3 — жорсткість на зсув заповнювача.

У випадку постійних кривизн і товщини h систему двох диференціальних рівнянь (1) і (2) можна привести до одного розв'язуючого рівняння восьмого порядку відносно функції W ;

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2t} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 W - \frac{DE}{G_3 h} \left[\kappa_y^2 \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + \kappa_x (\kappa_x + 2\kappa_y) \frac{\partial^6 W}{\partial x^2 \partial y^4} + \right. \\ & + \kappa_y (\kappa_y + 2\kappa_x) \frac{\partial^6 W}{\partial x^4 \partial y^2} + \kappa_x^2 \frac{\partial^6 W}{\partial y^6} \left. \right] + E \left(\kappa_x^2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ & \left. + \kappa_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) = \frac{1}{2t} \nabla^2 \nabla^2 q - \frac{D}{2t G_3 h} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 q, \end{aligned} \quad (3)$$

або відносно функції Φ :

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2t} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \frac{DE}{G_3 h} \left[\kappa_y^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \kappa_x (\kappa_x + 2\kappa_y) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^2 \partial y^4} + \kappa_y (\kappa_y + 2\kappa_x) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \right. \\ & \left. + \kappa_x^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} \right] + E \left(\kappa_x^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \kappa_y^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right) = \\ & = - \frac{E}{2t} \left(1 - \frac{D}{G_3 h} \nabla^2 \right) \left(\kappa_x \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \kappa_y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В дальшому, не обмежуючи загальності методу розв'язування, прийемо зусилля і моменти, які діють на краях оболонки, а також зовнішнє навантаження симетрично розподіленими відносно координатних осей.

Загальний розв'язок рівняння (3) запишемо так:

$$W = W_0 + W_1,$$

де W_0 — частинний розв'язок рівняння (3), а W_1 — загальний розв'язок однорідного рівняння (5):

$$\begin{aligned} \frac{D}{2t} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 W - \frac{DE}{G_3 h} \left[\kappa_y^2 \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + \kappa_x (\kappa_x + 2\kappa_y) \frac{\partial^6 W}{\partial x^2 \partial y^4} + \kappa_y (\kappa_y + 2\kappa_x) \frac{\partial^6 W}{\partial x^4 \partial y^2} + \right. \\ \left. + \kappa_x \frac{\partial^6 W}{\partial y^6} \right] + E \left(\kappa_x^2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2\kappa_x \kappa_y \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \kappa_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Прийнявши зовнішнє навантаження у вигляді ряду

$$q = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \cos \frac{\kappa \pi x}{a},$$

частинний розв'язок W_0 можна взяти таким:

$$W_0 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2t} \left(1 + \frac{D}{G_3 h} \mu_{\kappa}^2 \right) a_{\kappa}}{\frac{D}{2t} \mu_{\kappa}^4 + \frac{DE}{G_3 h} \kappa_y^2 \mu_{\kappa}^2 + E \kappa_y^2} \cos \frac{\kappa \pi x}{a}. \quad (6)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (5), аналогічно роботі (1), шукаємо в такому вигляді:

$$W_1 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} X_{\kappa}(x) \cos \mu_{\kappa}^* y + \sum_{\kappa=1}^{\infty} Y_{\kappa}(y) \cos \mu_{\kappa} x, \quad (7)$$

де

$$\mu_{\kappa}^* = \frac{\kappa \pi}{b}; \quad \mu_{\kappa} = \frac{\kappa \pi}{a},$$

a, b — розміри прямокутної в плані оболонки.

Підставляючи (7) в (3), одержимо два звичайних диференціальних рівняння восьмого порядку відносно функції $X_{\kappa}(x) Y_{\kappa}(y)$. Відповідно характеристичні рівняння запишуться так:

$$\begin{aligned} s^8 - (4\mu_{\kappa}^2 + a \kappa_y^2) s^6 + [6\mu_{\kappa}^4 + a \kappa_y (\kappa_y + 2\kappa_x) \mu_{\kappa}^2 + b \kappa_x^2] s^4 - \\ - [4\mu_{\kappa}^4 + a \kappa_x (\kappa_x + 2\kappa_y) \mu_{\kappa}^2 + 2b \kappa_x \kappa_y] \mu_{\kappa}^2 s^2 + (\mu_{\kappa}^4 + a \kappa_x^2 \mu_{\kappa}^2 + b \kappa_x^2) \mu_{\kappa}^4 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} r^8 - (4\mu_{\kappa}^2 + a \kappa_x^2) r^6 + [6\mu_{\kappa}^4 + a \kappa_x (\kappa_x + 2\kappa_y) \mu_{\kappa}^2 + b \kappa_y^2] r^4 - [4\mu_{\kappa}^4 + \\ + a \kappa_y (\kappa_y + \kappa_x) \mu_{\kappa}^2 + 2b \kappa_x \kappa_y] \mu_{\kappa}^2 r^2 + (\mu_{\kappa}^4 + a \kappa_y^2 \mu_{\kappa}^2 + b \kappa_y^2) \mu_{\kappa}^4 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Із виду рівнянь витікає, що в залежності від пружних постійних їх корені можуть бути дійсними або комплексними. У випадку дійсних різних коренів маємо:

$$\begin{aligned} X_k(x) &= A_k \operatorname{ch} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \beta_k x + C_k \operatorname{ch} \gamma_k x + D_k \operatorname{ch} \delta_k x, \\ Y_k(y) &= A'_k \operatorname{ch} \alpha'_k y + B'_k \operatorname{ch} \beta'_k y + C'_k \operatorname{ch} \gamma'_k y + D'_k \operatorname{ch} \delta'_k y. \end{aligned} \quad (10)$$

У випадку комплексних коренів

$$\begin{aligned} X_k(x) &= A_k^* \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x + B_k^* \operatorname{sh} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x + \\ &+ C_k^* \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x + D_k^* \operatorname{sh} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x, \\ Y_k(y) &= A_k \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \beta_k y + \\ &+ C_k \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y + D_k \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y. \end{aligned} \quad (11)$$

Дослідимо випадок комплексних коренів.

Загальний розв'язок рівняння (3) в даному разі запишеться так:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k^* \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x + B_k^* \operatorname{sh} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x + C_k^* \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x + \\ &+ D_k^* \operatorname{sh} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x\} \cos \mu_k^* y + \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \beta_k y + \\ &+ C_k \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y + D_k \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y\} \cos \mu_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2t} \left(1 + \frac{D}{G_3 h} \mu_k^2\right) a_k}{\frac{D}{2t} \mu_k^4 + \frac{DE}{G_3 h} \kappa_y^2 \mu_k^2 + E \kappa_y^2} \cos \frac{\kappa \pi x}{a}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогічно одержимо загальний розв'язок рівняння (4)

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k^* \operatorname{ch} \alpha_k^* x \cos \beta_k^* x + B_k^* \operatorname{sh} \alpha_k^* x \sin \beta_k^* x + C_k^* \operatorname{ch} \gamma_k^* x \cos \delta_k^* x + \\ &+ D_k^* \operatorname{sh} \gamma_k^* x \sin \delta_k^* x\} \cos \mu_k^* y + \sum_{k=1}^{\infty} \{A'_k \operatorname{ch} \alpha'_k y \cos \beta'_k y + B'_k \operatorname{sh} \alpha'_k y \sin \beta'_k y + \\ &+ C'_k \operatorname{ch} \gamma'_k y \cos \delta'_k y + D'_k \operatorname{sh} \gamma'_k y \sin \delta'_k y\} \cos \mu_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{E}{2t} \left(1 + \frac{D}{G_3 h} \mu_k^2\right) \kappa_y a_k}{\frac{D}{2t} \mu_k^6 + \frac{DE}{G_3 h} \kappa_y^2 \mu_k^4 + E \kappa_y^2 \mu_k^2} \cos \frac{\kappa \pi x}{a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функції W і Φ не є незалежними.

Із умови тотожного задоволення рівнянь (1) і (2) одержуємо вісім залежностей між коефіцієнтами даних функцій такого виду:

$$\left. \begin{aligned} a_{ak} A'_k + b_{ak} B'_k &= c_{ak} A_k + d_{ak} B_k \\ a_{ak} B'_k - b_{ak} A'_k &= c_{ak} B_k - d_{ak} A_k \\ a_{\gamma k} C'_k + b_{\gamma k} D'_k &= c_{\gamma k} C_k + d_{\gamma k} D_k \\ a_{\gamma k} D'_k - b_{\gamma k} C'_k &= c_{\gamma k} D_k - d_{\gamma k} C_k \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

де

$$a_{\alpha k} = \mu_k^4 - 2\mu_k^2(\alpha_k^2 - \beta_k^2) + \alpha_k^4 - 6\alpha_k^2\beta_k^2 + \beta_k^4$$

$$b_{\alpha k} = 4\alpha_k\beta_k(\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \mu_k^2)$$

$$c_{\alpha k} = -E[\kappa_x(\alpha_k^2 - \beta_k^2) - \kappa_y\mu_k^2]$$

$$d_{\alpha k} = -2E\kappa_x\alpha_k\beta_k$$

$$a_{\gamma k} = \mu_k^4 - 2\mu_k^2(\gamma_k^2 - \delta_k^2) + \gamma_k^4 - 6\gamma_k^2\delta_k^2 + \delta_k^4$$

$$b_{\gamma k} = 4\gamma_k\delta_k(\gamma_k^2 - \delta_k^2 - \mu_k^2)$$

$$c_{\gamma k} = -E[\kappa_x(\gamma_k^2 - \delta_k^2) - \kappa_y\mu_k^2]$$

$$d_{\gamma k} = -2E\kappa_x\gamma_k\delta_k.$$

Таким чином функції W і Φ , дані формулам (14), (15), виражають загальний розв'язок рівнянь (1) і (2). Невідомі коефіцієнти даних функцій визначаються з краєвих умов:

1) для функції W :

$$\begin{aligned} W &= 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2} \text{ і } y = \pm \frac{b}{2}; \\ -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) &= M_y(x) \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}; \\ -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) &= M_x(y) \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

2) для функції Φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \sigma_x; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy} \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2}; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -\sigma_y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = -\tau_{yx} \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

В залежності від значень правих частин (15), (16) маємо різні випадки краєвих умов.

Розглянемо частинні випадки.

1. Сферична оболонка:

В даному випадку характеристичне рівняння при умові

$\sqrt{a^2\kappa^4 - 4b\kappa^2} > 0$ має всі дійсні корені, а при умові $\sqrt{a^2\kappa^4 - 4b\kappa^2} < 0$ — два дійсних різних і чотири комплексні. У випадку дійсних різних коренів розв'язок береться у вигляді (10). У випадку комплексних коренів розв'язок береться у вигляді (11). Між коефіцієнтами функцій W і Φ існують залежності аналогічні (14).

2. Циліндрична оболонка.

В даному випадку характеристичне рівняння (9) приймає вигляд

$$x^4 - a'x + b' = 0, \quad (17)$$

де

$$x = r^2 - \mu_k^2; \quad a\kappa_y^2\mu_k^4 = a'; \quad b\kappa_y^2\mu_k^4 = b'.$$

Розв'язок рівняння (18), як відомо, приводиться до розв'язування системи

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2\sqrt{z} + y &= 0 \\ x^2 - 2\sqrt{z} + y' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

і рівняння

$$z^3 - \frac{1}{4}b'z - \frac{1}{64}a'^2 = 0, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}a - \frac{b}{4\sqrt{z}} + 2z; \\ y' &= \frac{1}{2}a + \frac{b}{4\sqrt{z}} + 2z. \end{aligned}$$

В рівнянні (19) один корінь завжди дійсний, два інших комплексні або дійсні, в залежності від того, виконується чи ні умова

$$\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 > 0.$$

Якщо $\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 > 0$, один корінь дійсний, а два інші комплексні.

Якщо $\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 = 0$, всі три корені дійсні, з них два однакові.

Якщо $\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 < 0$, всі три корені дійсні.

Всі корені в рівнянні (17) дійсні, якщо вони в рівнянні (19) додатні. Якщо виконується умова

$$\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 < 0,$$

то рівняння (17) має тільки комплексні корені. Коли ця умова не виконана, то два корені в рівнянні (17) дійсні і два комплексні. Таким чином, в залежності від коренів характеристичного рівняння береться розв'язок у вигляді (10) або (11).

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев, Т. Л. Мартынович. К расчету пологих оболочек прямоугольных в плане двоякой кривизны. Известия АН СССР, ОТН, № 2, 1960.
2. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
3. Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, т. 4. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
4. Э. И. Григолюк. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем. Известия АН СССР, ОТН, № 1, стр. 77—84, 1956.

Д. Г. ХЛІБНИКОВ

РОЗРАХУНОК НЕСКІНЧЕННО ДОВГОЇ ПРУЖНОЇ СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

(плоска задача)

Розглянемо пружну ізотропну смугу висотою $2h$ ($-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$), краї якої $y = \pm h$ підкріплені пружними тонкими стержнями однакової жорсткості, сталої по довжині стержня. Будемо вважати, що одна з головних осей інерції кожного поперечного перерізу **обох стержнів** лежить в площині смуги. Завдяки незначній висоті підкріплюючих стержнів припускаємо, що спай кожного з них із смугою має місце вздовж їх осевих ліній, тобто при $y = \pm h$. Смуга знаходиться під дією прикладеного вздовж підкріплених країв поперечного і поздовжнього навантаження, інтенсивність якого відповідно $q^+(x)$ і $n^+(x)$ на верхній стороні ($y=h$) та $q^-(x)$ і $n^-(x)$ на нижній стороні ($y=-h$) смуги (рис. 1).

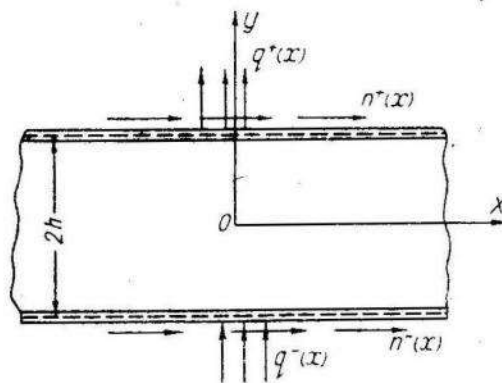


Рис. 1.

При розв'язанні задачі найбільший інтерес становить визначення контактних напружень на контурі спаю, нормальний і дотичний компоненти яких позначимо через $f^+(x)$ і $g^+(x)$ при $y=h$ та $f^-(x)$ і $g^-(x)$ при $y=-h$. Очевидно, всюди на контурі спаю $y = \pm h$ крім рівності напружень повинна виконуватись також умова рівності переміщень:

$$u = u_0, \quad v = v_0,$$

де u, v — компоненти переміщення точок смуги, u_0, v_0 — компоненти точок стержня.

Зв'язок між переміщеннями точок стержня і діючим на нього навантаженням дається формулами опору матеріалів [1] (див. також [4]):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{dx^2} &= \frac{1}{G_1} [\pm g(x) - n(x)], \\ \frac{d^4 v_0}{dx^4} &= -\frac{1}{G_2} [\pm f(x) - q(x)], \end{aligned} \quad (2)$$

де G_1 і G_2 — жорсткості стержня на розтяг та згин, віднесені до товщини смуги. При цьому для верхнього стержня, тобто при $y=h$, за-

мість подвійного знаку в формулах (2) і всюди надалі повинен бути взятий плюс, крім того, величинам $q(x)$, $n(x)$, $f(x)$, $g(x)$ повинен бути приписаний індекс $+$, для нижнього ($y=-h$) — відповідно $-$.

Для встановлення зв'язку між переміщеннями країв смуги і напруженнями на контурі спаю необхідно мати розв'язок допоміжної задачі про пружну рівновагу непідкріпленої смуги під дією довільного навантаження, прикладеного до її країв. Розв'язок подібної задачі, взагалі кажучи, є в літературі. Зокрема, розв'язок методом інтегральних перетворень Фур'є, яким ми надалі скористуємось для розв'язання поставленої задачі, наведений в монографії [2]. Однак замість перетворення розв'язків інших авторів до зручної для наших цілей форми простіше дати ще раз розв'язок цієї допоміжної задачі.

Необхідно розв'язати систему рівнянь плоскої задачі теорії пружності

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

при граничних умовах

$$\begin{aligned} (Y_y)_{y=h} &= f^+(x), \quad (X_y)_{y=h} = g^+(x), \\ (Y_y)_{y=-h} &= f^-(x), \quad (X_y)_{y=-h} = g^-(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Припускаємо, що напруження разом із своїми першими і другими похідними прямують до нуля при $|x| \rightarrow \infty$.

Умовимось надалі позначати трансформанту Фур'є деякої функції $F(x)$ через $\bar{F}$, тобто

$$\bar{F} = \int_{-\infty}^{\infty} F e^{i\lambda x} dx. \quad (5)$$

При відомих припущеннях досить загального характеру відносно функції $F(x)$ справедлива також формула обернення:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F} e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (6)$$

Помноживши кожне з рівнянь (3) на ядро $e^{i\lambda x}$, інтегруючи по x від $-\infty$ до ∞ і враховуючи поведінку напружень в нескінченності, одержимо

$$\left. \begin{aligned} -i\lambda \bar{X}_x + \frac{d\bar{X}_y}{dy} &= 0, \\ -i\lambda \bar{X}_y + \frac{d\bar{Y}_y}{dy} &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{X}_x}{dy^2} - 2i\lambda \frac{d\bar{X}_y}{dy} - \lambda^2 \bar{Y}_y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

звідки випливає

$$\bar{X}_y = \frac{1}{i\lambda} \frac{d\bar{Y}_y}{dy}, \quad (7)$$

$$\bar{X}_x = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\bar{Y}_y}{dy^2}, \quad (8)$$

$$\frac{d^4\bar{Y}_y}{dy^4} - \lambda^2 \frac{d^2\bar{Y}_y}{dy^2} + \lambda^4 \bar{Y}_y = 0. \quad (9)$$

Загальний розв'язок рівняння (9) записується

$$\bar{Y}_y = (A_1 + A_2 y) \operatorname{ch} \lambda y + (A_3 + A_4 y) \operatorname{sh} \lambda y, \quad (10)$$

де A_i ($i=1, 2, 3, 4$) — довільні постійні, які залежать від λ .

Розглянемо окремо випадки, коли краї смуги завантажені симетрично або антисиметрично по відношенню до її поздовжньої осі, тобто осі X . У випадку симетричного навантаження

$$f^+(x) = f^-(x) = f_1(x), \quad g^+(x) = -g^-(x) = g_1(x), \quad (11)$$

і граничні умови (4) після перетворення (5) запишуться

$$(\bar{Y}_y)_{y=\pm h} = \bar{f}_1, \quad (\bar{X}_y)_{y=\pm h} = \pm \bar{g}_1. \quad (12)$$

В цьому випадку

$$A_2 = A_3 = 0, \quad (13)$$

а для визначення постійних A_1 і A_4 одержимо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} A_1 \operatorname{ch} \lambda h + A_4 h \operatorname{sh} \lambda h &= \bar{f}_1, \\ A_1 \lambda \operatorname{sh} \lambda h + A_4 (\operatorname{sh} \lambda h + \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) &= i \lambda \bar{g}_1 \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2[(\operatorname{sh} \lambda h + \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \bar{f}_1 - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h \cdot i \bar{g}_1]}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h}, \\ A_4 &= \frac{2\lambda(-\operatorname{sh} \lambda h \cdot \bar{f}_1 + \operatorname{ch} \lambda h \cdot i \bar{g}_1)}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h}. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставляючи значення постійних (13), (14) в формули (10), а далі в (7), (8), знаходимо вирази трансформант компонентів напруження в смугі через трансформанти напружень на контурі спаю $\bar{f}_1$ і $\bar{g}_1$ при симетричному навантаженні смуги

$$\begin{aligned} \bar{Y}_y &= \frac{2}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h} \{[(\operatorname{sh} \lambda h + \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y] \bar{f}_1 + \\ &\quad + (-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y) i \bar{g}_1\}, \\ \bar{X}_y &= \frac{2}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h} \{(\lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y) i \bar{f}_1 + \\ &\quad + [\lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y + [\operatorname{ch} \lambda h - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y] \bar{g}_1\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{X}_x = \frac{2}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h} \{[(\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y] \bar{f}_1 + \\ + [(\lambda h \operatorname{sh} \lambda h - 2 \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y] i \bar{g}_1\}.$$

Значення компонентів напруження одержуються звідси на підставі формули обернення (6).

Випишемо необхідні надалі значення $\bar{X}_x$ і $\frac{d\bar{X}_x}{dy}$ на краях смуги:

$$(\bar{X}_x)_{y=\pm h} = \frac{(\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h) \bar{f}_1 - 4 \operatorname{ch}^2 \lambda h \cdot i \bar{g}_1}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h}, \\ \left(\frac{d\bar{X}_x}{dy}\right)_{y=\pm h} = \pm \frac{4\lambda \operatorname{sh}^2 \lambda h \cdot \bar{f}_1 - \lambda (2\lambda h + 3 \operatorname{sh} 2\lambda h) i \bar{g}_1}{\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h}. \quad (16)$$

При антисиметричному навантаженні смуги

$$f^+(x) = -f^-(x) = f_2(x), \quad g^+(x) = g^-(x) = g_2(x), \quad (17)$$

тому граничні умови (4) в перетвореній формі запишуться

$$(\bar{Y}_y)_{y=\pm h} = \pm \bar{f}_2, \quad (\bar{X}_y)_{y=\pm h} = \bar{g}_2. \quad (18)$$

Діючи аналогічно попередньому, будемо мати слідуючі формули:

$$\bar{Y}_y = \frac{2}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h} \{[-\lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y + (\operatorname{ch} \lambda h + \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y] \bar{f}_2 + \\ + (\lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y) i \bar{g}_2\}, \\ \bar{X}_y = \frac{2}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h} \{(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y) i \bar{f}_2 + \\ + [(\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y] \bar{g}_2\}, \\ \bar{X}_x = \frac{2}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h} \{[\lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y + (\operatorname{ch} \lambda h - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y] \bar{f}_2 + \\ + [-\lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y + (\lambda h \operatorname{ch} \lambda h - 2 \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y] i \bar{g}_2\},$$

а також

$$(\bar{X}_x)_{y=\pm h} = \pm \frac{(\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) \bar{f}_2 - 4 \operatorname{sh}^2 \lambda h \cdot i \bar{g}_2}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h}, \\ \left(\frac{d\bar{X}_x}{dy}\right)_{y=\pm h} = \pm \frac{4\lambda \operatorname{ch}^2 \lambda h \cdot \bar{f}_2 - \lambda (3 \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h) i \bar{g}_2}{\operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h}. \quad (20)$$

Перейдемо тепер до розв'язання поставленої задачі визначення контактних напружень $f(x)$ і $g(x)$.

