А. М. КУЗЕМКО

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ТРИШАРОВОЇ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ У ВИГЛЯДІ ПРОСТИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

Напружений стан тришарової пологої оболонки визначається функціями W і Φ, які, як відомо [2], задовольняють рівнянням

$$\frac{D}{2t}\nabla^2\nabla^2 W = \left(1-\frac{D}{G_3 h}\nabla^2\right)\left[\kappa_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\kappa_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{q}{2t}\right], \tag{1}$$

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\Phi = -\kappa_x\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\kappa_y\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{2}$$

і відповідним граничними умовам, де

W — функція прогинів;

Φ — функція напружень;

D — циліндрична жорсткість;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

κ_x, κ_y — головні кривизни серединної поверхні;

t — товщина зовнішнього шару;

h — товщина оболонки;

G_3— жорсткість на зсув заповнювача.

У випадку постійних кривизн і товщини h систему двох диференціальних рівнянь (1) і (2) можна привести до одного розв'язуючого рівняння восьмого порядку відносно функції W;

$$\frac{D}{2t}\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 W-\frac{DE}{G_3h}\left[\kappa_y^2\frac{\partial^6 W}{\partial x^6}+\kappa_x(\kappa_x+2\kappa_y)\frac{\partial^6 W}{\partial x^2\partial y^4}+\right.$$
$$\left.+\kappa_y(\kappa_y+2\kappa_x)\frac{\partial^6 W}{\partial x^4\partial y^2}+\kappa_x^2\frac{\partial^6 W}{\partial y^6}\right]+E\left(\kappa_x^2\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+2\kappa_x\kappa_y\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\right. \tag{3}$$
$$\left.+\kappa_y^2\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right)=\frac{1}{2t}\nabla^2\nabla^2 q-\frac{D}{2tG_3h}\nabla^2\nabla^2\nabla^2 q,$$

або відносно функції Φ:

$$\frac{D}{2t}\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi-\frac{DE}{G_3h}\left[\kappa_y^2\frac{\partial^6\Phi}{\partial x^6}+\kappa_x(\kappa_x+2\kappa_y)\frac{\partial^6\Phi}{\partial y^2\partial y^4}+\kappa_y(\kappa_y+2\kappa_x)\frac{\partial^6\Phi}{\partial x^4\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+\kappa_x^2\frac{\partial^6\Phi}{\partial y^6}\right]+E\left(\kappa_x^2\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+2\kappa_x\kappa_y\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\kappa_y^2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)= \tag{4}$$
$$=-\frac{E}{2t}\left(1-\frac{D}{G_3h}\nabla^2\right)\left(\kappa_x\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}+\kappa_y\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right).$$

В дальшому, не обмежуючи загальності методу розв'язування, приймемо зусилля і моменти, які діють на краях оболонки, а також зовнішнє навантаження симетрично розподіленими відносно координатних осей.

Загальний розв'язок рівняння (3) запишемо так:

$$W = W_0 + W_1,$$

де W_0 — частинний розв'язок рівняння (3), а W_1 — загальний розв'язок однорідного рівняння (5):

$$\frac{D}{2t}\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 W - \frac{DE}{G_3 h}\left[\kappa_y^2\frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + \kappa_x(\kappa_x + 2\kappa_y)\frac{\partial^6 W}{\partial x^2 \partial y^4} + \kappa_y(\kappa_y + 2\kappa_x)\frac{\partial^6 W}{\partial x^4 \partial y^2} + \right.$$

$$\left. + \kappa_x\frac{\partial^6 W}{\partial y^6}\right] + E\left(\kappa_x^2\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2\kappa_x\kappa_y\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \kappa_y^2\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right) = 0. \tag{5}$$

Прийнявши зовнішнє навантаження у вигляді ряду

$$q = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \cos\frac{\kappa\pi x}{a},$$

частинний розв'язок W_0 можна взяти таким:

$$W_0 = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2t}\left(1 + \frac{D}{G_3 h}\mu_\kappa^2\right)a_\kappa}{\frac{D}{2t}\mu_\kappa^4 + \frac{DE}{G_3 h}\kappa_y^2\mu_\kappa^2 + E\kappa_y^2}\cos\frac{\kappa\pi x}{a}. \tag{6}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (5), аналогічно роботі (1), шукаємо в такому вигляді:

$$W_1 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} X_\kappa(x)\cos\mu_\kappa^* y + \sum_{\kappa=1}^{\infty} Y_\kappa(y)\cos\mu_\kappa x, \tag{7}$$

де

$$\mu_\kappa^* = \frac{\kappa\pi}{b}; \quad \mu_\kappa = \frac{\kappa\pi}{a},$$

a, b — розміри прямокутної в плані оболонки.

