Г. І. СОКОЛОВ

РОЗТЯГ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ, В КРУГОВИЙ ОТВІР ЯКОЇ ВПАЯНО ЦИЛІНДРИЧНУ ОБОЛОНКУ

ПОСТАНОВКА ПИТАННЯ

Нехай в круговий отвір радіуса R безмежної пружної пластинки впаяно безмежну кругову циліндричну оболонку того ж радіуса. Вісь оболонки перпендикулярна до площини пластинки. До пластинки на безмежності прикладено двоосьовий розтяг таким чином, що пластинка знаходиться в узагальненому плосконапруженому стані.

В роботі визначається напружений стан конструкції, що подається на рис. 1, де h — товщина оболонки; $2\ H$ — товщина пластинки; E, ν — пружні сталі циліндричної оболонки; μ_1, x_1 — пружні сталі пластинки (в дальшому індекс I писати не будемо, бо еквівалентні пружні сталі оболонки в роботі не використовуються).

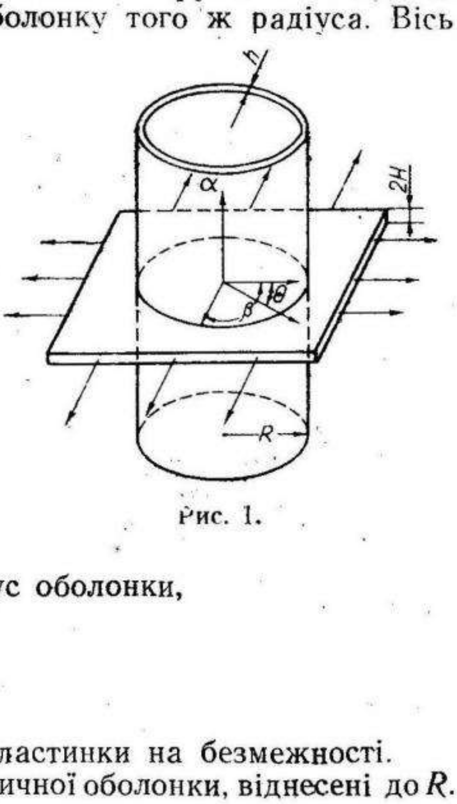

Рис. 1.

R — радіус отвору пластинки і радіус оболонки,

$$c^2 = \frac{h^2}{12\,R^2}.$$

P, Q — навантаження, прикладене до пластинки на безмежності.
α, β — безрозмірні координати циліндричної оболонки, віднесені до R.
r, Θ — полярні координати пластинки.
V_v, V_r — нормальне і дотичне зміщення пластинки.
u, v, w — зміщення оболонки вздовж осей α, β і нормальне до поверхні оболонки.
Q_1, S_1 — перерізуюче і зрушуюче зусилля в перерізі оболонки $\alpha = \text{const}$.
$\Phi(\alpha, \beta)$ — функція напружень, що визначає напруження і зміщення в оболонці [I, стор. 262],
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$ — оператор Лапласа,
$a_2, b_2, b_4, A_{mi}\ (m = 0, 1, 2\ldots; i = 1, 2, 3\ldots.)$ — постійні інтегрування.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(P+Q); \quad \beta_0 = \frac{1}{2}(P-Q)$$

$\widehat{rr}$, $\widehat{rv}$ — нормальне та дотичне напруження пластинки.

Початок координат вибираємо в центрі отвору серединної площини пластинки.

ГРАНИЧНІ УМОВИ

Будемо вважати, що пластинка і оболонка спаяні вздовж лінії $\alpha=0$ (для оболонки) і $r=R$ (для пластинки).

При цьому припущенні граничні умови на контурі спаю будуть такими

$$\begin{aligned} &1)\ V_v|_{r=R} = v|_{\alpha=0} \\ &2)\ V_r|_{r=R} = w|_{\alpha=0} \\ &3)\ H\cdot\widehat{rr}|_{r=R} = -Q_1|_{\alpha=0} \\ &4)\ H\cdot\widehat{rv}|_{r=R} = -S_1|_{\alpha=0} \end{aligned} \qquad (1,1)$$

Перші два рівняння одержані з умови рівності зміщень, а два інших — з напружень оболонки та пластинки на контурі спаю.