З формул закону Гука

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (X_x - \nu Y_y), \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\nu)}{E} X_y \quad (21)$$

з врахуванням другого рівняння (3) впливає

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2+\nu}{E} \frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{1}{E} \frac{\partial X_x}{\partial y}, \quad (22)$$

де E і ν означають у випадку плоского напруженого стану модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу смуги. Диференціюючи по x перше з співвідношень (21) один раз, а вираз (22) двічі та покладаючи $y = \pm h$, в силу (1) і (2) будемо мати

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} \right)_{y=\pm h} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial Y_y}{\partial x} \right)_{y=\pm h} &= \frac{1}{G_1} [\pm g(x) - n(x)], \\ \frac{2+\nu}{E} \left(\frac{\partial^3 X_y}{\partial x^3} \right)_{y=\pm h} - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 X_x}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\pm h} &= -\frac{1}{G_2} [\pm f(x) - q(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Система рівнянь (23) є вихідною для визначення $f(x)$ і $g(x)$. При цьому в залежності від характеру навантаження значення напружень в лівих частинах рівностей даються формулами (6), (12), (16) або формулами (6), (18), (20).

Нехай до підкріплених країв смуги прикладено симетричне навантаження

$$q^+(x) = -q^-(x) = q_1(x), \quad n^+(x) = n^-(x) = n_1(x). \quad (24)$$

Застосовуючи перетворення Фур'є (5) до системи (23) і враховуючи позначення (11), (24), а також поведінку напружень в нескінченності, одержимо

$$\left. \begin{aligned} -\frac{i\lambda}{E} (\bar{X}_x)_{y=\pm h} + \frac{i\lambda\nu}{E} (\bar{Y}_y)_{y=\pm h} &= \frac{1}{G_1} (\bar{g}_1 - \bar{n}_1), \\ \frac{(-i\lambda)^3 (2+\nu)}{E} (\bar{X}_y)_{y=\pm h} - \frac{(-i\lambda)^2}{E} \left(\frac{d\bar{X}_x}{dy} \right)_{y=\pm h} &= \pm \frac{1}{G_2} (\bar{q}_1 - \bar{f}_1), \end{aligned} \right\}$$

звідки на основі (12), (16) приходимо до системи двох рівнянь для визначення $\bar{f}_1$ і $\bar{g}_1$

$$\left. \begin{aligned} [G_1 i\lambda (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\gamma\lambda h) \bar{f}_1 + (2G_1 \beta\lambda \operatorname{ch}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) \bar{g}_1] &= \\ &= (\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) \bar{n}_1, \\ (2G_2 \beta\lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) \bar{f}_1 - G_2 i\lambda^3 (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\gamma\lambda h) \bar{g}_1 &= \\ &= (\operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) \bar{q}_1, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

де позначено

$$\alpha = \frac{1-\nu}{E}, \quad \beta = \frac{2}{E}, \quad \gamma = \frac{1+\nu}{E}. \quad (26)$$

Розв'язок системи (25) записується:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \frac{1}{D_1(\lambda)} [(2G_1 \beta\lambda \operatorname{ch}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) \bar{q}_1 + \\ &+ G_2 i\lambda^3 (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\gamma\lambda h) \bar{n}_1], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\bar{g}_1 = \frac{1}{D_1(\lambda)} [-G_1 i \lambda (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\gamma \lambda h) \bar{q}_1 + \\ + (2G_2 \beta \lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h) \bar{n}_1],$$

де

$$D_1(\lambda) = G_1 G_2 (\beta^2 - \alpha^2) \lambda^4 \operatorname{sh} 2\lambda h - 2G_1 G_2 \gamma^2 \lambda^5 h + \\ + 2G_2 \beta \lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda h + 2G_1 \beta \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h. \quad (28)$$

Остаточна форма розв'язку одержується, якщо скористатись формулою обертання (6):

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2G_1 \beta \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h}{D_1(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty q_1(t) \cos \lambda(t-x) dt - \\ - \frac{G_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\gamma \lambda h)}{D_1(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty n_1(t) \sin \lambda(t-x) dt, \quad (29)$$

$$g_1(x) = \frac{G_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\gamma \lambda h)}{D_1(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty q_1(t) \sin \lambda(t-x) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2G_2 \beta \lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h}{D_1(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty n_1(t) \cos \lambda(t-x) dt.$$

Для антисиметричного навантаження

$$q^+(x) = q^-(x) = q_2(x), \quad n^+(x) = -n^-(x) = n_2(x), \quad (30)$$

цілком аналогічно одержимо

$$f_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2G_1 \beta \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h}{D_2(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty q_2(t) \cos \lambda(t-x) dt - \\ - \frac{G_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\gamma \lambda h)}{D_2(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty n_2(t) \sin \lambda(t-x) dt, \quad (31)$$

$$g_2(x) = \frac{G_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda (\alpha \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\gamma \lambda h)}{D_2(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty q_2(t) \sin \lambda(t-x) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2G_2 \beta \lambda^3 \operatorname{ch}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h}{D_2(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty n_2(t) \cos \lambda(t-x) dt,$$

де

$$D_2(\lambda) = G_1 G_2 (\beta^2 - \alpha^2) \lambda^4 \operatorname{sh} 2\lambda h + 2G_1 G_2 \gamma^2 \lambda^5 h + \\ + 2G_2 \beta \lambda^3 \operatorname{ch}^2 \lambda h + 2G_1 \beta \lambda \operatorname{sh}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\lambda h. \quad (32)$$

Зауважимо, що при $h \rightarrow \infty$ формули (29) і (31), як і слід було чекати, перетворюються в формули для визначення контактних напружень в півплощині з підкріпленням краєм [4].

Якщо навантаження, прикладене до підкріплених країв смуги, не має властивості симетрії або антисиметрії відносно поздовжньої осі смуги, розв'язок, очевидно, можна одержати відповідною комбінацією розв'язків (29) і (31).

Не викликає труднощів одержання аналогічним шляхом розв'язку задачі для смуги, один з країв якої спаяний з тонким пружним стержнем сталої жорсткості, а на іншому задані напруження або переміщення.

Одержані результати можуть бути використані для дослідження напружень в стінках двотаврових і таврових балок, якщо останні знаходяться в умовах плоского напруженого стану. При цьому полки розглядаються як тонкі пружні стержні, і напруження в них визначаються за гіпотезою плоских перерізів.

Як приклад розглянемо напружений стан двотаврової балки при стисненні її зосередженими силами P (див. рис. 2).

В цьому випадку в формулах (29) слід покласти

$$q_1(x) = -P\delta(x), \quad n_1(x) = 0, \quad (33)$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака, після чого будемо мати

$$f_1(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{2G_1 \beta \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda h + \operatorname{sh} 2\lambda h + 2\lambda h}{D_1(\lambda)} \cos \lambda x d\lambda, \\ g_1(x) = \frac{PG_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda (a \operatorname{sh} 2\lambda h - 2\gamma \lambda h)}{D_1(\lambda)} \sin \lambda x d\lambda. \quad (34)$$

Знайдемо також нормальні напруження Y_y по осі симетрії балки $y=0$. На основі (33): $\bar{q}_1 = -P$, $\bar{n}_1 = 0$. Підставляючи ці значення в вирази (27), а ті в свою чергу в першу з формул (15) і покладаючи $y=0$, одержимо після нескладних перетворень та використання формули обернення (6),

$$(Y_y)_{y=0} = -\frac{2P}{\pi} \int_0^\infty \frac{(G_1 \gamma \lambda^2 h + 1) \operatorname{sh} \lambda h + (G_1 \beta + h) \lambda \operatorname{ch} \lambda h}{D_1(\lambda)} \cos \lambda x d\lambda. \quad (35)$$

Зокрема при $G_1 = G_2 = 0$, тобто при відсутності підкріплюючих стержнів, вираз (35) для нормальних напружень по осі симетрії співпадає з відповідною формулою [3] при стисненні непідкріпленої смуги.

В таблиці наведені підраховані за формулами (34), (35) шляхом чисельного інтегрування [5, 6] значення напружень в різних точках стандартної двотаврової балки № 60 а, виготовленої з сталі ($E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0,30$) при $P = 13 \text{ т}$. Побудовані за цими даними графіки розподілу напружень наведені на рис. 2.

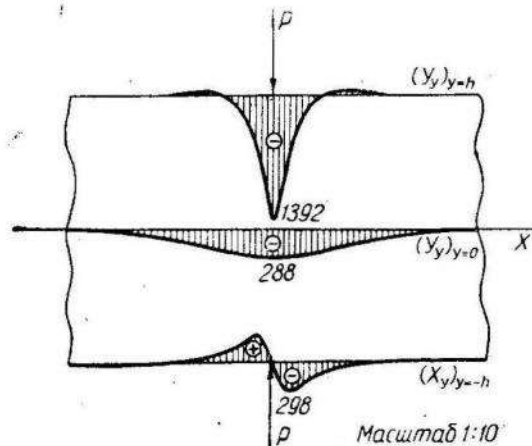


Рис. 2.

Автор висловлює глибоку подяку проф. М. П. Шереметьєву, під керівництвом якого була виконана дана робота.

Напруження в двотавровій балці № 60а

$x, \text{ см}$	$(Y_y)_{y=h} \text{ кг/см}^2$	$(Y_y)_{y=0} \text{ кг/см}^2$	$(X_y)_{y=h} \text{ кг/см}^2$
0	—1391,9	—287,8	0
1,5	—1143,1	—286,3	216,5
3,0	—790,9	—282,2	295,8
4,5	—494,8	—275,2	298,2
6,0	—278,3	—265,9	257,3
7,5	—138,0	—254,5	218,8
9,0	—54,3	—241,3	167,5
12,0	12,1	—211,3	97,9
15,0	19,6	—178,8	51,7
22,5	5,7	—102,4	6,1
30,0	0,4	—47,6	—11,4
45,0	—1,8	—1,6	—19,7

ЛІТЕРАТУРА

1. М. М. Філоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. I, ГИТТЛ, М., 1955.
2. И. Снеддон. Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955.
3. Н. Н. Лебедев и др. Сборник задач по математической физике, стор. 171, ГИТТЛ, М., 1955.
4. М. П. Шереметьев и Д. Г. Хлебников. Упругое равновесие полуплоскости с подкрепленным краем. Доповіді та повідомлення ЛДУ, вип. 7, ч. III, стор. 286—292, Львів, 1958.
5. L. N. Y. Filon. On a Quadrature Formula for Trigonometric Integrals Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, V. XLIX, 1928—29, p. 38—47.
6. К. Дж. Трантер. Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, М., 1956.

Г. І. СОКОЛОВ

РОЗТЯГ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ, В КРУГОВИЙ ОТВІР ЯКОЇ ВПЯЯНО ЦИЛІНДРИЧНУ ОБОЛОНКУ

ПОСТАНОВКА ПИТАННЯ

Нехай в круговий отвір радіуса R безмежної пружної пластинки впаяно безмежну кругову циліндричну оболонку того ж радіуса. Вісь оболонки перпендикулярна до площини пластинки. До пластинки на безмежності прикладено двоосьовий розтяг таким чином, що пластинка знаходиться в узагальненому плосконапруженому стані.

В роботі визначається напружений стан конструкції, що подається на рис. 1, де h — товщина оболонки; $2H$ — товщина пластинки; E, ν — пружні сталі циліндричної оболонки; μ_1, χ_1 — пружні сталі пластинки (в дальшому індекс 1 писати не будемо, бо еквівалентні пружні сталі оболонки в роботі не використовуються).

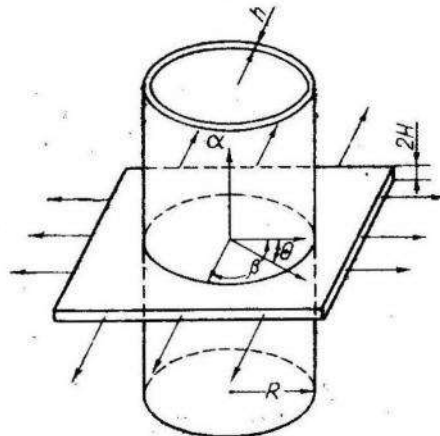


Рис. 1.

R — радіус отвору пластинки і радіус оболонки,

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2}.$$

P, Q — навантаження, прикладене до пластинки на безмежності.

α, β — безрозмірні координати циліндричної оболонки, віднесені до R .

r, θ — полярні координати пластинки.

V_x, V_r — нормальне і дотичне зміщення пластинки.

u, v, w — зміщення оболонки вздовж осей α, β і нормальне до поверхні оболонки.

Q_1, S_1 — перерізуюче і зрушуюче зусилля в перерізі оболонки $\alpha = \text{const.}$

$\Phi(\alpha, \beta)$ — функція напружень, що визначає напруження і зміщення в оболонці [1, стор. 262],

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ — оператор Лапласа,

$a_m, b_m, A_{mi} (m = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, 3, \dots)$ — постійні інтегрування.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(P + Q); \quad \beta_0 = \frac{1}{2}(P - Q)$$

$\widehat{rr}$, $\widehat{rv}$ — нормальне та дотичне напруження пластинки.

Початок координат вибираємо в центрі отвору серединної площини пластинки.

ГРАНИЧНІ УМОВИ

Будемо вважати, що пластинка і оболонка спаяні вздовж лінії $\alpha=0$ (для оболонки) і $r=R$ (для пластинки).

При цьому припущенні граничні умови на контурі спаю будуть такими

$$1) V_v|_{r=R} = v|_{\alpha=0}$$

$$2) V_r|_{r=R} = w|_{\alpha=0}$$

$$3) H \cdot \widehat{rr}|_{r=R} = -Q_1|_{\alpha=0} \quad (1,1)$$

$$4) H \cdot \widehat{rv}|_{r=R} = -S_1|_{\alpha=0}$$

Перші два рівняння одержані з умови рівності зміщень, а два інших — з напружень оболонки та пластинки на контурі спаю.

В дальшому, виходячи з симетрії, будемо розглядати напружений стан лише однієї половини оболонки ($\alpha \geq 0$). Але, «розрізавши» оболонку на дві половини вздовж контура $\alpha=0$, ми повинні до граничних умов (1,1) приєднати умови, що виражають дію відкинutoї частини оболонки:

$$1) \left. \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (1,2)$$

$$2) \left. \frac{\partial u}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0} = 0$$

Умови на безмежності для циліндричної оболонки природньо взяти в такому вигляді:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Phi(\alpha, \beta) = 0 \quad (1,3)$$

Для пружної пластинки, на підставі робіт [5] і [4], маємо:

$$2\mu V_v = - \left(\frac{\kappa-1}{r} a_2^* - r \beta_0 + \frac{b_4^*}{3r^3} \right) \sin 2v.$$

$$2\mu V_r = \frac{\kappa-1}{2} r \alpha_0 + \frac{b_2^*}{r} - \left(\frac{\kappa+1}{r} a_2^* - r \beta_0 - \frac{b_4^*}{3r^3} \right) \cos 2v. \quad (1,4)$$

$$\widehat{rv} = \left(\beta_0 - \frac{2a_2^*}{r^2} + \frac{b_4^*}{r^4} \right) \sin 2v$$

$$\widehat{rr} = \alpha_0 - \frac{b_2^*}{r^2} + \left(\beta_0 + \frac{4a_2^*}{r^2} - \frac{b_4^*}{r^4} \right) \cos 2v.$$

Напружений стан кругової циліндричної оболонки, не завантаженої по поверхні, описується таким рівнянням (I, стор. 263):

$$c^2 (\Delta\Delta + 2\Delta + 1) \Delta\Delta \Phi - 2c^2 (1-\nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} \right) \Delta\Phi + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = 0. \quad (2,1)$$

Розв'язок рівняння (2, 1) будемо шукати в такому вигляді (2, стор. 211).

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\alpha) \cos m\beta, \quad (2,2)$$

тому що напружений стан оболонки згідно (1,1) і (1,2) симетричний відносно перерізу $\beta = 0$.

Підставивши (2,2) в (2,1) одержуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{d^8 \varphi_m}{d\alpha^8} - 2(2m^2 - \nu) \frac{d^6 \varphi_m}{d\alpha^6} + \left[6m^2(m^2 - 1) + 1 + \right. \\ & \left. + \frac{1-\nu^2}{c^2} \right] \frac{d^4 \varphi_m}{d\alpha^4} - 2m^2 [2m^4 - (4-\nu)m^2 + 1] \frac{d^2 \varphi_m}{d\alpha^2} + \\ & + m^4(m^2 - 1)^2 \varphi_m = 0 \end{aligned} \quad (2,3)$$

($m = 0, 1, 2, \dots$)

Характеристичне рівняння для (2,3) має вигляд:

$$\begin{aligned} & \lambda_m^8 - 2(2m^2 - \nu) \lambda_m^6 + \left[6m^2(m^2 - 1) + 1 + \right. \\ & \left. + \frac{1-\nu^2}{c^2} \right] \lambda_m^4 - 2m^2 [2m^4 - (4-\nu)m^2 + 1] \lambda_m^2 + m^4(m^2 - 1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2,4)$$

[$(m = 0, 1, 2, \dots)$].

В нашому випадку, необхідно буде розв'язати (2, 4) лише при $m = 0$ і $m = 2$ (див. (1, 4)). При цих умовах параметр C малий порівняно з другими величинами, що входять до (2, 4). Тому, розкладаючи корені характеристичного рівняння в ряд по степенях C , знаходимо

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{m_1} &= -(\alpha_1 + i\beta_1); & \lambda_{m_2} &= -(\alpha_1 - i\beta_1) \\ \lambda_{m_3} &= -(\alpha_2 + i\beta_2); & \lambda_{m_4} &= -(\alpha_2 - i\beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{m_5} &= +(\alpha_1 + i\beta_1); & \lambda_{m_6} &= +(\alpha_1 - i\beta_1) \\ \lambda_{m_7} &= +(\alpha_2 + i\beta_2); & \lambda_{m_8} &= +(\alpha_2 - i\beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2,6)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{V1-\nu^2}{2c}} \left[1 + \frac{2m^2-\nu}{2V1-\nu^2} c + \frac{4m^2(2m^2-3+2\nu)+2-\nu^2}{8(1-\nu^2)} c^2 \right] \\ \beta_1 &= \sqrt{\frac{V1-\nu^2}{2c}} \left[1 - \frac{2m^2-\nu}{2V1-\nu^2} c + \frac{4m^2(2m^2-3+2\nu)+2-\nu^2}{8(1-\nu^2)} c^2 \right] \\ \alpha_2 &= m \sqrt{\frac{(m^2-1)c}{2V1-\nu^2}} \left[1 + \frac{2m^4-(4-\nu)m^2+1}{2(m^2-1)V1-\nu^2} c - \right. \\ & \left. - \frac{16m^8-4(13-\nu)m^6+(58-8\nu+\nu^2)m^4-2(12-\nu)m^2+3}{8(m^2-1)^2(1-\nu^2)} c^2 \right] \end{aligned} \quad (2,7)$$

$$\beta_2 = m \sqrt{\frac{(m^2-1)c}{2\sqrt{1-\nu^2}}} \left[1 - \frac{2m^4 - (4-\nu)m^2 + 1}{2(m^2-1)\sqrt{1-\nu^2}} c - \frac{16m^8 - 4(13-\nu)m^6 + (58-8\nu+\nu^2)m^4 - 2(12-\nu)m^2 + 3}{8(m^2-1)^2(1-\nu^2)} c^2 \right].$$

Зберігання членів, в яких міститься C , в степені, вищому ніж другий, не має сенсу [2, стор. 66].

Таким чином ми знайшли

$$\varphi_m(\alpha) = \sum_{i=1}^8 e^{a_{\lambda} m i} A_{mi}. \quad (2,8)$$

Функція напружень тепер може бути записана в такому вигляді:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 e^{a_{\lambda} m i} A_{mi} \cos m\beta. \quad (2,9)$$

Використовуючи граничні умови (1,1), (1,2), (1,3) і формули (1,4), визначаємо постійні інтегрування a_2^* , b_2^* , b_4^* , A_{mi} ($m=0, 1, 2, \dots$).

Врахуємо умову (1,3). Половина коренів характеристичного рівняння (2,6) буде мати додатню дійсну частину. Тому, для того, щоб виконувалася умова (1,3), відповідні коефіцієнти A_{mi} повинні дорівнювати нулю:

$$A_{m5} = A_{m6} = A_{m7} = A_{m8} = 0. \quad (2,10)$$

З граничних умов (1,1) одержуємо, що відмінними від нуля будуть лише A_{0i} і A_{2i} , тобто

$$A_{mi} = 0 \quad (m=1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots). \quad (2,11)$$

Приймаючи до уваги (2,10) і (2,11) знаходимо вид функції напружень з врахуванням граничних умов:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^2 A_{0i} e^{a_{\lambda} 0i} + \sum_{i=1}^4 A_{2i} e^{a_{\lambda} 2i} \cos 2\beta. \quad (2,12)$$

Визначивши вид функції напружень, ми можемо записати зміщення і напруги в оболонці

$$u = \sum_{m=0}^1 \sum_{i=1}^4 \lambda_{2m,i} \{ c^2 [\lambda_{2m,i}^4 - (2m)^4] - (2m)^2 - \nu \lambda_{2m,i}^2 \} A_{2m,i} e^{a_{\lambda} 2m,i} \cos 2m\beta,$$

$$v = - \sum_{m=0}^1 \sum_{i=1}^4 2m \{ 2c^2 \lambda_{2m,i}^4 - [2 + \nu + 2(2m)^2 c^2] \lambda_{2m,i}^2 + (2m)^2 \} A_{2m,i} e^{a_{\lambda} 2m,i} \sin 2m\beta. \quad (2,13)$$

$$w = \sum_{m=0}^1 \sum_{i=1}^4 [\lambda_{2m,i}^2 - (2m)^2]^2 A_{2m,i} e^{a_{\lambda} 2m,i} \cos 2m\beta.$$

$$\begin{aligned}
S_1 = & -\frac{Eh}{(1+\nu)R} \sum_{m=0}^1 \sum_{i=1}^4 \lambda_{2m,i} (2m) \{c^2 [\lambda_{2m,i}^4 - (2m)^4] - \\
& - (1+\nu) \lambda_{2m,i}^2\} A_{2m,i} e^{a\lambda_{2m,i}} \sin 2m\beta \\
Q_1 = & \frac{Eh c^2}{(1-\nu)^2 R} \sum_{m=0}^1 \sum_{i=1}^4 \lambda_{2m,i} \{(1-c^2) \lambda_{2m,i}^6 - \\
& - [(2m)^2 (3 - \frac{1-3\nu}{2} c^2) - \nu] \lambda_{2m,i}^4 + \\
& + (2m)^2 [(3 - \nu c^2) (2m)^2 - \nu(1+\nu) \lambda_{2m,i}^2] - \\
& - (2m)^4 [(2m)^2 (1 - \frac{1-\nu}{2} c^2) - 1]\} A_{2m,i} e^{a\lambda_{2m,i}} \cos 2m\beta. \quad (2,13a)
\end{aligned}$$

Приймаючи до уваги (2,5) і той факт, що $A_{m,2k-1}$ і $A_{m,2k}$ ($k=1,2$; $m=0,2$) комплексно спряжені, легко довести [1, стор. 233], що u , v , w , Q_1 , S_1 — дійсні.