Підставляючи (7) в (3), одержимо два звичайних диференціальних рівняння восьмого порядку відносно функції $X_\kappa(x) Y_\kappa(y)$. Відповідно характеристичні рівняння запишуться так:

$$s^8 - (4\mu_\kappa^2 + a\kappa_y^2)s^6 + [6\mu_\kappa^4 + a\kappa_y(\kappa_y + 2\kappa_x)\mu_\kappa^2 + b\kappa_y^2]s^4 -$$

$$- [4\mu_\kappa^4 + a\kappa_x(\kappa_x + 2\kappa_y)\mu_\kappa^2 + 2b\kappa_x\kappa_y]\mu_\kappa^2 s^2 + (\mu_\kappa^4 + a\kappa_x^2\mu_\kappa^2 + b\kappa_x^2)\mu_\kappa^4 = 0. \tag{8}$$

$$r^8 - (4\mu_\kappa^2 + a\kappa_x^2)r^6 + [6\mu_\kappa^4 + a\kappa_x(\kappa_x + 2\kappa_y)\mu_\kappa^2 + b\kappa_x^2]r^4 - [4\mu_\kappa^4 +$$

$$+ a\kappa_y(\kappa_y + \kappa_x)\mu_\kappa^2 + 2b\kappa_x\kappa_y]\mu_\kappa^2 r^2 + (\mu_\kappa^4 + a\kappa_y\mu_\kappa^2 + b\kappa_y^2)\mu_\kappa^4 = 0. \tag{9}$$

Із виду рівнянь витікає, що в залежності від пружних постійних їх корені можуть бути дійсними або комплексними. У випадку дійсних різних коренів маємо:

$$X_k(x) = A_k \operatorname{ch} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \beta_k x + C_k \operatorname{ch} \gamma_k x + D_k \operatorname{ch} \delta_k x,$$
$$Y_k(y) = A'_k \operatorname{ch} \alpha'_k y + B'_k \operatorname{ch} \beta'_k y + C'_k \operatorname{ch} \gamma'_k y + D'_k \operatorname{ch} \delta'_k y. \qquad (10)$$

У випадку комплексних коренів

$$X_k(x) = A^*_k \operatorname{ch} \alpha^*_k x \cos \beta^*_k x + B^*_k \operatorname{sh} \alpha^*_k x \sin \beta^*_k x + C^*_k \operatorname{ch} \gamma^*_k x \cos \delta^*_k x + D^*_k \operatorname{sh} \gamma^*_k x \sin \delta^*_k x.$$
$$Y_k(y) = A_k \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \beta_k y + C_k \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y + D_k \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y. \qquad (11)$$

Дослідимо випадок комплексних коренів.

Загальний розв'язок рівняння (3) в даному разі запишеться так:

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \{A^*_k \operatorname{ch} \alpha^*_k x \cos \beta^*_k x + B^*_k \operatorname{sh} \alpha^*_k x \sin \beta^*_k x + C^*_k \operatorname{ch} \gamma^*_k x \cos \delta^*_k x + D^*_k \operatorname{sh} \gamma^*_k x \sin \delta^*_k x\} \cos \mu^*_k y + \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k \operatorname{ch} \alpha_k y \cos \beta_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \delta_k y + C_k \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y + D_k \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y\} \cos \mu_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2t}\left(1 + \frac{D}{G_3 h} \mu_k^2\right) a_k}{\frac{D}{2t} \mu_k^4 + \frac{DE}{G_3 h} \kappa_y^2 \mu_k^2 + E \kappa_y^2} \cos \frac{\kappa \pi x}{a}. \qquad (12)$$

Аналогічно одержимо загальний розв'язок рівняння (4)

$$\Phi = \sum_{k-1}^{\infty} \{A^{*\prime}_k \operatorname{ch} \alpha^*_k x \cos \beta^*_k x + B^{*\prime}_k \operatorname{sh} \alpha^*_k x \sin \beta^*_k x + C^{*\prime}_k \operatorname{ch} \gamma^*_k x \cos \delta^*_k x + D^{*\prime}_k \operatorname{sh} \gamma^*_k x \sin \delta^*_k x\} \cos \mu^*_k y + \sum_{k=1}^{\infty} \{A'_k \operatorname{ch} \alpha_x y \cos \beta_k y + B'_k \operatorname{sh} \alpha_k y \sin \beta_k y + C'_k \operatorname{ch} \gamma_k y \cos \delta_k y + D'_k \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \delta_k y\} \cos \mu_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{E}{2t}\left(1 + \frac{D}{G_3 h} \mu_k^2\right) \kappa_y a_k}{\frac{D}{2t} \mu_k^6 + \frac{DE}{G_3 h} \kappa_y^2 \mu_k^4 + E \kappa_y^2 \mu_k^2} \cos \frac{\kappa \pi x}{a}. \qquad (13)$$

Функції W і Φ не є незалежними.