В дальшому, виходячи з симетрії, будемо розглядати напружений стан лише однієї половини оболонки ($\alpha \geqslant 0$). Але, «розрізавши» оболонку на дві половини вздовж контура $\alpha = 0$, ми повинні до граничних умов (1,1) приєднати умови, що виражають дію відкинутої частини оболонки:

$$\begin{aligned} &1)\ \left.\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \\ &2)\ \left.\frac{\partial u}{\partial \beta}\right|_{\alpha=0} = 0 \end{aligned} \qquad (1,2)$$

Умови на безмежності для циліндричної оболонки природньо взяти в такому вигляді:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \Phi(\alpha,\beta) = 0 \qquad (1,3)$$

Для пружної пластинки, на підставі робіт [5] і [4], маємо:

$$2\mu V_v = -\left(\frac{\varkappa-1}{r}a_2^* - r\beta_0 + \frac{b_4^*}{3r^3}\right)\sin 2v.$$

$$2\mu V_r = \frac{\varkappa-1}{2}r\alpha_0 + \frac{b_2^*}{r} - \left(\frac{\varkappa+1}{r}a_2^* - r\beta_0 - \frac{b_4^*}{3r^3}\right)\cos 2v. \qquad (1,4)$$

$$\widehat{rv} = \left(\beta_0 - \frac{2a_2^*}{r^2} + \frac{b_4^*}{r^4}\right)\sin 2v$$

$$\widehat{rr} = \alpha_0 - \frac{b_2^*}{r^2} + \left(\beta_0 + \frac{4a_2^*}{r^2} - \frac{b_4^*}{r^4}\right)\cos 2v.$$

Напружений стан кругової циліндричної оболонки, не завантаженої по поверхні, описується таким рівнянням (І, стор. 263):

$$c^2(\Delta\Delta+2\Delta+1)\Delta\Delta\Phi-2c^2(1-\nu)\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}-\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right)\Delta\Phi+(1-\nu^2)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}=0. \quad (2,1)$$

Розв'язок рівняння (2, 1) будемо шукати в такому вигляді (2, стор. 211).

$$\Phi(\alpha,\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(\alpha)\cos m\beta, \qquad (2,2)$$

тому що напружений стан оболонки згідно (1,1) і (1,2) симетричний відносно перерізу $\beta=0$.

Підставивши (2,2) в (2,1) одержуємо:

$$\frac{d^8\varphi_m}{d\alpha^8}-2(2m^2-\nu)\frac{d^6\varphi_m}{d\alpha^6}+\Big[6m^2(m^2-1)+1+$$

$$+\frac{1-\nu^2}{c^2}\Big]\frac{d^4\varphi_m}{d\alpha^4}-2m^2[2m^4-(4-\nu)m^2+1]\frac{d^2\varphi_m}{d\alpha^2}+$$

$$+m^4(m^2-1)^2\varphi_m=0 \qquad (2,3)$$

$$(m=0,1,2\ldots)$$

Характеристичне рівняння для (2,3) має вигляд:

$$\lambda_m^8-2(2m^2-\nu)\lambda_m^6+\Big[6m^2(m^2-1)+1+$$

$$+\frac{1-\nu^2}{c^2}\Big]\lambda_m^4-2m^2[2m^4-(4-\nu)m^2+1]\lambda_m^2+m^4(m^2-1)^2=0 \quad (2,4)$$

$$(m=0,1,2,\ldots).$$

В нашому випадку необхідно буде розв'язати (2, 4) лише при $m=0$ і $m=2$ (див. (1, 4)). При цих умовах параметр C малий порівняно з другими величинами, що входять до (2, 4). Тому, розкладаючи корені характеристичного рівняння в ряд по степенях C, знаходимо

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{m_1}&=-(\alpha_1+i\beta_1); & \lambda_{m_2}&=-(\alpha_1-i\beta_1)\\ \lambda_{m_3}&=-(\alpha_2+i\beta_2); & \lambda_{m_4}&=-(\alpha_2-i\beta_2)\end{aligned}\right\} \qquad (2,5)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{m_5}&=+(\alpha_1+i\beta_1); & \lambda_{m_6}&=+(\alpha_1-i\beta_1)\\ \lambda_{m_7}&=+(\alpha_2+i\beta_2); & \lambda_{m_8}&=+(\alpha_2-i\beta_2)\end{aligned}\right\} \qquad (2,6)$$

Тут введені позначення:

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2c}}\left[1+\frac{2m^2-\nu}{2\sqrt{1-\nu^2}}c+\frac{4m^2(2m^2-3+2\nu)+2-\nu^2}{8(1-\nu^2)}c^2\right]$$

$$\beta_1=\sqrt{\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2c}}\left[1-\frac{2m^2-\nu}{2\sqrt{1-\nu^2}}c+\frac{4m^2(2m^2-3+2\nu)+2-\nu^2}{8(1-\nu^2)}c^2\right]$$

$$\alpha_2=m\sqrt{\frac{(m^2-1)c}{2\sqrt{1-\nu^2}}}\Big[1+\frac{2m^4-(4-\nu)m^2+1}{2(m^2-1)\sqrt{1-\nu^2}}c- \qquad (2,7)$$