Запишемо тепер граничні умови (1,1) та (1,2). Одержимо відповідно:

$$\text{з 1) (1,1)} \quad -\gamma \left[(x-1)a_2 - \beta_0 + \frac{1}{3}b_4 \right] = 2 \sum_{i=1}^4 [2c^2 \lambda_{2i}^4 - (2+\nu+8c^2) \lambda_{2i}^2 + 4]$$

$$\text{з 2) (1,1)} \quad -\gamma \left[\frac{x-1}{2} a_0 + b_2 \right] = \sum_{i=1}^4 \lambda_{oi}^4 A_{oi};$$

$$-\gamma \left[(x+1)a_2 - \beta_0 - \frac{1}{3}b_4 \right] = \sum_{i=1}^4 (\lambda_{2i}^2 - 4)^2 A_{oi}$$

$$\text{з 3) (1,1)} \quad -H(\alpha_0 - \beta_2)_{i=1} = \frac{Eh c^2}{(1-\nu^2)R} \sum_{i=1}^2 \lambda_{oi}^2 [(1-c^2) \lambda_{oi}^2 + \nu] A_{oi};$$

$$\begin{aligned}
H(\beta_0 + 4a_2 - b_4) = & \frac{Eh c^2}{(1-\nu^2)R} \sum_{i=1}^4 \lambda_{2i} \{(1-c^2) \lambda_{2i}^6 - [12 - \nu - 2 \times \\
& \times (1+3\nu)c^2] \lambda_{2i}^4 + 4 [4(3-\nu c^2) - \nu(1+\nu)] \lambda_{2i}^2 - 16 [3 - 2(1-\nu)c^2]\} A_{2i}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{з 4) (1,1)} \quad -H(\beta_0 - 2a_2 + b_4) = & \frac{2Eh}{(1+\nu)R} \sum_{i=1}^4 \lambda_{2i} [c^2 (\lambda_{2i}^4 - 16) - \\
& - (1+\nu) \lambda_{2i}^2] A_{2i}.
\end{aligned}$$

$$\text{з 1) (1,2)} \quad -\sum_{i=1}^2 \lambda_{oi}^3 A_{oi} = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 (\lambda_{2i}^2 - 4) \lambda_{2i} A_{2i} = 0 \quad (2,14)$$

$$з\ 2) \ (1,2) - \sum_{i=1}^4 \lambda_{2i} [c^2 (\lambda_{2i}^4 - 16) - 4 - \nu \lambda_{2i}^2] A_{2i} = 0,$$

де позначено

$$a_2^* = R^2 a_2; \ b_2^* = R^2 b_2; \ b_4^* = R^4 b_4; \ \gamma = \frac{R}{2\mu}. \quad (2,15)$$

Легко зауважити, що система рівнянь для знаходження постійних інтегрування розбивається на дві відокремлені групи рівнянь: перша — для знаходження A_{01}, A_{02}, b_2 , друга — для знаходження a_2, b_4, A_{2i} ($i = 1, 2, 3, 4$).

Корені першої системи визначаються дуже просто:

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{\lambda_{02} (1 + \kappa) \gamma q}{2\lambda_{01}^4 (\lambda_{01} - \lambda_{02}) [\lambda_{01} \lambda_{02} (\lambda_{01} + \lambda_{02}) - q]} a_0 \\ A_{02} &= \frac{(1 + \kappa) \gamma q a_0}{2 [\lambda_{01} \lambda_{02} (\lambda_{01} + \lambda_{02}) - q]} \\ b_2 &= - \frac{(1 + \kappa) \gamma q a_0}{2 [\lambda_{01} \lambda_{02} (\lambda_{01} + \lambda_{02}) - q]}, \end{aligned} \quad (2,16)$$

де

$$q = \frac{(1 - \nu^2) R H}{(1 - c^2) c^2 \gamma E h}.$$

Цим результатом уточнюється робота [6].

Випишемо рівняння, які залишилися для визначення a_2, b_4, A_{2i} ($i = 1, \dots, 4$), спочатку привівши їх до найбільш простого вигляду:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=1}^4 A_{2i} \left\{ \frac{16\kappa\gamma(1-\nu+16c^2)}{1+\nu} \lambda_{2i} - 3\kappa[(1-4c^2)\lambda_{2i}^4 - 2(6+\nu+8c^2)\lambda_{2i}^2 + 24] + \right. \\ \left. + (1-4c^2)\lambda_{2i}^4 - 2(2-\nu-8c^2)\lambda_{2i}^2 + 8 \right\} = 2\gamma(1+\kappa)\beta_c \\ 2) \sum_{i=1}^4 A_{2i} \left\{ 3[(1+4c^2)\lambda_{2i}^4 - 2(6+\nu+8c^2)\lambda_{2i}^2 + 24] + \right. \\ \left. + \frac{\kappa\gamma}{1-\nu^2} \lambda_{2i} [c^2(\nu-8c^2-\nu c^2)\lambda_{2i}^6 + 8(1-\nu)^2 + 320c^2] \right\} = 0 \\ 3) \sum_{i=1}^4 A_{2i} \lambda_{2i} \left[\lambda_{2i}^4 + \frac{16(2+\nu+8\nu^2)}{\nu-8c^2} \right] = 0 \\ 4) \sum_{i=1}^4 A_{2i} \lambda_{2i} \left[\lambda_{2i}^2 + \frac{4(1+8c^2)}{4-8c^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2,17)$$

$$\begin{aligned}
5) \quad a_2 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \beta_0 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^4 [(1-4c^2)\lambda_{2i}^4 - 2(2-\nu-8c^2)\lambda_{2i}^2 + 8] A_{2i} \right\} \\
6) \quad b_4 &= \frac{3}{2\gamma} \sum_{i=1}^4 [(1+4c^2)\lambda_{2i}^4 - 4(6+\nu+8c^2)\lambda_{2i}^2 + 24] A_{2i} - \\
&\quad - \frac{3}{2\pi\gamma} \sum_{i=1}^4 [(1-4c^2)\lambda_{2i}^4 - 2(2-\nu-8c^2)\lambda_{2i}^2 + 8] A_{2i} + \frac{3}{\pi} \beta_0. \quad (2,18)
\end{aligned}$$

Тут введено позначення:

$$\kappa = \frac{Eh}{(\nu-8c^2)HR}.$$

Таким чином, розв'язання системи (2,14) зводиться до розв'язання чотирьох рівнянь (2,17). Числове розв'язання (2,17) не зустрічає труднощів, однак запис коренів в загальному вигляді занадто громіздкий, і ми його не наводимо.

Визначимо лише, що A_{21} , A_{22} одного порядку з $c^2 A_{23}$, $c^2 A_{24}$.

Визначивши постійні інтегрування a_2 , b_2 , b_4 , A_{01} , A_{02} , A_{2i} ($i=1, 2, 3, 4$) і підставляючи їх значення в (2,12) та (1,4) неважко за відомими формулами [1,4] визначити зміщення і напруги в довільній точці циліндричної оболонки і пластинки.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Госиздат, М.—Л., 1949.
2. А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек. Госиздат, М., 1953.
3. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. ОГИЗ, 1948.
4. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. АН СССР, М., 1954.
5. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инженерный сборник, т. XIV, М., 1953.
6. Г. И. Соколов. Осесимметрическая задача о сопряжении цилиндрической оболочки с упругой пластинкой. Бюлетень наукової студентської конференції 1954 р., частина II, Львів, 1955.

З. О. МЕЛЬНИК

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В роботі методом відображень розв'язується змішана задача для гіперболічного рівняння другого порядку в чотирьохвимірному просторі з коефіцієнтами при старших похідних, залежними від просторових координат.

В § 1, використовуючи результати В. Г. Гоголадзе (див. [1]), ми приводимо розв'язок задачі Коші для рівняння (1,6). В § 2 методом відображень розв'язується змішана задача для рівняння (1, 6). Параграфи 3 і 4 присвячені змішаній задачі для деяких нелінійних рівнянь і випадку, коли в граничну умову входить нормальна похідна.

§ 1. ЗАДАЧА КОШІ

1. Для повноти розглянемо задачу інтегрування рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = f(x, t) \quad (1,1)$$

при початкових умовах

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \quad (1,2)$$

Тут $L(u) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right)$, $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ — оператор еліптичного типу; $g^{\alpha\beta}$, c — задані неперервні разом із своїми похідними функції точки; f — два рази, φ — чотири рази, ψ — три рази неперервно диференційовані.

Згідно методу акад. Соболева, розглядаємо задачу варіаційного числення про мінімум функціоналу

$$\int_{M_0}^M \frac{ds}{c(x)},$$

де $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ — елемент дуги в просторі Рімана, $g_{\alpha\beta}$ є елементи матриці, оберненої до матриці $\|g^{\alpha\beta}\|$.

В даному випадку для функції $\sigma(M, M_0)$, яка узагальнює $\frac{1}{r}$ для випадку $g^{\alpha\beta} = 0$, коли $\alpha \neq \beta$ і $g^{\alpha\beta} = c = 1$ при $\alpha = \beta$ і для основної

функції $\tau(M, M_0)$ центрального поля варіаційної задачі одержуються рівняння

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2},$$

$$\sigma L(\tau) + 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial x^\beta} + 2\sigma \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial x^\beta} = 0.$$

Використовуючи співвідношення

$$|L(\sigma)| \leq \frac{K}{\tau(M, M_0)},$$

$$\lim_{S_1 \rightarrow M_0} \iint_{S_1} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha} \cos(n, x^\beta) dS_1 = -4\pi,$$

для розв'язку $u(M, t)$ задачі (1,1) — (1,2) одержується інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} u(M_0, t) = & \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ \varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) \} dS + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_P [u(M, t)] L(\sigma) dv + \frac{1}{4\pi} \iiint_P \sigma [f] dv, \end{aligned} \quad (1,3)$$

де

$$P(v) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} \cos(n, x^\beta);$$

$$[u(M, t)] = u(M, t - \tau);$$

P є область $\tau(M, M_0) < t$, S — обмежуюча цю область поверхня, n — зовнішня нормаль до S .

Рівняння (1,3) будемо розв'язувати методом послідовних наближень, взявши за $u^0(M_0, t)$ вираз:

$$u^0(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ \varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) \} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint_P \sigma [f] dv. \quad (1,4)$$

Тоді

$$u^j(M_0, t) = u^0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi} \iiint_P [u^{j-1}(M, t)] L(\sigma) dv, \quad (j=1, 2, 3, \dots). \quad (1,5)$$

Так само, як і в [1] показується, що цей процес збігається з єдиною граничною функцією $u(M_0, t)$, яка і являється розв'язком поставленої задачі.

2. Нехай тепер нам потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) + g^\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + g(x, t) u = f(x, t) \quad (1,6)$$

з початковими умовами (1,2). Тут g^α і g — два рази неперервно диференційовані функції точки. Будемо розв'язувати цю задачу методом Пікара: розглянемо рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) + \lambda \left\{ g^\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + g(x, t) u \right\} = f(x, t), \quad (1,6')$$

де λ — деякий числовий параметр, який в дальшому покладемо рівним одиниці, і будемо шукати ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k(x, t), \quad (1,7)$$

який формально задовольняє рівняння (1,6) і початкові умови (1,2). Очевидно, досить, щоб цим умовам задовольняла функція $u_0(x, t)$, а всі останні функції $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, ... повинні при $t=0$ перетворюватись в нуль разом із своїми першими похідними по t .

Підставляючи (1,7) в (1,6') і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ , одержимо:

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - L(u_0) = f, \quad (1,8)$$

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - L(u_j) = - \left\{ g^\alpha \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha} + g u_{j-1} \right\} \\ (j=1, 2, 3, \dots).$$

Для u_0 маємо формулу (1,3). Виходячи з цієї формули, для u_j одержимо рівняння:

$$u_j(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_P [u_j(M, t)] L(\sigma) dv - \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_P \sigma \left[g^\alpha(M, t) \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha} + g(M, t) u_{j-1} \right] dv \\ (j=1, 2, 3, \dots). \quad (1,9)$$

Це рівняння знову розв'язуємо методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення

$$u_j^0(M_0, t) = - \frac{1}{4\pi} \iint_P \sigma \left[g^\alpha(M, t) \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha} + g(M, t) u_{j-1} \right] dv, \quad (1,10) \\ (j=1, 2, 3, \dots).$$

Тоді

$$u_j^k(M_0, t) = u_j^0(M, t) + \frac{1}{4\pi} \iint_P [u_j^{k-1}(M, t)] L(\sigma) dv. \quad (1,11)$$

Діючи аналогічно [1], можна показати, що

$$|u_j^k - u_j^{k-1}| \leq R \frac{G^{2k+2} f^{2k+2}}{(2k+2)!},$$

де R і G — деякі постійні, що залежать від коефіцієнтів, вільного члена і початкових даних. Це дає можливість показати, що функція

$$u_j(M_0, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_j^k(M_0, t) = u_j^0(M_0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \{u_j^k(M_0, t) - u_j^{k-1}(M_0, t)\}$$

являється розв'язком рівняння (1,8). Будуючи відповідні мажорантні ряди, можна легко показати, що ряд $\sum_{j=0}^{\infty} u_j(M_0, t)$ і ряди, одержані з нього почленним диференціюванням по x^a , рівномірно збігаються для значень t , для яких поверхня $\tau(M, M_0) = t$ повністю лежить в області $D\{\tau(M, M_0) \leq T(M)\}$, з кожної точки якої можна побудувати центральне поле, принаймні до еквідистантної поверхні

$$\tau(M, Q) = T - \tau(Q, M_0).$$

Далі показується, що сума ряду $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ являється єдиним розв'язком задачі (1,6) — (1,2).

§ 2. ЗМІШАНА ЗАДАЧА. МЕТОД ВІДОБРАЖЕНЬ

Розв'яжемо задачу знаходження розв'язку рівняння (1,6) в області $x^3 > 0$ при початкових умовах (1,2), який задовольняє граничну умову

$$u(M_0, t)|_{x^3=0} = 0; \quad (2,1)$$

будуть припускатись виконаними умови узгодження: $\varphi|_{x^3=0} = \psi|_{x^3=0} = 0$.

Для збереження неперервності даних при відображенні, треба додатково припустити, що $g^{\alpha\beta}(x^1, x^2, 0) = 0$, коли $\alpha = 3$, $\beta \neq 3$, $\alpha \neq 3$, $\beta = 3$; $f(x^1, x^2, 0, t) = 0$ і $g^3(x^1, x^2, 0, t) = 0$.

Завдання полягає в тому, щоб початкові дані $\varphi(M)$ і $\psi(M)$, коефіцієнти $g^{\alpha\beta}$, g^α , g і вільний член f рівняння продовжити за площину $x^3 = 0$ так, щоб одержаний для всього простору (x^1, x^2, x^3) розв'язок задачі Коші при $x^3 = 0$ перетворювався в тотожний нуль. Для цього, очевидно, досить, щоб при $x^3 = 0$ перетворювались в нуль вирази (1,4), (1,5), (1,10), (1,11). В нашому випадку областю інтегрування у всіх згаданих виразах є або об'єм $\tau(M, M_0) < t$, або обмежуюча його поверхня $\tau(M, M_0) = t$. А це при відповідних умовах симетричності, які в дальшому будуть накладені на величини $g^{\alpha\beta}$, є області, симетричні відносно площини $x^3 = 0$.

Розглянемо вираз (1,4):

$$\begin{aligned} u^0(M_0, t) = & \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ \varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) \} dS + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_P \sigma [f] dv = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \varphi(M) g^{\alpha\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha} \cos(n, x^\beta) - \right. \\ & \left. - \sigma g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \cos(n, x^\beta) - \sigma g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} \cos(n, x^\beta) \psi(M) \right\} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint_P \sigma [f] dv. \end{aligned}$$

Продовжимо дані задачі слідуючим чином:

$$\begin{aligned} c(R) - c(R^*) &= 0 \\ g^{\alpha\beta}(R) - g^{\alpha\beta}(R^*) &= 0 \quad (\alpha, \beta \neq 3 \text{ або } \alpha = \beta = 3) \end{aligned}$$

$$g^{\alpha\beta}(R) + g^{\alpha\beta}(R^*) = 0 \quad (\alpha = 3, \beta \neq 3 \text{ або } \alpha \neq 3, \beta = 3)$$

$$f(R, t) + f(R^*, t) = 0$$

$$\varphi(R) + \varphi(R^*) = 0$$

$$\psi(R) + \psi(R^*) = 0.$$

Тут R і R^* — точки, симетричні відносно площини $x^3 = 0$. Виходячи із виразів відповідних величин, замічаємо, що тоді

$$\tau(R, M_0) = \tau(R^*, M_0)$$

$$\sigma(R, M_0) = \sigma(R^*, M_0)$$

$$P(\sigma)_R = P(\sigma)_{R^*}$$

$$P(\tau)_R = P(\tau)_{R^*}$$

$$P(\varphi)_R = P(\varphi)_{R^*}.$$

Розбиваючи при $x^3 = 0$ об'єм P і квазісферу S на дві частини P^+ , S^+ , коли точка M лежить в півпросторі $x^3 > 0$ і P^- , S^- , коли точка M лежить в півпросторі $x^3 < 0$, і враховуючи, що

$$\cos(n, x^a)_R = \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x^a}}{\sqrt{\text{grad}^2 \tau}} \Big|_R = \begin{cases} \cos(n, x^a)_{R^*}, & a \neq 3 \\ -\cos(n, x^a)_{R^*}, & a = 3, \end{cases}$$

одержуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{S^+} \{ \varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) \} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint_{P^+} \sigma[f] dv = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S^-} \{ \varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) \} dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_{P^-} \sigma[f] dv. \end{aligned}$$

(Тут запис $P(\sigma)_R$ означає, що значення $P(\sigma)$ береться в точці R). Виходить при нашому законі продовження початкових даних, коефіцієнтів і вільного члена рівняння

$$u^0(M_0, t)|_{x^3=0} = 0.$$

Очевидно, що

$$u^0(R, t) = -u^0(R^*, t),$$

$$L(\sigma)_R = L(\sigma)_{R^*}.$$

Тоді з (1,5), виходить, що

$$w^j(M_0, t)|_{x^3=0} = 0,$$

$$w^j(R, t) = w^j(R^*, t), \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Із всього сказаного випливає, що

$$u_0(M_0, t)|_{x^3=0} = 0,$$

$$u_0(R, t) = -u_0(R^*, t).$$

Продовжимо тепер коефіцієнти g^a і g таким чином:

$$g^{\alpha}(R, t) = g^{\alpha}(R^*, t), \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$g^3(R, t) = -g^3(R^*, t)$$

$$g(R, t) = g(R^*, t)$$

Тоді з (1,10) випливає, що

$$u_j^0(M_0, t)|_{x^3=0} = 0$$

$$u_j^0(R, t) = -u_j^0(R^*, t), \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

А значить, і

$$u_j^k(M_0, t)|_{x^3=0} = 0$$

$$u_j^k(R, t) = -u_j^k(R^*, t), \quad (j, k = 1, 2, 3, \dots)$$

Отже,

$$u_j(M_0, t)|_{x^3=0} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

А це означає, що побудований в такий спосіб розв'язок задачі (1,6) — (1,2) задовольняє умові (2,1).

В результаті одержуємо, що функція

$$u(M_0, t) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \{u_j^k(M_0, t) - u_j^{k-1}(M_0, t)\}, \quad (\text{вважаємо, що } u_j^{-1} = 0)$$

являється розв'язком поставленої змішаної задачі.

З а у в а ж е н н я. Методом відображень можна розв'язувати змішані задачі для рівняння (1,6) не тільки для півпростору, але і для інших типів областей. Ці області повинні бути обмежені плоскими гранями, причому вони такі, що послідовними відображеннями за грані можна покрити увесь простір без перекриттів. Для кожної з цих областей буде свій закон продовження даних задачі. Крім цього, для збереження неперервності даних задачі приходить припускати рівність нулю на гранях даних областей функцій $g^{\alpha\beta}$ (для деяких α і β), f і g^{α} . Покажемо, наприклад, що треба робити, коли розв'язок задається на гранях клина

$$x^1 \geq 0, \quad x^2 \geq 0, \quad 0 \leq x^3 \leq l.$$

В цьому випадку припускаємо, що $g^{\alpha\beta}(0, x^2, x^3) = 0$, коли $\alpha = 1, \beta \neq 1$ або $\alpha \neq 1, \beta = 1$; $g^{\alpha\beta}(x^1, 0, x^3) = 0$, коли $\alpha = 2, \beta \neq 2$ або $\alpha \neq 2, \beta = 2$; $g^{\alpha\beta}(x^1, x^2, 0) = g^{\alpha\beta}(x^1, x^2, l) = 0$, коли $\alpha = 3, \beta \neq 3$ або $\alpha \neq 3, \beta = 3$; $g^1(0, x^2, x^3, t) = g^2(x^1, 0, x^3, t) = g^3(x^1, x^2, 0, t) = g^3(x^1, x^2, l, t) = 0$; $f(0, x^2, x^3, t) = f(x^1, 0, x^3, t) = f(x^1, x^2, 0, t) = f(x^1, x^2, l, t) = 0$.

Будуть також припускатись виконаними умови узгодження для початкових даних на відповідних гранях клина.

Тоді поступаємо таким чином: послідовними відображеннями за грані клина покриваємо увесь півпростір $t \geq 0, -\infty \leq x^{\alpha} \leq +\infty, (\alpha = 1, 2, 3)$, і дані задачі продовжуємо так (в нас тут R і R^* будуть точки, симетричні відносно тієї із граней клина, за яку продовжуються дані):

$$c(R) - c(R^*) = 0$$

$$g^{\alpha\beta}(R) - g^{\alpha\beta}(R^*) = 0 \text{ при } \alpha, \beta \neq \kappa \text{ або } \alpha = \beta = \kappa, \text{ коли } R \text{ і } R^*$$

симетричні відносно грані $x^{\kappa} = 0$ або $x^{\kappa} = l$ при $\kappa = 3$.

$g^{\alpha\beta}(R) + g^{\alpha\beta}(R^*) = 0$ при $\alpha \neq \kappa, \beta = \kappa$ або $\alpha = \kappa, \beta \neq \kappa$. ($\kappa = 1, 2, 3$)

$$\varphi(R) + \varphi(R^*) = 0$$

$$\psi(R) + \psi(R^*) = 0$$

$$f(R, t) + f(R^*, t) = 0$$

Тоді формули (2,2) залишаються в силі і так само, як і раніше, одержуємо:

$$u_0(R, t) = -u_0(R^*, t)$$

$$\frac{\partial u_0(R, t)}{\partial x^\alpha} = \begin{cases} \frac{\partial u_0(R^*, t)}{\partial x^\alpha}, & \text{якщо } R \text{ і } R^* \text{ симетричні відносно грані } x^\alpha = 0 \\ & \text{або } x^\alpha = l. \\ -\frac{\partial u_0(R^*, t)}{\partial x^\alpha}, & \text{якщо } R \text{ і } R^* \text{ симетричні відносно інших граней.} \end{cases}$$

Тоді останні коефіцієнти продовжуємо таким чином:

$$g^\alpha(R, t) + g^\alpha(R^*, t) = 0, \text{ якщо } R \text{ і } R^* \text{ симетричні відносно} \\ \text{грані } x^\alpha = 0 \text{ або } x^\alpha = l.$$

$$g^\alpha(R, t) - g^\alpha(R^*, t) = 0, \text{ якщо } R \text{ і } R^* \text{ симетричні відносно} \\ \text{інших граней.}$$

$$g(R, t) - g(R^*, t) = 0 \text{ при продовженні за всі грані.}$$

В цьому випадку $u_1, u_2, \dots$ на гранях клина перетворюються в нуль, а їхні похідні поводять себе в симетричних точках так само, як і для u_0 .