Із умови тотожнього задоволення рівнянь (1) і (2) одержуємо вісім залежностей між коефіцієнтами даних функцій такого виду:

$$\left.\begin{aligned} a_{\alpha k} A'_k + b_{\alpha k} B'_k &= c_{\alpha k} A_k + d_{\alpha k} B_k \\ a_{\alpha k} B'_k - b_{\alpha k} A'_k &= c_{\alpha k} B_k - d_{\alpha k} A_k \\ a_{\gamma k} C'_k + b_{\gamma k} D'_k &= c_{\gamma k} C_k + d_{\gamma k} D_k \\ a_{\gamma k} D'_k - b_{\gamma k} C'_k &= c_{\gamma k} D_k - d_{\gamma k} C_k \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

де

$$a_{\alpha k}=\mu_k^4-2\mu_k^2(\alpha_k^2-\beta_k^2)+\alpha_k^4-6\alpha_k^2\beta_k^2+\beta_k^4$$

$$b_{\alpha k}=4\alpha_k\beta_k(\alpha_k^2-\beta_k^2-\mu_k^2)$$

$$c_{\alpha k}=-E[\kappa_x(\alpha_k^2-\beta_k^2)-\kappa_y\mu_k^2]$$

$$d_{\alpha k}=-2E\kappa_x\alpha_k\beta_k$$

$$a_{\gamma k}=\mu_k^4-2\mu_k^2(\gamma_k^2-\delta_k^2)+\gamma_k^4-6\gamma_k^2\delta_k^2+\delta_k^4$$

$$b_{\gamma k}=4\gamma_k\delta_k(\gamma_k^2-\delta_k^2-\mu_k^2)$$

$$c_{\gamma k}=-E[\kappa_x(\gamma_k^2-\delta_k^2)-\kappa_y\mu_k^2]$$

$$d_{\gamma k}=-2E\kappa_x\gamma_k\delta_k\,.$$

Таким чином функції W і Φ, дані формулам (14), (15), виражають загальний розв'язок рівнянь (1) і (2). Невідомі коефіцієнти даних функцій визначаються з краєвих умов:

1) для функції W:

$$W=0 \quad \text{при} \quad x=\pm\frac{a}{2} \quad \text{і} \quad y=\pm\frac{b}{2};$$

$$-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)=M_y(x) \quad \text{при} \quad y=\pm\frac{b}{2}; \tag{15}$$

$$-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)=M_x(y) \quad \text{при} \quad x=\pm\frac{a}{2}.$$

2) для функції Φ:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\sigma_x;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=-\tau_{xy} \quad \text{при} \quad x=\pm\frac{a}{2}.$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=-\sigma_y;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x}=-\tau_{yx} \quad \text{при} \quad y=\pm\frac{b}{2}. \tag{16}$$

В залежності від значень правих частин (15), (16) маємо різні випадки краєвих умов.

Розглянемо частинні випадки.

1. Сферична оболонка.

В даному випадку характеристичне рівняння при умові $\sqrt{a^2\kappa^4-4b\kappa^2}>0$ має всі дійсні корені, а при умові $\sqrt{a^2\kappa^4-4b\kappa^2}<0$ — два дійсних різних і чотири комплексні. У випадку дійсних різних коренів розв'язок береться у вигляді (10). У випадку комплексних коренів розв'язок береться у вигляді (11). Між коефіцієнтами функцій W і Φ існують залежності аналогічні (14).

2. Циліндрична оболонка.

В даному випадку характеристичне рівняння (9) приймає вигляд

$$x^4-a'x+b'=0, \tag{17}$$

де

$$x=r^2-\mu_k^2;\ a\kappa_y^2\mu_k^4=a';\ b\kappa_y^2\mu_k^4=b'.$$

Розв'язок рівняння (18), як відомо, приводиться до розв'язування системи

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 2\sqrt{z} + y = 0 \\ x^2 - 2\sqrt{z} + y' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

і рівняння

$$z^3 - \frac{1}{4} b'z - \frac{1}{64} a'^2 = 0, \qquad (19)$$

де

$$y = \frac{1}{2} a - \frac{b}{4\sqrt{z}} + 2z;$$

$$y' = \frac{1}{2} a + \frac{b}{4\sqrt{z}} + 2z.$$

В рівнянні (19) один корінь завжди дійсний, два інших комплексні або дійсні, в залежності від того, виконується чи ні умова

$$\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 > 0.$$

Якщо $\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 > 0$, один корінь дійсний, а два інші комплексні.

Якщо $\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 = 0$, всі три корені дійсні, з них два однакові.

Якщо $\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 < 0$, всі три корені дійсні.

Всі корені в рівнянні (17) дійсні, якщо вони в рівнянні (19) додатні. Якщо виконується умова

$$\frac{a'^4}{128} - \left(\frac{b'}{12}\right)^3 < 0,$$

то рівняння (17) має тільки комплексні корені. Коли ця умова не виконана, то два корені в рівнянні (17) дійсні і два комплексні. Таким чином, в залежності від коренів характеристичного рівняння береться розв'язок у вигляді (10) або (11).

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев, Т. Л. Мартынович. К расчету пологих оболочек прямоугольных в плане двоякой кривизны. Известия АН СССР, ОТН, № 2, 1960.

2. А. С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.

3. Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, т. 4. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

4. Э. И. Григолюк. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем. Известия АН СССР, ОТН, № 1, стр. 77—84, 1956.