Аналогічно поступаємо і для інших типів областей.

§ 3. ВИПАДОК НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

Знайдемо тепер розв'язок рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) = F \left(x^\alpha, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \right), \quad (3,1)$$

який задовольняє умови (1,2), і (2,1).

Тут $F \left(x^\alpha, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \right) = F \left(x^1, x^2, x^3, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial x^3} \right)$ — задана неперервна разом із своїми другими похідними по всіх аргументах функція, яка задовольняє умову

$$F(x^1, x^2, 0, t, 0, 0, 0, v) = 0,$$

де v — довільне число.

Згідно (1,3) розв'язок задачі (3,1) — (1,2) еквівалентний розв'язкові інтегрального рівняння

$$u(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ \varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) \} ds + \\ + \frac{1}{4\pi} \iiint_P [u(M, t)] L(\sigma) dv + \frac{1}{4\pi} \iiint_P \sigma [F] dv. \quad (3,2)$$

Це інтегральне рівняння розв'язується методом послідовних наближень для значень t , вказаних в кінці § 1.

За нульове наближення візьмемо

$$u^0(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ \varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) \} dS.$$

Тоді

$$\begin{aligned} w^j(M_0, t) = & u^0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi} \iint_P \iint [u^{j-1}(M, t)] L(\sigma) dv + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_P \iint \sigma \left[F\left(x^\alpha, t, u_{j-1}, \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha}\right) \right] dv. \end{aligned}$$

Як і раніше, вважаючи, що F для всякої два рази неперервно диференційованої функції u обмежена деякою константою M , можна показати (міркуючи так само, як і в [1]), що даний процес зводиться до деякої граничної функції, що являється розв'язком рівняння (3,2).

Будемо тепер задовольняти умову (2,1).

З формул (2,2) слідує, що

$$u^0(M_0, t)|_{x^3=0} = 0$$

$$u^0(R, t) = -u^0(R^*, t).$$

Функцію F продовжуємо так:

$$F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_R = -F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*}.$$

Тоді

$$u^1(M_0, t)|_{x^3=0} = 0$$

$$u^1(R, t) = -u^1(R^*, t).$$

Враховуючи те, що u^0 і u^1 в симетричних точках ведуть себе однаково, матимемо

$$F\left(x^\alpha, t, u^1, \frac{\partial u^1}{\partial x^\alpha}\right)_R = -F\left(x^\alpha, t, u^1, \frac{\partial u^1}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*}.$$

Звідси випливає, що взагалі

$$F\left(x^\alpha, t, u^j, \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}\right)_R = -F\left(x^\alpha, t, u^j, \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*} \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

І, значить,

$$w^j(M_0, t)|_{x^3=0} = 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

Отже, функція

$$u(M_0, t) = u^0(M_0, t) + \sum_{j=1}^{\infty} \{u^j(M_0, t) - u^{j-1}(M_0, t)\}$$

являється розв'язком задачі (3,1) — (1,2) — (2,1).

§ 4. БІЛЬШ ЗАГАЛЬНІ ГРАНИЧНІ УМОВИ

За допомогою розглянутого вище методу можна розв'язувати змішану задачу для рівняння (1,6) або (3,1), коли на границі задається умова

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (4,1)$$

або

$$\alpha u|_S + \beta \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (4,2)$$

α і β — деякі постійні (випадок неоднорідних граничних умов легко зводиться до розглядуваного).

Розглянемо детальніше випадок граничної умови (4,1). Коли границею нашої області є площина $x^3 = 0$, то щоб задовольнити граничну умову, треба перш за все вміти вичисляти похідну по x^3 від функцій типу

$$v_1(M_0, t) = \iint_{\tau(M, M_0)=t} f(M, M_0, t) dS,$$

і

$$v_2(M_0, t) = \iiint_{\tau(M, M_0) < t} F(M, M_0, t) dv.$$

Легко показати (див., наприклад, [1]), що

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_0^3} &= \iint_{\tau(M, M_0)=t} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_0^3} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x_0^3} - 2Hf \frac{\partial \tau}{\partial n(M)} \right\} dS; \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_0^3} &= \iiint_{\tau(M, M_0) < t} \frac{\partial F}{\partial x_0^3} dv - \iint_{\tau(M, M_0)=t} F \cdot \frac{\partial \tau}{\partial n(M)} dS, \end{aligned}$$

де H — середня кривизна поверхні в просторі Рімана з метрикою $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$;

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \sqrt{g^{\alpha\beta}} \frac{\partial f}{\partial x_0^\alpha} \cos(n, x^\beta)$$

$$\sqrt{g^{\alpha\beta}} \frac{\partial \tau}{\partial x_0^\alpha} \cos(n, x^\beta) = -n(M).$$

Позначимо:

$$\varphi(M)P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau)\psi(M) = K(M, M_0).$$

Тоді з (1,3) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_0, t)}{\partial x_0^3} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial K}{\partial x_0^3} + \left(\frac{\partial K}{\partial v} - 2HK - \psi(M)L(\sigma) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sigma f(M, 0) \right) \frac{\partial \tau}{\partial n(M)} \right\} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint_P \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0^3} ([u(M, t)]L(\sigma) + \sigma[f]) \right\} dv. \end{aligned}$$

Так само з (1,9) одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j(M_0, t)}{\partial x_0^3} = & \frac{1}{4\pi} \iint_P \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0^3} \left([u_j(M, t)] L(\sigma) - \sigma \left[g^\alpha \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha} + g u_{j-1} \right] \right) \right\} dv - \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ u_j(M, 0) L(\sigma) - \sigma \left(g^\alpha \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha} + g u_{j-1} \right) \right\} \frac{\partial \tau}{n(M)} dS. \end{aligned}$$

З цих формул випливає, що для того, щоб розв'язок рівняння (1,6), який задовольняє умові (1,2), задовольняв граничній умові

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x^3} \right|_{x^3=0} = 0,$$

досить дані задачі продовжити в такий спосіб:

$$\begin{aligned} c(R) &= c(R^*) \\ g^{\alpha\beta}(R) &= g^{\alpha\beta}(R^*), \text{ коли } \alpha, \beta \neq 3 \text{ або } \alpha = \beta = 3, \\ g^{\alpha\beta}(R) &= -g^{\alpha\beta}(R^*), \text{ коли } \alpha = 3, \beta \neq 3 \text{ або } \alpha \neq 3, \beta = 3 \\ \varphi(R) &= \varphi(R^*) \\ \psi(R) &= \psi(R^*) \\ f(R, t) &= f(R^*, t) \\ g^\alpha(R, t) &= g^\alpha(R^*, t), (\alpha = 1, 2) \\ g^3(R, t) &= -g^3(R^*, t) \\ g(R, t) &= g(R^*, t) \end{aligned}$$

У випадку нелінійного рівняння (3,1) продовження коефіцієнтів таке ж, а функція F продовжується за законом:

$$F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_R = F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*}.$$

Коли ми маємо справу з граничною умовою (4,2), то продовження даних являється комбінацією продовження для випадку граничних умов (2,1) і (4,1).

Зовсім аналогічно поступаємо і для інших типів областей.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Г. Гоголадзе. Волновое уравнение для неоднородной и анизотропной среды. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, IX, М., 1935.
2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, ГТТИ, М.—Л., 1951.
3. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. II, ГТТИ, М.—Л., 1951.

Л. М. ЗОРІЙ

ПРО УМОВИ СТІЙКОСТІ В ЦІЛОМУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 1. Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F_{11}(x, y) + F_{12}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= F_{21}(x, y) + F_{22}(x, y).\end{aligned}\quad (1,1)$$

Припускається, що функції F_{ij} ($i, j=1, 2$) неперервні, задовольняють умовам єдиності розв'язку в області $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$ і $F_{ij}(0, 0) = 0$ ($i, j=1, 2$).

Відомо, що нульовий розв'язок системи (1,1) називається асимптотично стійким в цілому, якщо він асимптотично стійкий за Ляпуновим (тобто при досить малих збуреннях) і якщо кожен інший розв'язок $x=x(t), y=y(t)$ системи (1,1) має властивість

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (1,2)$$

Якщо ж розв'язок $x=0, y=0$ асимптотично стійкий і всі розв'язки, які починаються в області D , що оточує початок координат, мають властивість (1,2), то D називається областю притягання нульового розв'язку або областю асимптотичної стійкості.

§ 2. Теорема 2.1. Якщо виконуються умови:

- а) $x F_{11}(x, y) = -a_{11}(x, y) x^2 < 0$ при $x \neq 0, y \neq 0$
 $y F_{22}(x, y) = -a_{22}(x, y) y^2 < 0$ " " "
б) $y F_{12}(x, y) = \varphi_{12}(x) \psi_{12}(y) f(x, y) y^2 > 0$ при $x \neq 0, y \neq 0$
 $x F_{21}(x, y) = -\varphi_{21}(x) \psi_{21}(y) f(x, y) x^2 < 0$ " " "
в) $\int_0^x \frac{\varphi_{21}(x)}{\varphi_{12}(x)} x dx \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$,
 $\int_0^y \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y dy \rightarrow \infty$ при $|y| \rightarrow \infty$

і функції φ_{ij} та ψ_{ij} ($i, j=1, 2; i \neq j$) одного знаку, то нульовий розв'язок системи (1,1) асимптотично стійкий в цілому.

Доведення: Умови (а) і (б) теореми дозволяють записати систему (1,1) в такому виді:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -a_{11}(x, y)x + \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x, y)y \\ \frac{dy}{dt} &= -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x, y)x - a_{22}(x, y)y,\end{aligned}\quad (2,1)$$

де функції a_{11} , a_{22} , f додатні для довільних значень аргументів.

Візьмемо функцію Ляпунова

$$V = \int_0^x \frac{\varphi_{21}(x)}{\varphi_{12}(x)} x dx + \int_0^y \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y dy. \quad (2,2)$$

Завдяки умовам теореми ця функція додатньо-означена і безмежно велика. На основі рівнянь збуреного руху (2,1) її похідна

$$\frac{dV}{dt} = -a_{11}(x, y) \frac{\varphi_{21}(x)}{\varphi_{12}(x)} x^2 - a_{22}(x, y) \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y^2 \quad (2,3)$$

є функцією від'ємно-означеною. Отже, на основі теореми Барбашина-Красовського [3] нульовий розв'язок справді стійкий в цілому.

Теорема 2.2. Якщо $F_{11}(x, y) \equiv 0$ і виконуються умови (б) і (в) теореми 2.1, $yF_{22}(x, y) = -a_{22}(x, y)y^2 < 0$, при $x \neq 0, y \neq 0$ і функції φ_{ij} та ψ_{ij} ($i, j = 1, 2$); $i \neq j$ одного знаку, то система (1,1) стійка в цілому.

Доведення. Система (1,1) виглядає тепер так:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x, y)y, \quad \frac{dy}{dt} = -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x, y)x - \\ &\quad - a_{22}(x, y)y.\end{aligned}\quad (2,4)$$

Беручи V такою ж, як при доведенні попередньої теореми, одержуємо:

$$\frac{dV}{dt} = -a_{22}(x, y) \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y^2. \quad (2,5)$$

Тут похідна є функцією знакопостійною, а саме: $\frac{dV}{dt} < 0$ при $y \neq 0$,

$\frac{dV}{dt} = 0$ при $y = 0$. Внаслідок того, що перетин множин $y = 0$, $V = c$ ($c > 0$) не містить додатніх півтраєкторій системи, то на основі результатів згадуваної вже роботи [3] нульовий розв'язок асимптотично стійкий в цілому.

Теорема 2.3. Якщо $F_{12}(x, y) = F_{21}(x, y) \equiv 0$ і виконується умова (а) теореми 2, 1, то нульовий розв'язок системи (1,1) асимптотично стійкий в цілому.

Доведення очевидне, якщо взяти $2V = x^2 + y^2$.

Розглянемо систему (2,1) з нелінійними «добавками»:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -a_{11}(x, y)x + \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x, y)y + F_1(x, y)x \\ \frac{dy}{dt} &= -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x, y)x - a_{22}(x, y)y + F_2(x, y)y.\end{aligned}\quad (2,6)$$

Тут функції $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ такі, що не порушуються умови існування та єдиності розв'язків, а функції a_{11} , a_{22} , φ , ψ , f задовольняють умовам теореми (2.1), тобто система без «добавок» стійка в цілому.

Теорема 2.4. Якщо в усьому просторі $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &\leq a_{11}(x, y) \\ F_2(x, y) &\leq a_{22}(x, y) \end{aligned} \quad (2,7)$$

причому хоча б в одній з них має місце строга нерівність, то нульовий розв'язок системи (2,6) асимптотично стійкий в цілому.

Доведення аналогічне, як в попередніх теоремах, якщо за V взяти функцію (2,2).

Примітка. Теорему 2.4 можна застосовувати для побудови систем з наперед заданою областю притягання нульового розв'язку.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1. В роботі [5] досліджуються геометрично різні частинні випадки рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} + B\left(x, \frac{dx}{dt}\right)x = 0 \quad (2,8)$$

і приводяться достатні умови асимптотичної стійкості в цілому нульового розв'язку. Відносно функцій A, B припускається, що вони неперервні, задовольняють для всіх значень своїх аргументів умовам єдиності розв'язків і умовам Рауза-Гурвіца, тобто

$$A\left(x, \frac{dx}{dt}\right) > 0, \quad B\left(x, \frac{dx}{dt}\right) > 0.$$

На основі доведених теорем легко одержати деякі результати Б. С. Разумихіна, а також дослідити більш загальні види вказаного рівняння і при слабших припущеннях відносно функцій A і B .

$$\text{Нехай } B\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = b_1(x)b_2\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad b_1(x) > 0, \quad b_2\left(\frac{dx}{dt}\right) > 0.$$

Розглянемо систему, рівнозначну нашому рівнянню:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -b_1(x)b_2(y)x - A(x, y)y.$$

На основі теореми 2.2 нульовий розв'язок асимптотично стійкий в цілому, якщо в усьому фазовому просторі виконуються умови:

$$b_1(x) > 0, \quad b_2(y) > 0, \quad A(x, y) > 0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_0^x b_1(x)x dx = \infty, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{y}{b_2(y)} dy = \infty.$$

Приклад 2. Застосуємо теорему 2.1 для визначення умов стійкості в цілому деяких видів так званої системи Єршова:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) \\ \sigma &= c_1x - d_1y. \end{aligned} \quad (2,9)$$

Тут c_1, d_1 — додатні постійні, F і f — неперервні при всіх значеннях аргументів, задовольняють умовами єдиності розв'язку і $F(0,0)=0$, $f(0)=0$. Н. Н. Красовський [6] будує функцію

$$\varphi(\sigma, y) = c_1 F\left(\frac{\sigma + d_1 y}{c_1}, y\right) - d_1 f(\sigma)$$

і дає такі умови стійкості в цілому:

(а) $y \varphi(0, y) < 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$ при $y \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $\sigma[\varphi(\sigma, y) - \varphi(0, y)] < 0$ при $\sigma \neq 0$;

$$(б) \left| \int_0^{\pm\infty} f(\sigma) d\sigma \right| = \infty, \left| \int_0^{\infty} \varphi(0, y) dy \right| = \infty.$$

Н. П. Єругін [2] висловив думку, що умови (б) можна, мабуть, ослабити. Як приклад застосування теореми 2.1 проведемо дослідження деяких класів рівнянь такого типу.

Нехай дана система:

$$\frac{dx}{dt} = -a(x, y)x - bf_1(\sigma)y$$

$$\frac{dy}{dt} = c_1 f_1(\sigma)x - d_1 f_1(\sigma)y, \quad \sigma = c_1 x - d_1 y.$$

Тут

$$F(x, y) = -a(x, y)x - bf_1(\sigma)y$$

$$f(\sigma) = \sigma f_1(\sigma).$$

На основі теореми 2.1 для асимптотичної стійкості в цілому нульового розв'язку цієї системи досить виконання в усьому фазовому просторі умов: $b > 0$, $c_1 > 0$, $d_1 > 0$, $a(x, y) > 0$, $f_1(\sigma) > 0$.

Порівняємо останні умови з умовами Н. Н. Красовського.

$$\varphi(\sigma, y) = c_1 \left[-a\left(\frac{\sigma + d_1 y}{c_1}, y\right) \frac{\sigma + d_1 y}{c_1} - bf_1(\sigma)y \right] - d_1 \sigma f_1(\sigma)$$

$$\varphi(0, y) = c_1 \left[-a\left(\frac{d_1 y}{c_1}, y\right) \frac{d_1 y}{c_1} - bf_1(0)y \right].$$

Тоді

$$1. \ y \varphi(0, y) = -y^2 \left[a\left(\frac{d_1 y}{c_1}, y\right) d_1 + c_1 b f_1(0) \right] < 0 \text{ при } y \neq 0,$$

$$2. \ \sigma f(\sigma) = \sigma^2 f_1(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \neq 0,$$

$$3. \ \sigma[\varphi(\sigma, y) - \varphi(0, y)] = -\sigma^2 \alpha(\sigma, y) - 2\sigma y \beta(\sigma, y),$$

де

$$\alpha(\sigma, y) = \left[a\left(\frac{\sigma + d_1 y}{c_1}, y\right) + d_1 f_1(\sigma) \right] > 0,$$

$$\beta(\sigma, y) = \left[\frac{1}{2} d_1 a\left(\frac{\sigma + d_1 y}{c_1}, y\right) + \frac{1}{2} d_1 a\left(\frac{d_1 y}{c_1}, y\right) + c_1 b f_1(\sigma) \right] > 0,$$

звідки видно, що ця умова, взагалі кажучи, не виконується.

Неважко досягти порушення першої з умов (б), хоча функції $a(x, y)$, $f_1(\sigma)$ будуть в цей же час такими, що наші умови виконуються

і система стійка в цілому. Друга з умов (б) в нашому випадку виконується.

Очевидно, що теорема 2.1 дозволяє одержати достатні умови і у випадку, коли $b = b(x) > 0$ або $b = b(y) > 0$. Додаткові умови матимуть вид:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{x}{b(x)} dx = \infty, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_0^y b(y) y dy = \infty$$

відповідно.

§ 3. Розглянемо систему нелінійних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n F_{ij}(x_1, \dots, x_n) \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (3.1)$$

Відносно функцій F_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) зробимо припущення, аналогічні випадку системи двох рівнянь.

Теорема 3.1. Якщо в усьому фазовому просторі $-\infty < x_i < \infty$ ($i = 1, \dots, n$) виконані умови:

1. $x_i F_{ii}(x_1, \dots, x_n) = -a_{ii}(x_1, \dots, x_n) x_i^2 < 0$ при $x_i \neq 0$,
2. $x_j F_{ij}(x_1, \dots, x_n) = a_{ij}(x_1, \dots, x_n) A_{jj}(x_j) x_j^2 > 0$ при $x_j \neq 0$ ($i < j$)
3. $x_j F_{ij}(x_1, \dots, x_n) = -a_{ij}(x_1, \dots, x_n) A_{jj}(x_j) x_j^2 < 0$ при $x_j \neq 0$ ($i > j$)
4. $\lim_{|x_j| \rightarrow \infty} \int_0^{x_j} A_{jj}(x_j) x_j dx_j = \infty$ ($j = 1, \dots, n$)

і функції $a_{ij} \equiv a_{ji}$ при $i \neq j$, то нульовий розв'язок системи (3.1) асимптотично стійкий в цілому.

Доведення очевидне, якщо взяти

$$V = \sum_{j=1}^n \int_0^{x_j} A_{jj}(x_j) x_j dx_j, \quad (3.2)$$

бо тоді

$$\frac{dV}{dt} = - \sum_{j=1}^n a_{jj}(x_1, \dots, x_n) A_{jj}(x_j) x_j^2. \quad (3.3)$$

Примітки. 1) Для систем виду (3.1), в яких $F_{ij} = F_{ji} \equiv 0$ ($i \neq j$) одночасно або неодноразово та $F_{ij} \equiv 0$ ($i = j$) неодноразово, теорема 3.1 залишається в силі. Для таких систем справедливі також теореми, аналогічні теоремам (2.3) та (2.4), але при доведенні функцію V треба відповідно змінювати.

2) Очевидно, що теорема справедлива також для ряду систем, подібних до системи (3.1) в цьому розумінні, що функції, які розміщені симетрично відносно головної діагоналі системи (3.1) при виконанні умов теореми, пізніше взаємно мінялися місцями.

Неважко переконатися, що результат С. Н. Шиманова [4] одержується з теореми 3.1 як частинний випадок.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку професорові Остапу Степановичу Парасюку за постановку теми даної роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Немицкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
 2. Н. П. Еругин. Качественные методы в теории устойчивости, ПММ, 1955, т. XIX, вып. 5.
 3. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, 1952, т. XXXVI, № 3.
 4. С. Н. Шиманов. Об устойчивости решения одной нелинейной системы уравнений. Успехи математических наук, 1953, т. XVIII, вып. 6.
 5. Б. С. Разумихин. Об устойчивости тривиального решения систем 2-го порядка, ПММ, 1955, т. XIX, вып. 3.
 6. Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 1.
-

С. П. ГАВЕЛЯ

ВИКРИВЛЕННЯ ПОВЕРХЕНЬ РОЗРИВУ ЯДЕР ДЕЯКИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Запропонований в [1] спосіб пристосування до неопуклих областей побудованих Я. Б. Лопатинським в [2] ядер потенціалів, що зводять граничні задачі для лінійних еліптичних систем до регулярних інтегральних рівнянь, істотно зв'язаний з необхідністю визначення як області аналітичної продовжуваності їх, так і фактичного такого продовження. Оскільки це не завжди легко виконати, в даній замітці приводиться спосіб усунення такої необхідності шляхом деякого викривлення поверхень розриву безпосередньо побудованих в [2] ядер. При цьому використовуються деякі результати, а також всі позначення [1], за винятком випадків, де це спеціально зауважується.

Умовимось насамперед повернення від так званої місцевої системи координат (початок якої знаходиться в точці $y \in S$, а остання вісь ox_n направлена вздовж внутрішньої нормалі $\nu(y)$ до поверхні S в цій точці) до попередньої загальної координатної системи позначати з допомогою заміни аргумента (x) через $(x - y, y)$ та навпаки. Умовимося далі називати означаючими дві слідуючі властивості «півпросторового» ядра $G(x)$, що забезпечують його придатність для зведення розглядуваних задач до регулярних інтегральних рівнянь (у випадку опуклих областей V):

$$а) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) G(x - y, y) = 0 \text{ при } x \in V, y \in S.$$

б) Нехай, як і в [2], рядки граничного оператора $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ впорядковано за зростаючими порядками диференціювання s_k , тобто так, що $\underline{s} = s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{p_2} = \bar{s}$, та об'єднано в групи з однаковими порядками s_k по α_l рядків в кожній l -групі. Нехай, крім того, $G^0(x - y, y)$ означає результат усунення з матриці $G(x - y, y)$ перших $l - 1$ груп її стовпців, та, відповідно до цього,

$$u^0(x) = \int_{\dots}^{\dots} \int_{S}^{n-1} G^0(x - y, y) u(y) d_y S.$$

Тоді при $x \in D, y, z \in S$ та $L \leq j \leq L + \alpha_l$, де $L = \sum_{v=1}^{l-1} \alpha_v$, буде

$$\lim_{x \rightarrow y} B_j \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) u^0(x) = \nu_j(y) + \int_{\dots}^{n-1} \int_S B_j \left(y, \frac{\partial}{\partial y} \right) G^0(y-z, z) \nu(z) d_z S,$$

причому

$$B_j \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) G^0(x-z, z) = 0 \left(\frac{(x-z, \nu(z))}{|x-z|^n} \right),$$

для всіх

$$j \leq L + \nu_l.$$

Побудуємо тепер в кожній точці $y \in S$ дві замкнуті поверхні Ω та Q , які дотикались би до S в цій точці y та були б аналітичними принаймні в деяких її оточеннях Ω_0 та Q_0 . Вважаючи одну з них, наприклад Ω , задовольняючою умовам вживання її у виразі (12) з [1] та користуючись аналогічними приведеними там міркуваннями (див. [1], стор. 167—168), дістанемо

$$G(x) = - \int_{\Omega}^{n-1} \int \sum_{j=1}^n B_z^j \{ R(x, \xi; 0), G(\xi) \} d_{\xi} \Omega + g(x), \quad (1)$$

де $g(x)$ — аналітична та така, що задовольняє умові

$$A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) g(x) = 0,$$

при $x \in V/0$ функція.

Тоді, очевидно, означаючи властивості а) та б) ядра $G(x)$ зберуться при заміні його функцією $G_*(x)$, визначеною виразом

$$[G_*(x) = \int_{\Omega_0}^{n-1} \int \sum_{j=1}^n \nu_j B_z^j \{ R(x, \xi; 0), G(\xi) \} d_{\xi} \Omega + g(x). \quad (2)$$

(Очевидно, при побудові множини Ω_0 слід припускати її приналежність до деякої неперервно залежної від координат точки y сім'ї. В наступному буде потрібне аналогічне припущення і відносно множини Q_0).

Розкриваючи символи білінійних диференціальних форм B_z^j та позначаючи (з метою стислості)

$$\begin{aligned} & - \sum_{k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n = s-1} a_{k_1 \dots k_n}^{l_1 \dots l_n}(z) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} R(x, z; 0) \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n}}{\partial z_1^{l_1} \dots \partial z_n^{l_n}} G(z) = \\ & = \sum_{0 \leq k \leq s-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} R(x, z) G^{(k)}(z), \end{aligned}$$

вираз [2] перепишемо у вигляді

$$G_*(x) = \int_{\Omega_0}^{n-1} \int \sum_{0 \leq k \leq s-1} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} R(x, \xi) G^{(k)}(\xi) d_{\xi} \Omega + g(x). \quad (3)$$

Якщо тепер, крім зауваженого вище, вважати, що аналітичне перетворення

$$\begin{aligned} \eta = \eta(\xi) & \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \\ \dots\dots\dots \\ \eta_{n-1} = \xi_{n-1} \end{cases} & \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega_0 | \\ \xi = \xi(\eta) & \begin{cases} \eta_n = \xi_n - \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \end{cases} & | \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in Q_0 | \end{aligned}$$

взаємно відображує множини Ω та Q_0 одну на одну, то буде мати місце таке твердження:

При заміні ядра $G_*(x)$ функцією

$$G^*(x) = \int \dots \int_{Q_0}^{n-1} \sum_{0 \leq k \leq s-1} \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} R(x, \eta) G^{(k)}(\xi(\eta)) d_\eta Q + g(x), \quad (4)$$

де $G^{(k)}(\xi(\eta)) = G^{(k)}(\xi)|_{\xi=\xi(\eta)}$, його означаючи властивості а) та б) зберігаються.

В зв'язку з очевидною наявністю властивості а) у визначеного виразом (4) нового ядра $G^*(x)$ залишається переконатись лише в наявності у нього властивості б). Для цього, маючи на увазі представлення

$$G^*(x) = G_*(x) + \{G^*(x) - G_*(x)\}, \quad (5)$$

досить, в свою чергу, переконатись в неперервності (поблизу точки $x=y$) потенціалу

$$\begin{aligned} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^*(x) = \\ = \int \dots \int_S^{n-1} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \{G^*(x-z, z) - G_*(x-z, z)\} \mu(z) d_z S \end{aligned} \quad (6)$$

при $x \in V + S$; $y \in S$ ($z \in S$).

Це ж останнє переконання безпосередньо впливає з представлення

$$\begin{aligned} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) G^*(x-z, z) = \\ = \int \dots \int_{\Omega_0}^{n-1} \sum_{0 \leq k \leq s-1} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} R(x-z, z; \eta) \Big|_{\eta=\eta(\xi)} G^{(k)}(\xi) \sigma(\xi) d_\xi \Omega + g(x) \end{aligned}$$

та з зауважень, що внаслідок взаємодотику поверхень Ω та Q , перше, $((n-1) - \text{мірна})$ площа елемента поверхні Q по відношенню до Ω може бути оцінена

$$\sigma(\xi) = 1 + o(|\xi|)$$

та, по-друге, також має місце оцінка

$$\begin{aligned} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} R(x-z, z; \eta) \Big|_{\eta=\eta(\xi)} - \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} R(x-z, z; \xi) \right\} = \\ = o\left(B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} R(x-z, z; \xi) \right). \end{aligned}$$

Цілком очевидним, далі, є

З а у в а ж е н н я 1. Означаючи властивості а) та б) ядра $G(x)$ не порушуються при заміні його функцією

$$G^{**}(x) = \int_{\overline{Q}}^{\overline{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq s-1} \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} R(x, \eta) \lambda^k(\eta) d_\eta Q + g(x), \quad (7)$$

де $\lambda^k(\eta)$, співпадаючи з $G^{(k)}(\xi(\eta))$ на Q_0 , неперервно продовжена на $Q - Q_0$.

В розумінні спрощення обчислень явного виразу нових ядер часом виявляється корисним

З а у в а ж е н н я 2. При заміні ядра $G^{**}(x)$ розглядуваного потенціалу функцією

$$G^{***}(x) = \int_{\overline{Q}}^{\overline{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq s-1} \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} R(x, \eta) \lambda^k(\eta) \gamma(\eta) d_\eta Q + g(x), \quad (8)$$

де $\gamma(\eta) = [\gamma_1(\eta), \dots, \gamma_p(\eta)]$ — діагональна матриця неперервних на Q функцій $\gamma_k(\eta)$, його властивість а) зберігається, а властивість б) видозмінюється таким чином:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{00}(x) &= \gamma_j^0 \mu_j(y) + \\ &+ \int_{\overline{S}}^{\overline{n-1}} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G^{00}(y-z, z) \mu(z) d_z S, \end{aligned} \quad (9)$$

причому $\gamma_k^0 = \gamma_k(0) = \text{const}$, $G^{00}(x-y, y)$ — позначає результат усунення з матриці $G(x-y, y)$ перших $l-1$ її стовпців, та, відповідно до цього,

$$u^{00}(x) = \int_{\overline{S}}^{\overline{n-1}} G^{00}(x-y, y) \mu(y) d_y B.$$

Дійсно, представляючи

$$\begin{aligned} &B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{00}(x) = \\ &= \int_{\overline{S}}^{\overline{n-1}} \left\{ \int_{\overline{Q-Q_\varepsilon}}^{\overline{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq s-1} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} R(x-y, y; \eta) \lambda^k(\eta) \gamma(\eta) d_\eta Q \right\} \mu(y) d_y S + \\ &+ \int_{\overline{S}}^{\overline{n-1}} \left\{ \int_{\overline{Q_\varepsilon}}^{\overline{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq s-1} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} R(x-y, y; \eta) \lambda^k(\eta) d_\eta Q \right\} \gamma(\eta) \mu(y) d_y S, \end{aligned}$$

де $\eta \in Q_\varepsilon$, Q_ε — множина точок $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in Q$, для яких виконана умова $|\eta_1, \dots, \eta_n| \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), та переходячи до границі при $x \rightarrow y$, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow y} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{00}(x) = \gamma_j(\bar{\eta}) \mu_j(y) + \int_{\overline{S}}^{\overline{n-1}} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G^{00}(y-z, z) \mu(z) d_z S.$$

З можливості вибору ε як завгодно малим та неперервності функцій $\gamma_j(\eta)$ виходить, що $\gamma_j(\eta) = \gamma_j(0) \gamma_j^0$.

Це й обумовлює співвідношення (9). Наявність же властивості а) у визначеній виразом (8) функції цілком очевидна.

Частинним випадком розглянутого є

З а у в а ж е н н я 3. Означаючи властивості а) та б) ядра $G(x)$ повністю зберігаються при заміні його визначеною виразом (8) функцією $G^{***}(x)$, якщо $\gamma(0) = E$ (E — одинична матриця порядку p).

Цікаво зауважити, що можливість побудови описаних вище сімей поверхень Ω та Q впливає з задоволення поверхні S умовам Ляпунова. При цьому поверхні Ω та Q можуть бути вибрані таким чином, щоб кожна з множин $\Omega \rightarrow y$ цілком належала спільній частині області V та півпростору $(x - y, \nu(y)) > 0$, а кожна з множин Q не мала спільних точок з $V + S - y$. Таким чином, при досягненні усунення вимоги опуклості області V не виникає ніяких додаткових обмежень. Разом з тим ми уникаємо необхідності аналітичного продовження побудованих в [2] ядер, а також і визначення області аналітичності останнього.

П р и к л а д. Проілюструємо шойно побудований метод пристосування «півпросторових» ядер до неопуклих областей та спосіб введення множників $\gamma(\eta)$, що полегшують обчислення, застосувавши їх до розглядуваної в [3] задачі типу Пуанкаре для гармонійних функцій.

Переходячи до рухомої під час інтегрування вздовж S системи координат, початок якої знаходиться в точці інтегрування y , а остання вісь ox_3 направлена вздовж напрямку диференціювання граничного оператора, побудоване в [3] «півпросторове» ядро запишемо

$$q(x) = -\frac{\nu}{2\pi r} \left(\frac{x_1}{r+x_3}, \frac{x_2}{r+x_3}, 1 \right),$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, ν — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S в її точці y в рухомих координатах.

З цього представлення видно, що розривне вздовж променя $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 \leq 0$ ядро непридатне для областей, з якими такі промені перетинаються.

Функція

$$q_2(x) = \frac{x_2}{r(r+x_3)},$$

очевидно, може бути представлена у вигляді (1) слідуючим чином:

$$q_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \frac{\xi_2 d\xi \Omega}{V(\xi_1^2 + \xi_2^2) \{ (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2 \}},$$

де Ω — площина $\xi_3 = 0$, Ω_ε — множина тих її точок $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)$, для яких $|\xi| \leq \varepsilon$.

Відповідаюча $q_2(x)$ функція $q_2^*(x)$ з викривленою поверхнею розриву може бути побудована, очевидно, в такий спосіб

$$q_2^*(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q - Q_\varepsilon} \frac{\eta_2 \gamma(\eta) d\eta Q}{V(\eta_1^2 + \eta_2^2) \{ (x_1 - \eta_1)^2 + (x_2 - \eta_2)^2 + (x_3 - \eta_3)^2 \}},$$

причому за Q може бути вибрана, наприклад, дотична до S в початку рухомої системи сфера радіуса R , що лежить зовні V .

Замінюючи змінні інтегрування

$$\eta_1 = R \sin \varphi \cos \vartheta;$$

$$\eta_2 = R \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$\eta_3 = R(\cos \varphi - 1)$$

і потім $\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$ та позначаючи $\alpha = x_1 \cos \vartheta + x_2 \sin \vartheta$, $\beta = \sqrt{r^2 + 4Rx_3 + 4R^2}$, одержимо

$$q_2^*(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\gamma^*(t, \vartheta) \sqrt{1+t^2} dt d\vartheta}{t \sqrt{\beta^2 t^2 - 4R\alpha t + r^2}}.$$

Тепер видно, що доцільно вибрати

$$\gamma^*(t, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

тобто $\gamma(\eta) = \sqrt{1 + \frac{\eta_3}{2R}}$, причому умова $\gamma(0) = 1$ буде виконана.

З нескладних обчислень, далі, одержимо остаточно

$$q_2^*(x) = \begin{cases} \frac{2Rx_2}{r(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)} - \frac{1}{2r} & \text{зовні сфери} \\ & r^2 + 2Rx_3 = 0 \\ \frac{2Rx_2}{r(r^2 + 2Rx_3 - \beta r)} - \frac{1}{2r} & \text{всередині тієї ж сфери.} \end{cases}$$

Тотожність

$$(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)(r^2 + 2Rx_3 - \beta r) = 4R^2(x_3^2 - r^2)$$

переконає в аналітичності функції $q_2^*(x)$ зовні прямої $x_1 = x_2 = 0$. Але вираз

$$(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)|_{x_1=x_2=0} = x_3(x_3 + 2R) + |x_3(x_3 + 2R)|$$

обертається в нуль лише, при $-2R \leq x_3 \leq 0$. З цього виходить, що функція

$$q_2^{**}(x) = \frac{2Rx_2}{r(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)} - \frac{1}{2r},$$

яка являє собою аналітичне продовження заданої зовні сфери $r^2 + 2Rx_3 = 0$ частини функції $q_2^*(x)$, аналітична зовні відрізка $x_1 = x_2 = 0$, $-2R \leq x_3 \leq 0$.

Виходячи з функції $q_1(x) = \frac{x_1}{r(r+x_3)}$, цілком аналогічно попередньому, очевидно, будемо мати

$$q_1^{**}(x) = \frac{2Rx_1}{r(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)} - \frac{1}{2r}.$$

Таким чином, нове ядро $q^{**}(x)$ розглядуваної задачі може бути визначене з допомогою виразу

$$g^{**}(x) = -\frac{\nu}{2\pi} (q_1^{**}(x), q_2^{**}(x), q_3^{**}(x)).$$

При цьому може бути покладено $q_3^{**}(x) = \frac{1}{r}$, в зв'язку з точковим характером особливості цієї функції.

Представлення

$$\delta(x) = q_i^{**}(x) - q_i^*(x) = \frac{x_i(\beta - 2R - r)}{2R(r^2 - x_3^2)} \quad (i=1,2)$$

та впливаюча з нього оцінка $\frac{\partial}{\partial x_3} \delta(x) = O(|x|^{-1})$ (тут $\frac{\partial}{\partial x_3}$ — вигляд головної частини граничного оператора в рухомих координатах) переко-
нують в зберіганні означаючих властивостей функцією $q^{**}(x)$.

З попереднього, отже, ясно, що одержане таким способом нове ядро $q^{**}(x)$, аналітичне зовні відрізка $x_1=x_2=0$, $-2R \leq x_3 \leq 0$, придатне для зведення до регулярних інтегральних рівнянь розглядуваної задачі у випадку області, з якою не перетинаються лише такі відрізки.

Примітка. Зважаючи на локальний характер леми Я. Б. Лопатинського [4], побудоване в [1] та використовуване тут представлення (1) функції $G(x)$ слід уточнити, поклавши $R(x; z, 0) = \omega(x, z)$ при $z \in \Omega_0$. В зв'язку з цим буде

$$g(x) = -\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho}^{n-1} \sum_{j=1}^n \nu_j B_z^j(R(x; z, 0), G(z)) d_z S - \\ - \sum_{l=0}^t \left\{ \frac{\partial^l}{\partial y^l} \omega(x, y) \right\}_{y=0} \int_{(\Omega_0 \setminus T_\rho) \cup S_\rho}^{n-1} \sum_{j=1}^n \nu_j B_z^j(\vartheta_l(z), G(z)) d_z S.$$

(Множині Ω_0 в [1] відповідає T_n).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гавеля С. П. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8, стор. 158—174, Львів, 1957.
2. Лопатинський Я. Б. Укр. мат. журн. 5, № 2, 1953.
3. Лопатинський Я. Б. Наукові записки ЛДУ, серія фізико-математична, в. 5, Львів, 1953.
4. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, т. 79, № 5, 1951.

М. С. ВОЛОШИНА

ПРО ДЕЯКІ ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В цій замітці для деякого класу еліптичних систем визначається вид граничних умов, для яких ядра інтегралів типу потенціалу, що розв'язують відповідну граничну задачу, мають точкову особливість.

В замітці використовуються результати і позначення робіт [7] і [8].

ВИПАДОК ПОСТІЙНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Нехай

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = \sum_{k,l=1}^n A_{kl} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \quad (1)$$

є сильно еліптична в сенсі М. Й. Вишика система (див. [4]). Тут $A_{kl} = A_{lk} = A_{kl}^*$ — сталі дійсні матриці порядку p , $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n -вимірного дійсного простору. Нехай D — область, обмежена зв'язною поверхнею S типу Ляпунова.

Розв'язок граничної задачі

$$\begin{aligned} A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) &= 0 \quad (x \in D), \\ B \left(y, \frac{\partial}{\partial y} \right) u(y) &= f(y) \quad (y \in S), \end{aligned} \quad (2)$$

згідно з методом Я. Б. Лопатинського [1] шукаємо у вигляді інтеграла типу потенціалу

$$u(x) = \int \dots (n-1) \dots \int G(x, y) \mu(y) dy S, \quad (3)$$

де $G(x, y)$ — ядро інтеграла типу потенціалу, $\mu(y)$ — «густина» потенціалу.

Розроблений в [1] метод зведення граничних задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь до регулярних інтегральних рівнянь створено в припущенні опуклості розглядуваної області.

Ця вимога пояснюється тим, що ядра інтегралів типу потенціалу у випадку неопуклої області можуть мати сильні розриви всередині області інтегрування, що заважає застосуванню методу.

* Штрих зверху означає транспонування.

Проте вдалося показати, що існують два типи граничних умов — умови типу Діріхле і Неймана, для яких ядро інтеграла типу потенціалу має точкову особливість також і у випадку неопуклої області.

Теорема. Для того, щоб ядро інтеграла типу потенціалу, що розв'язує деяку граничну задачу (2), мало тільки точкову особливість, необхідно і достатньо, щоб граничні умови мали один з двох виглядів: умова типу Діріхле:

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = C_1(y) \quad (y \in S), \quad (4)$$

умова типу Неймана:

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = C_2(y) \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_l(y) \frac{\partial}{\partial y_k} + Q(y)^*, \quad y \in S. \quad (5)$$

Тут $\nu_l(y)$ — компоненти одиничного вектора внутрішньої нормалі в точці $y \in S$, $C_1(y)$ і $C_2(y)$ — оборотні дійсні матриці, $\tilde{A}_{lk}$ — постійні дійсні квадратні матриці, які мають властивість $\tilde{A}_{kl} = \tilde{A}_{lk}'$, $\tilde{A}_{kl} + \tilde{A}_{lk} = 2A_{kl}$ і визначаються із співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{kl} \nu_l \tau_k = \operatorname{Re} B_0(\nu, \tau) A_0, \\ & B_0(\nu, \tau) = \left[\int_+ A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta \right]^{-1} \int_+ \beta A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta, \\ & A_0 = \sum_{k,l=1}^n A_{kl} \nu_k \nu_l \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причому внаслідок умови еліптичності, матриця A_0 є оборотною (докладно про це див. в [7]); τ і ν є n -вимірні одиничні вектори, $(\tau, \nu) = 0$, $\int_+ (...) d\beta$ означає інтегрування по простому додатньо орієнтованому замкненому контуру, який охоплює β -корені $\det A(\beta \nu + \tau) = 0$ з додатньою уявною частиною.

Зауважимо, що оскільки на порядок особливості ядра має вплив лише перший доданок правої частини (5), то для спрощення, $Q(y)$ будемо опускаати. Крім того, для спрощення запису замість $C_1(y)$, $C_2(y)$, $\nu_l(y)$ будемо писати C_1 , C_2 , ν_l відповідно.

Доведемо дві леми.

Лема I. Має місце співвідношення:

$$\int_+ \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} (\beta \nu_k + \tau_k) \nu_l A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta = \pi i E, \quad (7)$$

де E — одинична матриця.

В роботі [7] було показано, що

$$B_0(\nu, \tau) = B_0'(\nu, \tau), \quad (8)$$

* Зауважимо, що для того, щоб існував єдиний розв'язок задачі типу Неймана, матриця $Q(y)$ (яка може бути і необоротною!) повинна мати властивість: форма $u'(y)Q(y)u(y)$ від'ємно визначена.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} B_0(\nu, \tau) &= (\operatorname{Im} B_0(\nu, \tau))' = \pi \left[\int_{+} A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta \right]^{-1} A_0^{-1} = \\ &= \pi A_0^{-1} \left[\int_{+} A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (8')$$

$$A_0 = A'_0 = \sum_{k, l=1}^n A_{kl} \nu_k \nu_l = \sum_{k, l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_k \nu_l. \quad (9)$$

Використовуючи (6) і (9), перетворимо підінтегральний вираз (7):

$$\begin{aligned} \sum_{k, l=1}^n \tilde{A}_{lk} (\beta\nu_k + \tau_k) \nu_l A^{-1}(\beta\nu + \tau) &= \beta A_0 A^{-1}(\beta\nu + \tau) - \\ &- A_0 \operatorname{Re} B_0(\nu, \tau) A^{-1}(\beta\nu + \tau). \end{aligned}$$

Тоді (7) матиме вигляд:

$$A_0 \int_{+} \beta A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta - A_0 \operatorname{Re} B_0(\nu, \tau) \int_{+} A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta = \pi i. \quad (7')$$

Підставляючи

$$\begin{aligned} A_0 \operatorname{Re} B_0(\nu, \tau) &= A_0 B_0(\nu, \tau) - i A_0 \operatorname{Im} B_0(\nu, \tau) = \\ &= A_0 \int_{+} \beta A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta \left[\int_{+} A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta \right]^{-1} - \pi i \left[\int_{+} A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta \right]^{-1} \end{aligned}$$

в (7'), одержимо те, що вимагалось.

Лема II. Нехай $T(\tilde{\alpha})$, де $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ є однорідна матриця, степінь однорідності якої дорівнює $\kappa - n + 2$, де n — розмірність простору ($n \geq 3$), κ — ціле додатне число ($\kappa < n$).

Нехай

$$\int_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})=1} \dots (n-2) \dots \int d\tilde{\alpha} S \int_{+} \frac{A^{-1}(a)}{(x-y, a)^\kappa} T(\tilde{\alpha}) d\alpha_n \equiv 0. \quad (10)$$

Тоді $T(\tilde{\alpha}) \equiv 0$. Тут $(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})=1$ означає інтегрування по поверхні $(n-2)$ -вимірної одиничної сфери; $d\tilde{\alpha} S$ — елемент поверхні цієї сфери. Згідно з відомими формулами:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

маємо:

$$\frac{(\kappa-1)!}{(-i)^\kappa (x-y, a)^\kappa} = \int_0^\infty r^{\kappa-1} e^{ir(x-y, a)} dr = \int_0^\infty r^{\kappa-1} e^{ir(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{a})} e^{ir(x_n-y_n)\alpha_n} dr.$$

Помножуючи тотожність (10) на $\frac{(\kappa-1)!}{(-i)^\kappa}$ і користуючись останнім співвідношенням, одержуємо

$$\int_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})=1} \dots (n-2) \dots \int d\tilde{\alpha} S \int_0^{\infty} r^{k-1} e^{ir(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{\alpha})} dr \int_{+} e^{ir(x_n-y_n)\alpha_n} A^{-1}(\alpha) d\alpha_n T(\tilde{\alpha}) \equiv 0 \quad (11)$$

Виконуючи заміну $\alpha = \frac{\gamma}{r}$, маємо серію співвідношень:

$$\tilde{\gamma} = r\tilde{\alpha}, \quad \gamma_n = r\alpha_n, \quad d\tilde{\gamma} S = r^{n-2} dr d\tilde{\alpha} S, \quad d\gamma_n = r d\alpha_n, \quad A^{-1}(\alpha) = r^2 A^{-1}(\gamma),$$

$$\begin{aligned} T(\tilde{\alpha}) &= \frac{1}{r^{k-n+2}} T(\tilde{\gamma}); \int_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})=1} \dots (n-2) \dots \int d\tilde{\alpha} S \int_0^{\infty} r^{n-2} (\dots) dr = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots (n-1) \dots \int (\dots) d\tilde{\gamma} S. \end{aligned}$$

Здійснивши в (11) вказані перетворення і позначаючи для зручності $x-y$ і γ через x і α відповідно, одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots (n-1) \dots \int e^{i(x, \tilde{\alpha})} \tilde{V}(\tilde{\alpha}, x_n) d\tilde{\alpha} S \equiv 0, \quad (12)$$

де

$$V(\tilde{\alpha}, x_n) = \int_{+} e^{ix_n \alpha_n} A^{-1}(\alpha) d\alpha_n T(\tilde{\alpha}). \quad (13)$$

Внаслідок того, що (12) є формула обернення Фур'є для функції $V(\tilde{\alpha}, x_n)$ із рівності її нулеві випливає, що

$$\tilde{V}(\tilde{\alpha}, x_n) = \int_{+} e^{ix_n \alpha_n} A^{-1}(\alpha) d\alpha_n T(\tilde{\alpha}) \equiv 0. \quad (14)$$

Матриця $\int_{+} A^{-1}(\alpha) d\alpha_n$ внаслідок умови сильної еліптичності є оборотною ([1]). Тому, покладаючи в тотожності (14) $x_n = 0$, одержують $T(\tilde{\alpha}) \equiv 0$. Лема доведена.

Повернемось до доведення теореми. Достатність умов (4), (5) була доведена в замітці [7].

Необхідність. Нехай ядро інтеграла типу потенціалу деякої граничної задачі має точкову особливість. Оскільки ядро є розв'язком системи (1), воно повинно виражатися через фундаментальну матрицю $\Phi(x-y)$ цієї системи. Як відомо, $\Phi(x-y)$ має точкову особливість порядку $n-2$ (див. [2]).

Із представлень ядер інтегралів типу потенціалу, даних в [1], випливає, що для системи другого порядку (1) можливі лише два випадки: 1) порядок особливості ядра дорівнює $n-1$; 2) порядок особливості ядра дорівнює $n-2$.

В першому випадку із представлення ядра інтеграла типу потенціалу, даного в [1], випливає, що гранична умова може бути лише умовою типу Діріхле.

В другому випадку граничний оператор повинен містити в собі диференціювання першого порядку:

$$B\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \sum_{k=1}^n B_k \frac{\partial}{\partial y_k} \quad (15)$$

(для простоти запису y зафіксовано і пропущено). При цьому припускається, що виконується умова регуляризованості:

$$\det \int_{+} B(\beta v + \tau) A^{-1}(\beta v + \tau) d\beta \neq 0.$$

Згідно з [1], ядро $G(x, y)$ має вигляд:

$$G(x, y) = - \frac{(n-3)!}{(-2\pi i)^{n-1}} \int_{\substack{(\tau, \tau)=1 \\ (\tau, v)=0}} \cdot \cdot (n-2) \cdot \cdot \int d\tau S \int_{+} \frac{A^{-1}(\beta v + \tau)}{(x-y, \beta v + \tau)^{n-2}} \times \\ \times \left[\int_{+} B(\tilde{\beta} v + \tau) A^{-1}(\tilde{\beta} v + \tau) d\tilde{\beta} \right]^{-1} d\beta. \quad (16)$$

З другого боку, будучи розв'язком однорідної системи (1), ядро $G(x, y)$ виразиться через фундаментальну матрицю $\varphi(x-y)$ так:

$$G(x, y) = \varphi(x-y) C(y) + R(x, y), \quad (17)$$

де $R(x, y)$ — регулярний доданок (див. [3]).

Використовуючи формулу Гріна [5] і теорему типу Ліувіля [6], можна показати, що $R(x, y) \equiv 0$.

Тому

$$G(x, y) = \varphi(x-y) C(y), \quad (18)$$

причому внаслідок оборотності $G(x, y)$ і $\varphi(x-y)$, матриця $C(y)$ оборотна.

Покладаючи в (18) для простоти $C(y) = E$ і використовуючи представлення фундаментальної матриці, дане Я. Б. Лопатинським в [2], маємо:

$$G(x, y) = \frac{(n-3)!}{(-2\pi i)^n} \int_{\substack{(\tau, \tau)=1 \\ (\tau, v)=0}} \cdot \cdot (n-2) \cdot \cdot \int d\tau S \int_{+} \frac{A^{-1}(\beta v + \tau)}{(x-y, \beta v + \tau)^{n-2}} d\beta. \quad (19)$$

Віднімаючи (19) від (16), одержуємо:

$$\int_{\substack{(\tau, \tau)=1 \\ (\tau, v)=0}} \cdot \cdot (n-2) \cdot \cdot \int d\tau S \int_{+} \frac{A^{-1}(\beta v + \tau)}{(x-y, \beta v + \tau)^{n-2}} \left\{ \left[\int_{+} B(\tilde{\beta} v + \tau) A^{-1}(\tilde{\beta} v + \tau) d\tilde{\beta} \right]^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi i} E \right\} d\beta \equiv 0. \quad (20)$$

Направляючи одиничний вектор v по n -ій осі, зауважуючи, що матриця у фігурних дужках є однорідна матриця нульового виміру і використовуючи лему II, із (20) одержуємо:

$$\int_{+} B(\beta v + \tau) A^{-1}(\beta v + \tau) d\beta = 2\pi i E. \quad (21)$$

Далі, згідно з лемою I, маємо:

$$\int_+ 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} (\beta \nu_k + \tau_k) \nu_l A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta = 2\pi i E. \quad (22)$$

Віднімаючи (21) від (22), маємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n B_k \nu_k \int_+ \beta A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta + \sum_{k=1}^n B_k \tau_k \int_+ A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta - \\ & - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_k \nu_l \int_+ \beta A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \tau_k \nu_l \int_+ A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta \equiv 0. \end{aligned} \quad (23)$$

З формули (6) випливає:

$$\int_+ \beta A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta = B_0(\nu, \tau) \int_+ A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta. \quad (24)$$

Підставляючи (24) в (23) і використовуючи оборотність матриці $\int_+ A^{-1}(\beta \nu + \tau) d\beta$, одержуємо:

$$\sum_{k=1}^n B_k \nu_k B_0(\nu, \tau) + \sum_{k=1}^n B_k \tau_k - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_k \nu_l B_0(\nu, \tau) - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \tau_k \nu_l \equiv 0.$$

Відокремимо дійсну і уявну частини:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n B_k \nu_k \operatorname{Re} B_0(\nu, \tau) + \sum_{k=1}^n B_k \tau_k - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_k \nu_l \operatorname{Re} B_0(\nu, \tau) - \\ & - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \tau_k \nu_l \equiv 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^n B_k \nu_k \operatorname{Im} B_0(\nu, \tau) - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_k \nu_l \operatorname{Im} B_0(\nu, \tau) \equiv 0. \quad (26)$$

Із (8') випливає, що $\det \operatorname{Im} B_0(\nu, \tau) \neq 0$. Тому з (26) маємо:

$$\sum_{k=1}^n B_k \nu_k - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_k \nu_l \equiv 0. \quad (27)$$

Підставляючи в (25) замість $\operatorname{Re} B_0(\nu, \tau)$ його значення з (6) і замість $\sum_{k=1}^n B_k \nu_k$ його значення з (27), одержуємо:

$$\sum_{k=1}^n B_k \tau_k - 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \tau_k \nu_l \equiv 0,$$

звідки, зрівнюючи коефіцієнти при τ_k , одержуємо:

$$B_k = 2 \sum_{l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_l.$$

Остаточно маємо:

$$B\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2 \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_l \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

У випадку, коли матриця C в (18) не є одиничною, одержуємо:

$$B\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2 C^{-1} \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_l \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Теорема повністю доведена.

У виразі для ядра (16) множник в квадратних дужках виникав за рахунок граничної умови, що було обумовлено застосуванням методу [1]. Застосовуючи вищенаведені положення, можна, проте, довести де-що більше.

Теорема. Нехай дано інтеграл типу потенціалу:

$$M(x, y) = \int_{\substack{(\tau, \tau)=1 \\ (\tau, \nu)=0}} \cdot \cdot (n-2) \cdot \cdot \int d\tau S \int_+ \frac{A^{-1}(\beta\nu + \tau)}{(x-y, \beta\nu + \tau)^{n-2}} P(\nu, \tau) d\beta, \quad (28)$$

де $P(\nu, \tau)$ — довільна однорідна матриця нульового виміру відносно τ . Нехай матриця $M(x, y)$ оборотна хоча б при одному x . Для того, щоб інтеграл типу потенціалу (28) мав точкову особливість, необхідно і достатньо, щоб матриця $P(\nu, \tau)$ мала вигляд:

$$P(\nu, \tau) = \left[\int_+ \sum_{k,l=1}^n \tilde{A}_{lk} \nu_l (\beta\nu_k + \tau_k) A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta \right]^{-1} C, \quad (29)$$

де C — оборотна постійна матриця.

Теорема. Нехай дано інтеграл типу потенціалу

$$N(x, y) = \int_{\substack{(\tau, \tau)=1 \\ (\tau, \nu)=0}} \cdot \cdot (n-2) \cdot \cdot \int d\tau S \int_+ \frac{A^{-1}(\beta\nu + \tau)}{(x-y, \beta\nu + \tau)^{n-1}} Q(\nu, \tau) d\beta, \quad (30)$$

де $Q(\nu, \tau)$ — однорідна матриця першого степеня однорідності відносно τ . Нехай матриця $N(x, y)$ оборотна хоча б при одному x . Для того, щоб потенціал $N(x, y)$ мав точкову особливість, необхідно і достатньо, щоб матриця $Q(\nu, \tau)$ була постійною оберненою матрицею.

ВИПАДОК ЗМІННИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Використовуючи результати роботи [8], першу з доведених вище теорем можна перенести на випадок довільної сильно еліптичної системи другого порядку з достатньо гладкими змінними коефіцієнтами, якщо припустити, що для цієї системи існує фундаментальна матриця.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Укр. мат. журн., т. 5, № 2, 1953.
 2. Я. Б. Лопатинский. Укр. мат. журн., т. 3, № 3, 1951.
 3. Я. Б. Лопатинский. ДАН СССР, т. 79, № 5, 1951.
 4. М. И. Вишик. Мат. сб., т. 29 (71), № 3, 1951.
 5. Б. Р. Лаврук. ДАН УРСР, № 3, 214, 1956.
 6. С. Д. Эйдельман. Мат. сб., т. 33 (75), № 2, 1953.
 7. М. С. Волошина. ДАН УРСР, № 9, 1958.
 8. М. С. Волошина. ДАН УРСР, № 10, 1958.
-

В. О. ЛІХАЧОВ

ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНОЇ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПАЯНИМ КОРОТКИМ ЦИЛІНДРОМ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай у круглий отвір пластинки впаяний короткий циліндр. Напружений стан пластинки на безмежності візьмемо таким, при якому комплексні потенціали $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ Колосова-Мусхелішвілі виражаються у вигляді деяких поліномів від z .

Будемо позначати товщину пластинки через $2h$, зовнішній радіус циліндра через R_e , внутрішній — через R_i , довжину циліндра — через $2L$. Далі будемо користуватися циліндричною системою координат з початком у точці перетину площини пластинки з віссю циліндра. Вісь oz направимо по осі циліндра. Очевидно, що в цьому випадку площина $z=0$ збігається з серединною площиною пластинки.

В області контакту пластинки з циліндром приймаються умови [3]

$$\widehat{rr}_0(\theta) = \widehat{rr}(\theta), \quad \widehat{r\theta}_0(\theta) = \widehat{r\theta} \quad \text{при } -h \leq z \leq h \quad (1)$$

$$u_{r_0} = u_r, \quad u_{\theta_0} = u_\theta \quad \text{при } z = 0 \quad (2)$$

Крім цього, для циліндра приймаємо, що

$$\widehat{rr} = \widehat{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R_e \text{ і } |z| > h \quad (3)$$

$$\widehat{rz} = 0 \quad \text{при } r = R_e \quad (4)$$

$$\widehat{zz} = \widehat{zr} = \widehat{z\theta} = 0 \quad \text{при } z = \pm L \quad (5)$$

та

$$\widehat{rr} = \widehat{rz} = \widehat{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R_i, \quad (6)$$

якщо циліндр порожнистий.

Виходячи з симетрії задачі відносно серединної площини, будемо надалі вважати, що $z \geq 0$.

§ 1. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНКИ

Напружений стан пластинки на підставі робіт [1], [2] визначається через коефіцієнти функцій $\varphi(\eta)$ і $\psi(\eta)$ комплексного змінного η , [3].

§ 2. ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ ДЛЯ КОРОТКОГО ЦИЛІНДРА

1. Розглянемо деформацію короткого циліндра, навантаженого по його внутрішній та зовнішній поверхнях в такий спосіб, як і в роботі [3].

При розв'язанні таких просторових задач виникають труднощі в задоволенні всім граничним умовам через нестачу довільних сталих інтегрування. Однак можна дати такі розв'язки рівнянь Ламе, які дають можливість задовольнити граничним умовам на бокових поверхнях циліндра і досить добре на його торцях.

Будемо надалі за допомогою значка p позначати рішення системи Ламе на випадок кінцевої циліндричної області, які можуть бути отримані з виразів (2.15—2.19) роботи [3], якщо в останніх параметр λ замінити на $\frac{p\pi}{l}$, де $l = \frac{L}{R_l}$, і застосувати відповідні формули обернення для кінцевих синус- і косинус-перетворень Фур'є. За допомогою значка «п» будемо позначати поліноміальні рішення системи рівнянь Ламе, які також задовольняють одній з слідуєчих умов:

$$A \quad u_z^n, \frac{\partial u_z^n}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_\theta^n}{\partial \zeta} \text{ рівні нулевим при } \zeta=0$$

$$B \quad u_r^n, u_\theta^n, \frac{\partial u_z^n}{\partial \zeta} \text{ рівні нулевим при } \zeta=0.$$

На випадок умови A ці рішення мають такий вид:

$$\begin{aligned} u_{zk}^n = & \sum_{n=k+0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (-1)^m d_m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+1)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+1} + \right. \\ & \left. + d_0 x^n \zeta \right\} \cos \kappa \theta + \\ & + \sum_{n=k+1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (-1)^m l_m \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m+1)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m+1} + \right. \\ & \left. + l_0 x^{n-1} \zeta \right\} \sin \kappa \theta, \end{aligned}$$

де

$$d_0 = d_n^k - \frac{2\nu}{\nu-2} \alpha_n^k, \quad l_0 = l_n^k - \frac{2\nu}{\nu-2} \beta_n^k,$$

$$d_m = d_n^k - \frac{(m+2)\nu}{\nu-2} \alpha_n^k, \quad l_m = l_n^k - \frac{(m+2)\nu}{\nu-2} \beta_n^k.$$

$$\begin{aligned} x u_{\theta k}^n = & \sum_{n=k+0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{m+1} D_m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+2} + \right. \\ & \left. + D_0 \frac{1}{(n+2)^2 - \kappa^2} x^{n+2} + D \frac{1}{2} x^n \zeta^2 \right\} \sin \kappa \theta + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=k+1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{m+1} C_m \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} + \right. \\ \left. + C_0 \frac{1}{(n+1)^2 - \kappa^2} x^{n+1} + C \frac{1}{2} x^{n-1} \zeta^2 \right\} \cos \kappa \Theta,$$

де

$$D_0 = \kappa d_n^k - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k - (n+2) a_n^k,$$

$$D = -\kappa d_n^k + \frac{4\nu-2}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k + n a_n^k,$$

$$D_m = \kappa d_n^k - \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k - (n-2m) a_n^k,$$

$$C_0 = -\kappa l_n^k + \frac{3\nu-2}{\nu-2} \kappa \beta_n^k - (n+1) b_n^k,$$

$$C = \kappa l_n^k - \frac{4\nu-2}{\nu-2} \kappa \beta_n^k + (n-1) b_n^k,$$

$$C_m = -\kappa l_n^k + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \kappa \beta_n^k - (n-2m-1) b_n^k,$$

$$u_{rk}^n = \sum_{n=k+0,2,4\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (-1)^m A_m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2} + \right.$$

$$+ A_0 \frac{1}{(n+2)^2 - \kappa^2} x^{n+1} + A \cdot \frac{1}{2} x^{n-1} \zeta^2 \left\} \cos \kappa \Theta + \right.$$

$$+ \sum_{n=k+1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (-1)^m B_m \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} x^{n-2m-2} \zeta^{2m+2} + \right.$$

$$+ B_0 \frac{1}{(n+1)^2 - \kappa^2} x^n + B \cdot \frac{1}{2} x^{n-2} \zeta^2 \left\} \sin \kappa \Theta,$$

де

$$A_0 = -(n+2) d_n^k + \frac{(3\nu-2)(n+2)}{\nu-2} \alpha_n^k + \kappa a_n^k,$$

$$A = n d_n^k - \frac{4\nu-2}{\nu-2} n \alpha_n^k - \kappa a_n^k,$$

$$A_m = -(n-2m) d_n^k + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} (n-2m) \alpha_n^k + \kappa a_n^k,$$

$$B_0 = -(n+1) l_n^k + \frac{(3\nu-2)(n+1)}{\nu-2} \beta_n^k - \kappa b_n^k,$$

$$B = (n-1) l_n^k - \frac{(4\nu-2)(n-1)}{\nu-2} \beta_n^k - \kappa b_n^k,$$

$$B_m = -(n-2m-1) l_n^k + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} (n-2m-1) \beta_n^k - \kappa b_n^k$$

$$\begin{aligned} \theta_k^n = & \sum_{n=k+0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n^k \left[(-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m} \zeta^{2m} + \right. \right. \\ & \left. \left. + x^n \right] \right\} \cos \kappa \theta + \\ & + \sum_{n=k+1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \beta_n^k \left[(-1)^m \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m} + \right. \right. \\ & \left. \left. + x^{n-1} \right] \right\} \sin \kappa \theta, \end{aligned}$$

для будь-якого цілого індексу κ .

Для задачі, симетричної відносно осі, маємо:

$$\begin{aligned} u_z^n = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\nu}{\nu-2} \theta_n \left[(-1)^m (m+1) \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+1)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + x^{n+1} \zeta \right] + u_n \left[(-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+1)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} + x^{n+1} \zeta \right] \right\}, \\ u_r^n = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \theta_n \left[\frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \frac{1}{n+3} x^{n+2} - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \cdot \frac{n+1}{2} x^n \zeta^2 + \right. \right. \\ & + (-1)^{m+1} \frac{(m+3)}{\nu-2} \cdot \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2 (n-2m+1)}{(2m+2)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \left. \right] + \\ & + u_n \left[-\frac{1}{n+3} x^{n+2} + \frac{n+1}{2} x^n \zeta^2 + \right. \\ & \left. + (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2 (n-2m+1)}{(2m+2)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \right] \right\}, \\ \theta^n = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_n \left\{ x^{n+1} + (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m} \right\}. \end{aligned}$$

Через ν ми позначили число Пуассона.

Нехай тепер виконується умова В. В цьому випадку для компонент зміщення одержимо такі вирази:

$$\begin{aligned} u_z^n = & \sum_{n=k+0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{d}_0 \frac{1}{(n+2)^2 - \kappa^2} x^{n+2} + \bar{d} x^n \zeta^2 + \right. \\ & \left. + (-1)^m \bar{d}_m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \right\} \cos \kappa \theta + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=k+1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{l}_0 \frac{1}{(n+1)^2 - \kappa^2} x^{n+1} + \bar{l} x^{n-1} \zeta^2 + \right. \\ \left. + (-1)^m \bar{l}_m^k \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2} \right\} \sin \kappa \Theta.$$

$$\bar{d}_0 = \frac{\nu}{\nu-2} \bar{\beta}_n^k - \bar{d}_n^k, \quad \bar{l}_0 = \frac{\nu}{\nu-2} \bar{\alpha}_n^k - \bar{l}_n^k,$$

$$\bar{d} = -\frac{\nu}{\nu-2} \bar{\beta}_n^k + \frac{1}{2} \bar{d}_n^k, \quad \bar{l} = -\frac{\nu}{\nu-2} \bar{\alpha}_n^k + \frac{1}{2} \bar{l}_n^k,$$

$$\bar{d}_m = -\frac{(m+2)\nu}{\nu-2} \bar{\beta}_n^k + \bar{d}_n^k, \quad \bar{l}_m = -\frac{(m+2)\nu}{\nu-2} \bar{\alpha}_n^k + \bar{l}_n^k.$$

$$xu_{\Theta}^n = \sum_{n=k+0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{D}_0 \frac{1}{(n+2)^2 - \kappa^2} x^{n+2} \zeta + D \frac{1}{6} x^n \zeta^3 + \right. \\ \left. + (-1)^m \bar{D}_m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+3)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+3} \right\} \sin \kappa \Theta + \\ + \sum_{n=k+1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{C}_0 \frac{1}{(n+1)^2 - \kappa^2} x^{n+1} \zeta + \bar{C} \frac{1}{6} x^{n-1} \zeta^3 + \right. \\ \left. + (-1)^m \bar{C}_m \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m+3)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m+3} \right\} \cos \kappa \Theta,$$

де

$$\bar{D}_0 = \kappa \bar{d}_n^k - (n+2) \bar{b}_n^k - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \kappa \bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{D} = -\kappa \bar{d}_n^k + n \bar{b}_n^k + \frac{4\nu-2}{\nu-2} \kappa \bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{D}_m = -\kappa \bar{d}_n^k + (n-2m) \bar{b}_n^k + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \kappa \bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{C}_0 = -\kappa \bar{l}_n^k - (n+1) \bar{a}_n^k + \frac{3\nu-2}{\nu-2} \kappa \bar{\alpha}_n^k,$$

$$\bar{C} = \kappa \bar{l}_n^k + (n-1) \bar{a}_n^k - \frac{4\nu-2}{\nu-2} \kappa \bar{\alpha}_n^k,$$

$$\bar{C}_m = \kappa \bar{l}_n^k + (n-2m-1) \bar{a}_n^k - \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \kappa \bar{\alpha}_n^k.$$

$$u_r^n = \sum_{n=k+0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{A}_0 \frac{n+2}{(n+2)^2 - \kappa^2} x^{n+1} \zeta + \bar{A} \frac{n}{6} x^{n-1} \zeta^3 + \right. \\ \left. + \bar{A}_m (-1)^{m+1} (n-2m) \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+3)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m+3} \right\} \cos \kappa \Theta +$$

$$+ \sum_{n=k+1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{B}_0 \frac{n+1}{(n+1)^2 - \kappa^2} x^n \zeta + \bar{B} \frac{n-1}{6} x^{n-2} \zeta^3 + \right. \\ \left. + (-1)^{m+1} \bar{B}_m (n-2m-1) \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m+3)!} x^{n-2m-2} \zeta^{2m+3} \right\} \sin \kappa \theta,$$

де

$$\bar{A}_0 = -\bar{d}_n^k + \frac{\kappa}{n+2} \bar{b}_n^k + \frac{3\nu-2}{\nu-2} \bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{A} = \bar{d}_n^k - \frac{n}{\kappa} \bar{b}_n^k - \frac{4\nu-2}{\nu-2} \bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{A}_m = -\bar{d}_n^k + \frac{n-2m}{\kappa} \bar{b}_n^k + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{B}_0 = -\bar{l}_n^k - \frac{\kappa}{n+1} \bar{a}_n^k + \frac{3\nu-2}{\nu-2} \bar{\alpha}_n^k,$$

$$\bar{B} = \bar{l}_n^k + \frac{n-1}{\kappa} \bar{a}_n^k - \frac{4\nu-2}{\nu-2} \bar{\alpha}_n^k,$$

$$\bar{B}_m = -\bar{l}_n^k + \frac{2m-n+1}{\kappa} \bar{a}_n^k + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \bar{\alpha}_n^k.$$

$$\Theta_k^n = \sum_{n=k+0,2,4\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\beta}_n^k \left[(-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+1)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + x^n \zeta \right] \right\} \cos \kappa \theta + \\ + \sum_{n=k+1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\alpha}_n^k \left[(-1)^m \frac{[(n-1)^2 - \kappa^2] \dots [(n-2m+1)^2 - \kappa^2]}{(2m+1)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + x^{n-1} \zeta \right] \right\} \sin \kappa \theta,$$

для будь-якого цілого індексу κ .

Для задачі, симетричної відносно осі, одержуємо:

$$u_z^n = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\nu}{\nu-2} \bar{\theta}_n \left[\frac{1}{(n+3)^2} x^{n+3} - x^{n+1} \zeta^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{m+1} (m+2) \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+2)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+2} \right] + \right. \\ \left. + \bar{u}_n \left[\frac{1}{(n+3)^2} x^{n+3} - \frac{1}{2} x^{n+1} \zeta^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{m+1} \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+2)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+2} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
 u_r^n = & \sum_{n=k+0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\theta}_n \left[\frac{3\nu-2}{\nu-2} \cdot \frac{1}{n+3} x^{n+2} \zeta - \frac{2\nu-1}{\nu-2} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot x^n \zeta^3 + \right. \right. \\
 & + (-1)^{m+1} \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \cdot (n-2m+1) \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+3)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+3} \Big] + \\
 & + \bar{u}_n \left[\frac{1}{n+3} x^{n+2} \zeta - \frac{n+1}{6} x^n \zeta^3 + \right. \\
 & \left. \left. + (-1)^{m+1} \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2 (n-2m+1)}{(2m+3)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+3} \right] \right\}, \\
 \theta^n = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \theta_n^k \left\{ x^{n+1} \zeta + (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+1)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} \right\}.
 \end{aligned}$$

II. Щоб задовольнити граничним умовам на бокових поверхнях циліндра та на його торцях, візьмемо компоненти зміщення у виді:

$$u_r = u_r^p + u_r^n, \quad u_z = u_z^p + u_z^n, \quad u_\theta = u_\theta^p + u_\theta^n.$$

Використавши відомі співвідношення, які зв'язують компоненти зміщення і напруження, одержимо, очевидно, що в цьому разі і компоненти напруження будуть мати аналогічний вид:

$$\widehat{rr} = \widehat{rr}^p + \widehat{rr}^n, \quad \widehat{rz} = \widehat{rz}^p + \widehat{rz}^n, \quad \widehat{zz} = \widehat{zz}^p + \widehat{zz}^n \text{ і т. д.}$$

Постійних інтегрування, які входять у вирази компонент зміщення з значком p , достатньо, щоб задовольнити умовам на бокових поверхнях циліндра, як це виходить з роботи [3].

Постійні інтегрування, які входять у вирази компонент зміщення з значком n , можуть бути використані, щоб задовольнити (наближено) умовам на торцях циліндра.

§ 3. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУНКЦІЙ $\varphi(\eta)$ І $\psi(\eta)$

Для визначення коефіцієнтів функцій $\varphi(\eta)$ і $\psi(\eta)$ будемо виходити з рівностей (2).

§ 4. ПРИКЛАДИ

1. Розтяг пластинки, в яку впаяний короткий круговий циліндр, у двох взаємно перпендикулярних напрямках рівномірно розподіленими на безмежності зусиллями

$$X_x^{(\infty)} = P, \quad Y_y^{(\infty)} = Q.$$

Коефіцієнти функцій $\varphi(\eta)$ і $\psi(\eta)$ дорівнюють:

$$b_1 = \frac{0,270\pi - 0,391 l}{\pi + 0,782 l} (P + Q),$$

$$a_1 = \frac{\pi^2 + 1,36 \pi l - 1,82 l^2}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} (Q - P),$$

$$b_3 = \frac{\pi^2 + 0,895 \pi l - 1,82 l^2}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} (Q - P).$$

Напружений стан пластинки визначається формулами:

$$\begin{aligned} \widehat{rr}_0 &= \left(0,5 + \frac{0,270 \pi - 0,391 l}{\pi + 0,782 l} \right) (P + Q) - \left[\frac{4(\pi^2 + 1,36 \pi l - 1,82 l^2)}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(\pi^2 + 0,895 \pi l - 1,82 l^2)}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^4} + 0,5 \right] (Q - P) \cos 2\theta; \\ \widehat{r\theta}_0 &= \left[0,5 - \frac{2(\pi^2 + 1,36 \pi l - 1,82 l^2)}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(\pi^2 + 0,895 \pi l - 1,82 l^2)}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^4} \right] (Q - P) \sin 2\theta; \\ \frac{2\mu_0}{R_e} u_r &= \left(\frac{\chi^* - 1}{4} \rho - \frac{0,270 \pi - 0,391 l}{\pi + 0,782 l} \right) (P + Q) + \\ &\quad + \left[(\chi^* + 1) \frac{\pi^2 + 1,36 \pi l - 1,82 l^2}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho} - 0,5 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi^2 + 0,895 \pi l - 1,82 l^2}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^3} \right] (Q - P) \cos 2\theta; \\ \frac{2\mu_0}{R_e} u_\theta &= \left[0,5 + (1 - \chi^*) \frac{\pi^2 + 1,38 \pi l - 1,82 l^2}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi^2 + 0,895 \pi l - 1,82 l^2}{4,16 \pi^2 + 12,1 \pi l + 3,64 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^3} \right] (Q - P) \sin 2\theta, \end{aligned}$$

де

$$l = \frac{\mu_0}{\mu}.$$

2. Розтяг пластинки, в яку впаяний короткий порожнистий круговий циліндр, у двох взаємно перпендикулярних напрямках рівномірно розподіленими на безмежності зусиллями

$$X_{\theta'}^{(\infty)} = P, \quad Y_y^{(\infty)} = Q.$$

На випадок цієї задачі одержуємо:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{0,270 \pi - 0,569 l}{\pi + 1,138 l} (P + Q); \\ a_1 &= \frac{\pi^2 + 2,31 \pi l - 7,21 l^2}{4,16 \pi^2 + 10,8 \pi l + 14,42 l^2} (Q - P); \\ b_3 &= \frac{\pi^2 + 1,85 \pi l - 7,21 l^2}{4,16 \pi^2 + 10,8 \pi l + 14,42 l^2} (Q - P); \\ \widehat{rr}_0 &= \left(0,5 + \frac{0,270 \pi - 0,569 l}{\pi + 1,138 l} \right) (P + Q) - \left[\frac{4(\pi^2 + 2,31 \pi l - 7,21 l^2)}{4,16 \pi^2 + 10,8 \pi l + 14,42 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(\pi^2 + 1,85 \pi l - 7,21 l^2)}{4,16 \pi^2 + 10,8 \pi l + 14,42 l^2} \cdot \frac{1}{\rho^4} + 0,5 \right] (Q - P) \sin 2\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{r_{\theta_0}} &= \left[0,5 - \frac{2(\pi^2 + 2,31\pi l - 7,21l^2)}{4,16\pi^2 + 10,8\pi l + 14,42l^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(\pi^2 + 1,85\pi l - 7,21l^2)}{4,16\pi^2 + 10,8\pi l + 14,42l^2} \cdot \frac{1}{\rho^4} \right] (Q - P) \cos 2\theta; \\
\frac{2\mu_0}{R_e} u_{r_0} &= \left(\frac{\chi^* - 1}{4} \rho - \frac{0,270\pi - 0,569l}{\pi + 1,138l} \cdot \frac{1}{\rho} \right) (P + Q) - \\
&\quad - \left[0,5 - (\chi^* + 1) \frac{\pi^2 + 2,31\pi l - 7,21l^2}{4,16\pi^2 + 10,8\pi l + 14,42l^2} \cdot \frac{1}{\rho} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi^2 + 1,85\pi l - 7,21l^2}{4,16\pi^2 + 10,8\pi l + 14,42l^2} \cdot \frac{1}{\rho^3} \right] (Q - P) \cos 2\theta; \\
\frac{2\mu_0}{R_e} u_{\theta_0} &= \left[0,5 + (1 - \chi^*) \frac{\pi^2 + 2,31\pi l - 7,21l^2}{4,16\pi^2 + 10,8\pi l + 14,42l^2} \cdot \frac{1}{\rho} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi^2 + 1,85\pi l - 7,21l^2}{4,16\pi^2 + 10,8\pi l + 14,42l^2} \cdot \frac{1}{\rho^3} \right] (Q - P) \sin 2\theta.
\end{aligned}$$

Щоб знайти числове значення a_1 , b_1 , b_3 , нами покладено

$$b = \frac{h}{R_e} = 0,1, \quad l = \frac{L}{R_e} = 0,1\pi, \quad \nu = 4, \quad \chi^* = 2,08.$$

Умови на торцях циліндра задовольняються з точністю до 5% від навантаження, прикладеного на бокових поверхнях циліндра.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., 1951.
2. Шереметьев М. П. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сб. т. XIV. изд. АН СССР.
3. Ліхачов В. О. Деформація пружної безмежної пластинки з впаєм циліндром. Львів, 1959.

В. Г. КОМИНАР

РЯД ФУР'Є НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

В роботі [1] остаточно член ряду Фур'є функції обмеженої варіації подається в формі

$$L_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/n} D_n^1(t) df(t+x),$$

де

$$D_n^1(t) = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin \kappa t}{\kappa}.$$

Треба оцінити верхню границю $|L_n(f, x)|$ по всіх функціях класу V_{ω} , де V_{ω} є множина всіх функцій з варіацією V і модулем неперервності $\omega(\delta)$

$$\omega(\delta) = \max_{|x' - x''| < \delta} |f(x+x') - f(x+x'')|$$

Легко бачити, що $\sup_{f \in V_{\omega}} |L_n(f, x)|$ не залежить від x і тому можна обмежитись оцінкою $L_n(f, 0)$.

Внаслідок того, що $D_n(-t) = -D_n(t)$

$$L_n(f, 0) = L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n^1(t) [df(t) + df(-t)].$$

Л е м а I. Має місце рівність

$$D_n^1(t) = \text{si}(nt) + O_1(1/n), \quad (0 < t < \pi)$$

де

$$\text{si}(t) = - \int_t^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$|O_1(1/n)| < \frac{1}{n} (1/2 + 2/\pi) < \frac{0,82}{n}.$$

Доведення її можна знайти в [1] з тим уточненням, що за теоремою про середнє значення

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \int_0^t \sin nt \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} t/2} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^t \varphi(t) \sin nt dt = \\
 &= \varphi(0) \int_0^\xi \sin nt dt + \varphi(t) \int_\xi^t \sin nt dt = -\varphi(t) \frac{\cos nt - \cos n\xi}{n}.
 \end{aligned}$$

Оскільки $\varphi(t)$ монотонно спадна функція і

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0, \quad \varphi(\pi) = -1/\pi.$$

Тоді

$$|I(t)| < \frac{2}{\pi n}.$$

З допомогою цієї леми L_n запишеться як

$$L_n = 1/\pi \int_0^\pi \operatorname{si}(nt) [df(t) + df(-t)] + O_2(1/n),$$

де

$$|O_2(1/n)| < \frac{1}{\pi} |O_1(1/n)| \cdot V[-\pi, \pi].$$

Візьмемо цей інтеграл по частинах. Маючи на увазі, що $|\operatorname{si}(n\pi)| < \frac{1}{n}$ $|f(t)| < M$, одержуємо:

$$L_n(f, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} f_1(t) dt + O_3(1/n),$$

де

$$f_1(t) = f(t) + f(-t),$$

$$O_3(1/n) = O_2(1/n) + \frac{2M}{\pi n}.$$

Розбивши інтеграл на n частин і застосувавши перетворення Абе-
ля, одержимо

$$\begin{aligned}
 L_n &= \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \alpha_0(z) \sin nz f_1(z) dz - \\
 &- \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \alpha_n(z) \sin nz f_1\left(z + \frac{n-1}{n}\pi\right) dz + \\
 &+ \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \sum_{\kappa=1}^{n-1} \alpha_\kappa(z) \left[f_1\left(z + \frac{\kappa\pi}{n}\right) - f_1\left(z + \frac{\kappa-1}{n}\pi\right) \right] \sin nz dz + O_3(1/n),
 \end{aligned}$$

де

$$\alpha_k(z) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j}{nz + j\pi}.$$

Додатково вчислимо інтеграл

$$R_k = \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \alpha_k \sin nz \, dz, \quad \kappa=0, \dots, n.$$

Зробивши заміну змінних $z = t - \frac{\kappa\pi}{n}$, маємо

$$R_k = \frac{n}{\pi} \int_{\frac{\kappa\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \sin nt \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{nt + (j-\kappa)\pi} \, dt = \frac{n}{\pi^2} \int_{\frac{\kappa\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \sin nt \beta\left(\frac{nt}{\pi}\right) \, dt,$$

де

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{t + \kappa}.$$

Ще раз робимо заміну змінних $t = \frac{\pi z}{n} + \frac{\kappa\pi}{n}$.

$$R_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-1)^k \sin \pi z \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-(z+k)t}}{1+e^{-t}} \, dt \right) dz,$$

оскільки з [2] 6, 392 (1), 6, 391 (2)

$$\beta(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt}}{1+e^{-t}} \, dt,$$

$$R_k = \int_0^{\infty} \frac{t^{-k}}{1+t^{-t}} \left(\int_0^1 \sin \pi z e^{-zt} \, dz \right) dt.$$

Внутрішній інтеграл береться по частинах

$$I = \int_0^1 e^{-zt} \sin \pi z \, dz = \frac{\pi(e^z + 1)}{\pi^2 + t^2}.$$

Якщо $\kappa > 0$, то з [2] 3. 223 [1].

$$R_k = -\frac{\text{si}(\kappa\pi)}{\pi}.$$

Для $\kappa=0$

$$R_0 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\pi^2 + t^2} = 1/2.$$

Елементарні обчислення показують, що

$$|\text{si}(\kappa\pi)| < \frac{2}{\pi\kappa^2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\kappa+1}{\kappa}.$$

Введемо позначення:

$$\omega_k(\pi/n) = \max_{0 < z < \pi/n} \left| f_1\left(z + \frac{\kappa\pi}{n}\right) - f_1\left(z + \frac{\kappa-1}{n}\pi\right) \right|$$

$$\omega_0(\pi/n) = \max_{0 < z < \pi/2} |f_1(z) - 2f(0)|.$$

Будемо вважати, що $f(0)=0$ (це не має істотного значення). Оцінюючи L_n по модулю і $\left| f_1\left(z + \frac{\kappa\pi}{n}\right) - f_1\left(z + \frac{\kappa-1}{n}\pi\right) \right|$ замінивши $\omega_k(\pi/n)$, одержуємо інтеграли $|R_k|$. Позначивши

$$O_4(1/n) = O_3(1/n) + \frac{2M}{n}.$$

$$|L_n| \leq O_4(1/n) + \frac{1}{2} \omega_0(\pi/n) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k(\pi/n) |\operatorname{si}(\kappa\pi)|.$$

Якщо вважати, що $\omega_k(\pi/n) = 2\omega(\pi/n)$ є функція обмеженої варіації, то одержуємо функцію, яка задовольняє умові Ліпшиця. Таким чином, треба підібрати $\omega_k(\pi/n)$ так, щоб сума $\frac{1}{2} \omega_0 + 1/n \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k |\operatorname{si}(\kappa\pi)|$ досягала по можливості найбільшого значення при умові, що

$$\omega_k < 2\omega(\pi/n);$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \leq V[-\pi, \pi],$$

$\alpha_k = |\operatorname{si}(\kappa\pi)|$ монотонно спадає.

Легко бачити, що при цих умовах (спираючись на [3, стор. 203]) найбільшого значення сума досягає при

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{N-1} = 2\omega(\pi/n),$$

де

$$N = \left[\frac{V[-\pi, \pi]}{\omega(\pi/n)} \right],$$

$$|\omega_N| < 2\omega(\pi/n); \quad \omega_{N+1} = \dots = \omega_{n-1} = 0.$$

Отже, маємо

$$|L_n| < O_4(\pi/n) + 3\omega(\pi/n) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \omega(\pi/n) + \frac{2}{\pi^2} \omega(\pi/n) \sum_{k=1}^{N-1} \ln \frac{\kappa+1}{\kappa};$$

$$|L_n| < O_4(1/4) + 5\omega(\pi/n) + \frac{2}{\pi^2} \omega(\pi/n) \ln N,$$

де

$$|O_4(1/n)| \leq \frac{4M}{n} + \frac{V[-\pi, \pi] \cdot 0.83}{n},$$

$$N = \left[\frac{V[-\pi, \pi]}{\omega(\pi/n)} \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Изв. АН СССР, т. 13, № 6, 1949 г.
 2. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Госиздательство техникотеоретической литературы, М., 1951.
 3. Зыгмунд А. Тригонометрические ряды. Гонти, 1939,
-

В. О. ЛІХАЧОВ

ДО ПИТАННЯ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН КОРОТКОГО ЦИЛІНДРА

Розглянемо задачу про напружений стан короткого циліндра, навантаженого по його внутрішній та зовнішній поверхнях таким способом, як, наприклад, в роботі [1].

Будемо користуватися безрозмірними циліндричними координатами з початком координат в центрі циліндра.

За допомогою значка «б» будемо позначати рішення системи рівнянь Ламе в функціях Бесселя і Макдональда. Ці рішення, наприклад, можуть бути одержані з виразів (2.15) — (2.19) роботи [1]. За допомогою значка «р» — рішення системи Ламе в вигляді ряду по додатнім степеням змінної x ($x = \frac{r}{R_e}$, де R_e — зовнішній радіус циліндра), за допомогою значка «n» — рішення системи Ламе в вигляді ряду з від'ємними степенями змінної x , за допомогою значка «l» — рішення системи Ламе в вигляді ряду з логарифмічними членами відносно x .

Рішення системи Ламе в функціях Бесселя і Макдональда дають можливість задовольнити граничним умовам на бокових поверхнях циліндра. Інші рішення системи Ламе можуть бути використані для задоволення граничних умов на торцях циліндра.

Відносно компонент зміщення будемо вважати, що вони задовольняють одному з таких умов.

$${}_bA'' u_z, \frac{\partial u_r}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \text{ рівні нулевим при } \zeta = 0,$$

$${}_bB'' u_r, u_\theta, \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \text{ рівні нулевим при } \zeta = 0.$$

Далі за браком місця наведемо рішення системи рівнянь Ламе на випадок умови A, взявши члени лише при $\sin k\theta$ або при $\cos k\theta$.

§ 1. РІШЕННЯ «р» СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ

$$xu_\theta^p = \sum_{n=k+0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_0^n x^{n+2} + d_k x^k + B_0^n x^n \zeta^2 + (-1)^{m+1} C_m^n x^{n-2m} \zeta^{2m+2}] \sin k\theta,$$

$$u_r^p = \sum_{n=k+0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_1^n x^{n+1} - d_k x^{n-1} + B_1^n x^{n-1} \zeta^2 + (-1)^{m+1} A_m^n x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2}] \cos k\theta,$$

$$u_z^p = \sum_{n=k+0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[d_0 x^n \zeta + (-1)^m d_m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+1)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+1} \right] \cos \kappa \theta,$$

$$\theta^p = \sum_{n=k+0,2,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^k \left[x^n + (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m} \zeta^{2m} \right] \cos \kappa \theta$$

для будь-якого цілого індексу κ , де

$$A_0^n = \frac{1}{(n+2)^2 - \kappa^2} \left[\kappa d_n^k - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k - (n+2) a_n^k \right],$$

$$B_0^n = -\frac{\kappa}{2} d_n^k + \frac{2\nu-1}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k + \frac{n}{2} a_n^k,$$

$$C_m^n = \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} \left[\kappa d_n^k - \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k - (n-2m) a_n^k \right],$$

$$A_1^n = \frac{1}{(n+2)^2 - \kappa^2} \cdot \left[-(n+2) d_n^k + \frac{3\nu-2}{\nu-2} (n+2) \alpha_n^k + \kappa a_n^k \right],$$

$$B_1^n = \frac{n}{2} d_n^k - \frac{2\nu-1}{\nu-2} n \alpha_n^k - \frac{\kappa}{2} a_n^k,$$

$$A_m^n = \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} \left[-(n-2m) d_n^k + \right. \\ \left. + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} (n-2m) \alpha_n^k + \kappa a_n^k \right],$$

$$d_0 = d_n^k - \frac{2\nu}{\nu-2} \alpha_n^k, \quad d_m = d_n^k - \frac{(m+2)\nu}{\nu-2} \alpha_n^k.$$

Через ν позначаємо число Пуассона.

На випадок задачі, симетричної відносно осі, одержуємо:

$$u_r^p = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2} x + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n+3} \left[\frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \alpha_n - \beta_n \right] x^{n+2} + \right. \\ \left. + \frac{n+1}{2} \left[\beta_n - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \alpha_n \right] x^n \zeta^2 + \right. \\ \left. + (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2 (n-2m+1)}{(2m+2)!} \left[\beta_n - \frac{(m+3)\nu-2}{\nu-2} \alpha_n \right] x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \right\},$$

$$u_z^p = \beta_0 \zeta + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\beta_n - \frac{\nu}{\nu-2} \alpha_n \right] x^{n+1} \zeta + \right. \\ \left. + (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+1)!} \left[\beta_n - \frac{(m+1)\nu}{\nu-2} \alpha_n \right] x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} \right\},$$

$$\theta^p = \alpha_0 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n \left[x^{n+1} + (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m} \right].$$

§ 2. РІШЕННЯ «n» СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ

$$\begin{aligned}
xu_{\theta}^n &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[E_0 \frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k}} + G_0 \frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k-2}} + L_0 \frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m-2}} \right] \sin 2\kappa\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left[E_1 \frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k+1}} + G_1 \frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k-1}} + L_1 \frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m-1}} \right] \sin (2\kappa+1)\theta \right\}, \\
u_r^n &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[E_2 \frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k+1}} + G_2 \frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k-1}} + L_2 \frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m-1}} \right] \cos 2\kappa\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left[E_3 \frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k+2}} + G_3 \frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k}} + L_3 \frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m-1}} \right] \cos (2\kappa+1)\theta \right\}, \\
u_z^n &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[E_4 \frac{\zeta^{2k-2n+1}}{x^{2k}} + G_4 \frac{\zeta^{2k-2n-1}}{x^{2k-2}} + L_4 \frac{\zeta^{2k-2n-2m-1}}{x^{2k-2m-2}} \right] \cos 2\kappa\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left[E_5 \frac{\zeta^{2k-2n+1}}{x^{2k+1}} + G_5 \frac{\zeta^{2k-2n-1}}{x^{2k-1}} + L_5 \frac{\zeta^{2k-2n-2m-1}}{x^{2k-2m-1}} \right] \cos (2\kappa+1)\theta \right\}, \\
\theta^n &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^{2k} \left[\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k}} + \frac{(2\kappa-2n) \dots (2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4 \dots 4m(2\kappa-1) \dots (2\kappa-m)} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m}} \right] \cos 2\kappa\theta + \gamma_n^{2k+1} \left[\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k+1}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2\kappa-2n) \dots (2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4 \dots 4m(2\kappa-1) \dots (2\kappa-m)} \cdot \frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m+1}} \right] \cos (2\kappa+1)\theta \right\},
\end{aligned}$$

де $\kappa = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
E_0 &= \frac{2\kappa}{(2\kappa-2n+2)(2\kappa-2n+1)} [-v_n^{2k} + \gamma_n^{2k} - (2\kappa-2n+1)u_n^{2k}], \\
G_0 &= -\frac{2\kappa}{4(2\kappa-1)} \cdot \left[\frac{2}{v-2} \gamma_n^{2k} + \frac{2\kappa-2}{2\kappa} v_n^{2k} + (2\kappa-2n+1)u_n^{2k} \right], \\
L_0 &= -\frac{(2\kappa-2n) \dots (2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4 \dots 4(m+1)(2\kappa-1) \dots (2\kappa-m-1)} \times \\
&\quad \times \left[2\kappa \frac{mv+2}{v-2} \gamma_n^{2k} + (2\kappa-2m-2)v_n^{2k} + 2\kappa(2\kappa-2n+1)u_n^{2k} \right], \\
E_1 &= \frac{2\kappa+1}{(2\kappa-2n+2)(2\kappa-2n+1)} \cdot \left[\gamma_n^{2k+1} - v_n^{2k+1} - (2\kappa-2n+1)u_n^{2k+1} \right], \\
G_1 &= -\frac{2\kappa+1}{8\kappa} \cdot \left[\frac{2}{v-2} \gamma_n^{2k+1} + \frac{2\kappa-1}{2\kappa+1} v_n^{2k+1} + (2\kappa-2n+1)u_n^{2k+1} \right], \\
L_1 &= -\frac{(2\kappa-2n) \dots (2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa'-2n-2m+1)}{4 \dots 4(m+1)2\kappa \dots (2\kappa-m)} \left[(2\kappa+1) \frac{mv+2}{v-2} \gamma_n^{2k+1} + \right. \\
&\quad \left. + (2\kappa-2m-1)v_n^{2k+1} + (2\kappa+1)(2\kappa-2n+1)u_n^{2k+1} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= E_0, \quad G_2 = G_0 \frac{2\kappa-2}{2\kappa} - \frac{v_n^{2k}}{2\kappa}, \\
L_2 &= -\frac{(2\kappa-2n)\dots(2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4\dots 4(m+1)(2\kappa-1)\dots(2\kappa-m-1)} \times \\
&\times \left[\frac{(m+1)(2\kappa-m-1)}{2\kappa m(2\kappa-m)} v_n^{2k} + (2\kappa-2n+2) \left(\frac{m\gamma+2}{\gamma-2} \gamma_n^{2k} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2\kappa-2n-2}{2\kappa} v_n^{2k} + (2\kappa-2n+1) u_n^{2k} \right) \right], \\
E_3 &= E_1, \quad G_3 = G_1 \frac{2\kappa-1}{2\kappa+1} - \frac{v_n^{2k+1}}{2\kappa+1}, \\
L_3 &= -\frac{(2\kappa-2n)\dots(2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4\dots 4(m+1)2\kappa\dots(2\kappa-m)} \times \\
&\times \left[\frac{(m+1)(2\kappa-m)}{(2\kappa+1)m(2\kappa-m+1)} v_n^{2k+1} + (2\kappa-2n+2) \left(\frac{m\gamma+2}{\gamma-2} \gamma_n^{2k+1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2\kappa'-2n-2}{2\kappa+1} v_n^{2k+1} + (2\kappa'-2n+1) u_n^{2k+1} \right) \right], \\
E_4 &= E_5 = u_n^{2k} + \frac{\gamma}{\gamma-2} \cdot \frac{1}{2\kappa-2n+1} \gamma_n^{2k'}, \\
G_4 &= \frac{(2\kappa-2n+1)(2\kappa-2n)}{4(2\kappa-1)} u_n^{2k} + \frac{\gamma}{\gamma-2} \cdot \frac{2\kappa-2n}{2(2\kappa-1)} \gamma_n^{2k}, \\
L_4 &= \frac{(2\kappa-2n+1)\dots(2\kappa-2n-2m+1)(2\kappa-2n-2m)}{4\dots 4(m+1)(2\kappa-1)\dots(2\kappa-m-1)} \times \\
&\times \left[u_n^{2k} + \frac{(m+2)\gamma}{\gamma-2} \cdot \frac{1}{2\kappa-2n+1} \gamma_n^{2k} \right], \\
G_5 &= G_4 \frac{2\kappa-1}{2\kappa}, \\
L_5 &= \frac{(2\kappa-2n+1)\dots(2\kappa-2n-2m+1)(2\kappa-2n-2m)}{4\dots 4(m+1)2\kappa\dots(2\kappa-m)} \times \\
&\times \left[u_n^{2k+1} + \frac{(m+2)\gamma}{\gamma-2} \cdot \frac{1}{2\kappa-2n+1} \gamma_n^{2k+1} \right].
\end{aligned}$$

У випадку, коли $\kappa=1$, маємо:

$$\begin{aligned}
xu_\theta^n &= \left\{ \frac{1}{x} u_1' + \left[\frac{\gamma}{2(\gamma-2)} \gamma_1' - v_1' \right] \frac{\xi^2}{x} \right\} \sin \theta, \\
u_r^n &= \left\{ \frac{1}{x^2} u_1' - v_1' + \left[\frac{\gamma}{2(\gamma-2)} \gamma_1' - v_1' \right] \frac{\xi^2}{x^2} \right\} \cos \theta, \\
u_z^n &= (\gamma_1' + v_1') \frac{\xi}{x} \cos \theta, \\
\theta^n &= \gamma_1' \frac{\xi}{x} \cos \theta.
\end{aligned}$$

§ 3. РІШЕННЯ «1» СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ

$$xu_{\theta}^I = \sum_{n=k+2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ [P_0 x^{n+2} + Q_0 x^n \zeta^2 + R_0 x^{n-2m} \zeta^{2m+2}] \ln x + \\ + P_1 x^{n+2} + Q_1 x^n \zeta^2 + R_1 x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \} \sin \kappa \theta, \\ u_r^I = \sum_{n=k+2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ [P_2 x^{n+1} + Q_2 x^{n-1} \zeta^2 + R_2 x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2}] \ln x + \\ + P_3 x^{n+1} + Q_3 x^{n-1} \zeta^2 - \frac{n}{12} x^{n-3} \zeta^4 + R_3 x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2} + Z_3 x^{n-2m-3} \zeta^{2m+4} \} \cos \kappa \theta,$$

$$u_z^I = \sum_{n=k+2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ [P_4 x^n \zeta + Q_4 x^{n-2m} \zeta^{2m+1}] \ln x + P_5 x^n \zeta + \\ + Q_5 x^{n-2m} \zeta^{2m+1} \} \cos \kappa \theta,$$

$$\theta^I = \sum_{n=k+2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \delta_n^k \left[x^n + (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m} \zeta^{2m} \right] \ln x + \right. \\ \left. + (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m)!} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{p=1}^m \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2 - \kappa^2} \right) x^{n-2m} \zeta^{2m} \right\} \cos \kappa \theta,$$

де

$$P_1 = \left[\frac{2n+4}{((n+2)^2 - \kappa^2)^2} - \frac{2}{(n+2)^2 - \kappa^2} \right] \left[\frac{\nu}{\nu-2} \kappa \delta_n^k - 2\nu_n^k - \mu_n^k \right] - \frac{1}{(n+2)^2 - \kappa^2} \mu_n^k \\ Q_1 = -\frac{1}{2} \mu_n^k + \frac{\nu}{\nu+2} \kappa \delta_n^k - 2\nu_n^k, \\ R_1 = (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} \times \\ \times \left[2 + (m+2) \sum_{p=1}^m \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2 - \kappa^2} \right] \left(\frac{\nu}{\nu-2} \kappa \delta_n^k - 2\nu_n^k \right) - \\ - (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} \cdot \left(1 + \sum_{p=1}^m \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2 - \kappa^2} \right) \mu_n^k, \\ P_3 = \left[-\frac{1}{\kappa} \mu_n^k + \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^k - \frac{2}{\kappa} \nu_n^k \right] \left[\frac{n+3}{(n+2)^2 - \kappa^2} - \frac{(2n+4)(n+2)}{((n+2)^2 - \kappa^2)^2} \right] + \\ + \frac{n+2}{(n+2)^2 - \kappa^2} \left(\frac{\nu}{\nu-2} \kappa \delta_n^k - 2\nu_n^k \right), \\ Q_3 = \frac{1}{2} \beta_n^k - \frac{2\nu-1}{\nu-2} \delta_n^k + \frac{n}{2} \left(\frac{5}{\kappa} \nu_n^k + \frac{1}{\kappa} \mu_n^k - \beta_n^k \right).$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+2)!} \left[\beta_n^k + (n-2m) \left(\frac{5}{\kappa} \nu_n^k + \frac{1}{\kappa} \mu_n^k - \beta_n^k \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \delta_n^k - b_n^k \cdot \sum_{p=1}^m \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2 - \kappa^2} \right], \\
Z_3 &= -(-1)^m \frac{4(\nu-1)(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m)^2 - \kappa^2]}{(2m+4)!} \left[\frac{2n(m+1)}{n^2 - \kappa^2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p=1}^m (2m+1-p) \frac{2n-4p}{(n-2p)^2 - \kappa^2} \right], \\
Q_4 &= (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+1)!} \left[\beta_n^k - \frac{(m+2)\nu}{\nu-2} \delta_n^k \right], \\
P_5 &= \beta_n^k - \frac{2\nu}{\nu-2} \delta_n^k + \frac{5}{\kappa} \nu_n^k + \frac{1}{\kappa} \mu_n^k, \\
Q_5 &= (-1)^m \frac{(n^2 - \kappa^2) \dots [(n-2m+2)^2 - \kappa^2]}{(2m+1)!} \left[\frac{5}{\kappa} \nu_n^k + \frac{1}{\kappa} \mu_n^k - \beta_n^k + \right. \\
&\quad \left. + \beta_n^k \left(1 + \sum_{p=1}^m \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2 - \kappa^2} \right) - \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^k \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(2 + (m+2) \sum_{p=1}^m \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2 - \kappa^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

ї мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
\mu_n^k - \kappa \beta_n^k + (n+4) \nu_n^k + \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \kappa \delta_n^k &= 0, \\
\kappa \nu_n^k - b_n^k + \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} n \delta_n^k &= 0.
\end{aligned}$$

Вирази для $P_0, Q_0, R_0, P_2, Q_2, R_2, P_4$ отримаємо відповідно з виразів для $A_0, B_0, C_m^n, A_1^n, B_1^n, A_m^n, d_0$, якщо в останніх покласти $a_n^k = \delta_n^k, a_n^k = \nu_n^k, d_n^k = \beta_n^k$.

Розглянемо випадок, коли $n=k$.

$$\begin{aligned}
xu_\theta^l &= \sum_{n=k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ [P_6 x^{n+2} + Q_6 x^n \zeta^2] \ln x + P_7 x^n \zeta^2 + Q_7 x^{n-2} \zeta^4 + \\
&\quad + R_7 x^{n-2m-2} \zeta^{2m+4} \} \sin \kappa \theta, \\
u_r^l &= \sum_{n=k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{ [P_8 x^{n+1} + Q_8 x^{n-1} \zeta^2] \ln x + P_9 x^{n+1} + Q_9 x^{n-1} \zeta^2 + \\
&\quad + Z_9 x^{n-3} \zeta^4 + R_9 x^{n-2m-3} \zeta^{2m+4} \} \cos \kappa \theta,
\end{aligned}$$

$$u_z = \sum_{n=k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [P_{10} x^n \zeta \ln x + Q_{10} x^n \zeta + R_{10} x^{n-2} \zeta^3 + \\ + Z_{10} x^{n-2m-2} \zeta^{2m+3}] \cos \kappa \Theta,$$

$$\Theta = \sum_{n=k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_n^k \left[x^n \ln x - n x^{n-2} \zeta^2 - 2n \times \right. \\ \left. \times \frac{4 \dots 4m(n-1) \dots (n-m)}{(2m+2)!} x^{n-2m-2} \zeta^{2m+2} \right] \cos \kappa \Theta,$$

де

$$P_6 = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{\nu}{\nu-2} n \delta_n^n - 2\nu_n^n + \mu_n^n \right), \quad Q_6 = -\frac{1}{2} \mu_n^n, \\ P_7 = -\frac{n+2}{4(n+1)} \left(\frac{\nu}{\nu-2} n \delta_n^n - 2\nu_n^n - \mu_n^n \right), \quad Q_7 = -\frac{2n}{4!} \left(\frac{\nu}{\nu-2} n \delta_n^n - 2\nu_n^n + \mu_n^n \right), \\ R_7 = 2n \frac{4 \dots 4m(n-1) \dots (n-m)}{(2m+4)!} \left[(m+1) \left(2\nu_n^n - \frac{\nu n}{\nu-2} \delta_n^n \right) + \mu_n^n \right], \\ P_8 = \frac{n+2}{4(n+1)} \left[\frac{2}{n} \nu_n^n - \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{1}{n} \mu_n^n \right] - \frac{1}{n} \nu_n^n, \quad Q_8 = \frac{1}{2} \mu_n^n, \\ P_9 = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{2}{n} \nu_n^n - \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \mu_n^n \right), \\ Z_9 = \frac{2n(n-2)}{4!} \left[\frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{2}{n} \nu_n^n - \mu_n^n \right] + \frac{n-1}{3} \nu_n^n, \\ Q_9 = \frac{n(n+2)}{4(n+1)} \left(\frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{2}{n} \nu_n^n + \mu_n^n \right) + \frac{1}{2} \mu_n^n + \nu_n^n, \\ R_9 = 2n(n-2m-2) \frac{4 \dots 4m(n-1) \dots (n-m)}{(2m+4)!} \left[\frac{(m+1)\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{2(m+1)}{n} \nu_n^n - \mu_n^n \right] + \\ + 2 \frac{4 \dots 4(m+1)(n-1) \dots (n-m-1)}{(2m+4)!} \nu_n^n, \quad P_{10} = \beta_n^n, \\ Q_{10} = \frac{1}{n(n+1)} \left[-\nu_n^n + \frac{n+2}{2} \mu_n^n + \frac{n(n+2)}{2} \cdot \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n \right], \\ R_{10} = \frac{n}{3} \left[\frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \beta_n^n \right], \\ Z_{10} = 2n \frac{4 \dots 4m(n-1) \dots (n-m)}{(2m+3)!} \left[\frac{(m+1)\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \beta_n^n \right]$$

і має місце залежність

$$n \nu_n^n + \mu_n^n - n \beta_n^n + \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} n \delta_n^n = 0.$$

На випадок задачі, симетричної відносно осі, одержимо:

$$u_r^I = \left(\frac{\mu_0}{2} - \frac{\nu-1}{\nu-2} \delta_0 \right) \frac{\zeta^2}{x} + (\delta_0 - \mu_0) \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \frac{x}{2} + \frac{\gamma_0}{x} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [(\chi_1 x^{n+2} + \psi_1 x^n \zeta^2 + f_1 x^{n-2m} \zeta^{2m+2}) \ln x + \chi_2 x^{n+2} + \\
& \quad + \psi_2 x^n \zeta^2 + f_2 x^{n-2m} \zeta^{2m+2}], \\
u_z^I &= \mu_0 \zeta \ln x + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [(\chi_3 x^{n+1} \zeta + \psi_3 x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1}) \ln x + \\
& \quad + \chi_4 x^{n+1} \zeta + f_4 x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1}], \\
\Theta^I &= \delta_0 \ln x + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \delta_n \left[x^{n+1} + (-1)^m \times \right. \right. \\
& \quad \times \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m} \left. \right] \ln x + \\
& \quad + \delta_n^k \left[x^{n+1} + (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m)!} \left(\frac{n+3}{n+1} + 2\sigma_{m-1} \right) x^{n-2m+1} \zeta^{2m} \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \chi_2 = \frac{1}{n+3} \left(\frac{2(\nu-1)}{\nu-2} a_n - b_n \right), \quad \psi_1 = \frac{n+1}{2} \left(b_n - \frac{3\nu-2}{\nu-2} a_n \right), \\
\psi_2 &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \psi_1, \quad \chi_3 = b_n - \frac{\nu}{\nu-2} a_n, \quad \chi_4 = \chi_3, \\
f_1 &= (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2 (n-2m+1)}{(2m+2)!} \left(b_n - \frac{(m+3)\nu-2}{\nu-2} a_n \right), \\
f_2 &= \left(\frac{n+3}{n+1} + 2\sigma_{m-1} + \frac{1}{n-2m+1} \right) \cdot f_1, \\
\psi_3 &= (-1)^m \frac{(n+1)^2 \dots (n-2m+3)^2}{(2m+1)!} \left(b_n - \frac{(m+1)\nu}{\nu-2} a_n \right), \\
f_4 &= \left(\frac{n+3}{n+1} + 2\sigma_{m-1} \right) \psi_3, \quad \sigma_0 = 0, \quad \sigma_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n-2k+1}.
\end{aligned}$$

§ 4. ЗАДОВОЛЕННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Візьмемо компоненти зміщення в слідуючому виді:

$$xu_{\Theta} = xu_{\Theta}^{\sigma} + xu_{\Theta}^p + xu_{\Theta}^n + xu_{\Theta}^I,$$

$$u_r = u_r^{\sigma} + u_r^p + u_r^n + u_r^I,$$

$$u_z = u_z^{\sigma} + u_z^p + u_z^n + u_z^I.$$

Використовуючи відомі співвідношення між напруженнями і переміщеннями, одержимо, очевидно, що і компоненти напруження будуть мати аналогічний вид:

$$\sigma_r = \sigma_r^{\sigma} + \sigma_r^p + \sigma_r^n + \sigma_r^I,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sigma_z = \sigma_z^{\sigma} + \sigma_z^p + \sigma_z^n + \sigma_z^I.$$

Задовольнивши граничним умовам на бічних поверхнях циліндра (розклавши попередньо з різних степенів у відповідні ряди), ми використаємо сталі, які входять в рішення системи Ламе, позначене за допомогою значка b . Сталі, які входять в рішення p , n , e , визначаються з систем, які одержимо, задовольнивши умовам на торцях циліндра і умовам, які виникають при розкладі з різних степенів в ряди, щоб задовольнити умовам на бічних поверхнях.

ЛІТЕРАТУРА

Ліхачов В. О. Деформація пружної безмежної пластинки з впаяним циліндром, Львів, 1959.

З М І С Т

	Стор.
К. П. Мальчевська. До біології розмноження промислових риб Заболотівських озер західноукраїнського Полісся	3
Н. І. Сребродольська. До біології великого веретенника	22
Д. Г. Стадницький. Геоморфологічна характеристика долини р. Ломниці в межах Горган	30
А. М. Куземко. Загальний розв'язок рівнянь рівноваги тришарової оболонки у вигляді простих тригонометричних рядів	36
Д. Г. Хлебніков. Розрахунок нескінченно довгої пружної смуги з підкріпленими краями	41
Г. І. Соколов. Розтяг безмежної пластинки, в круговий отвір якої впаяно циліндричну оболонку.	49
З. О. Мельник. Змішана задача для деяких рівнянь гіперболічного типу	56
Л. М. Зорій. Про умови стійкості в цілому для нелінійних систем диференціальних рівнянь	66
С. П. Гавеля. Викривлення поверхень розриву ядер деяких потенціалів	72
М. С. Волошина. Про деякі граничні задачі для еліптичних систем другого порядку	79
В. О. Ліхачов. Деформація пружної безмежної пластинки з впаяним коротким циліндром	87
В. Г. Коминар. Ряд Фур'є неперервної функції обмеженої варіації	96
В. О. Ліхачов. До питання про напружений стан короткого циліндра	101

Редактор Ю. Л. Котляров

Техредактор А. В. Малявко

Коректор С. С. Корпал

Львовский государственный университет
им. Ив. Франко.

**Сборник работ аспирантов
кафедры естественных наук**

БГ 01328. Здано до набору 25/XI 1959 р. Підп'я-
сано до друку 27/VII 1960 р. Формат 70 x 108¹/₁₆.
Паперов. арк. 3,5. Умов. друк. арк. 9,59. Обл.-вид.
арк. 8,14. Тираж 1000. Ціна 4 крб. 70 коп. З 1 січ-
ня 1961 р. ціна 47 коп. Зам. 875.

Друкарня видавництва ЛДУ.
Львів, Університетська, 1.

Ціна 4 крб. 70 коп.
З 1 січня 1961 р. ціна 47 коп.