$$-\frac{16m^8-4(13-\nu)m^6+(58-8\nu+\nu^2)m^4-2(12-\nu)m^2+3}{8(m^2-1)^2(1-\nu^2)}c^2\Big]$$

$$\beta_2 = m\sqrt{\frac{(m^2-1)c}{2\sqrt{1-\nu^2}}}\left[1 - \frac{2m^4-(4-\nu)m^2+1}{2(m^2-1)\sqrt{1-\nu^2}}c - \right.$$

$$\left. - \frac{16m^8-4(13-\nu)m^6+(58-8\nu+\nu^2)m^4-2(12-\nu)m^2+3}{8(m^2-1)^2(1-\nu^2)}c^2\right].$$

Зберігання членів, в яких міститься C, в степені, вищому ніж другий, не має сенсу [2, стор. 66].

Таким чином ми знайшли

$$\varphi_m(\alpha) = \sum_{i=1}^{8} e^{\alpha\lambda_{mi}} A_{mi}. \tag{2,8}$$

Функція напружень тепер може бути записана в такому вигляді:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{8} e^{\alpha\lambda_{mi}} A_{mi}\cos m\beta. \tag{2,9}$$

Використовуючи граничні умови (1, 1), (1, 2), (1, 3) і формули (1, 4), визначаємо постійні інтегрування a_2^*, b_2^*, b_4^*, A_{mi} $(m = 0, 1, 2...)$.

Врахуємо умову (1,3). Половина коренів характеристичного рівняння (2,6) буде мати додатню дійсну частину. Тому, для того, щоб виконувалася умова (1, 3), відповідні коефіцієнти A_{mi} повинні дорівнювати нулю:

$$A_{m5} = A_{m6} = A_{m7} = A_{m8} = 0. \tag{2,10}$$

З граничних умов (1, 1) одержуємо, що відмінними від нуля будуть лише A_{oi} і A_{2i}, тобто

$$A_{mi} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4, 5, 6...). \tag{2,11}$$

Приймаючи до уваги (2, 10) і (2,11) знаходимо вид функції напружень з врахуванням граничних умов:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{2} A_{oi}\, e^{\alpha\lambda_{oi}} + \sum_{i=1}^{4} A_{2i}\, e^{\alpha\lambda_{2i}}\cos 2\beta. \tag{2,12}$$

Визначивши вид функції напружень, ми можемо записати зміщення і напруги в оболонці

$$u = \sum_{m=0}^{1}\sum_{i=1}^{4} \lambda_{2m,\,i}\{c^2[\lambda_{2m,\,i}^4 - (2m)^4] - (2m)^2 - \nu\lambda_{2m,\,i}^2\} A_{2m,\,i}\, e^{\alpha\lambda_{2m,\,i}}\cos 2m\beta,$$

$$v = -\sum_{m=0}^{1}\sum_{m=1}^{4} 2m\{2c^2\lambda_{2m,\,i}^4 - [2+\nu+2(2m)^2c^2]\lambda_{2m,\,i}^2 +$$

$$+ (2m)^2\} A_{2m,\,i}\, e^{\alpha\lambda_{2m,\,i}}\sin 2m\beta. \tag{2,13}$$

$$w = \sum_{m=0}^{1}\sum_{i=1}^{4} [\lambda_{2m,\,i}^2 - (2m)^2]^2 \cdot A_{2m,\,i}\, e^{\alpha\lambda_{2m,\,i}}\cos 2m\beta.$$

$$S_1 = -\frac{Eh}{(1+\nu)R}\sum_{m=0}^{1}\sum_{i=1}^{4}\lambda_{2m,i}(2m)\{c^2[\lambda_{2m,i}^4-(2m)^4]-$$

$$-(1+\nu)\lambda_{2m,i}^2\}A_{2m,i}e^{\alpha\lambda_{2m,i}}\sin 2m\beta$$

$$Q_1 = \frac{Ehc^2}{(1-\nu)^2R}\sum_{m=0}^{1}\sum_{i=1}^{4}\lambda_{2m,i}\{(1-c^2)\lambda_{2m,i}^6-$$

$$-\left[(2m)^2\left(3-\frac{1-3\nu}{2}c^2\right)-\nu\right]\lambda_{2m,i}^4+$$

$$+(2m)^2[(3-\nu c^2)(2m)^2-\nu(1+\nu)\lambda_{2m,i}^2]-$$

$$-(2m)^4\left[(2m)^2\left(1-\frac{1-\nu}{2}c^2\right)-1\right]\Big\}A_{2m,i}e^{\alpha\lambda_{2m,i}}\cos 2m\beta. \quad (2{,}13\text{a})$$

Приймаючи до уваги (2,5) і той факт, що $A_{m,2k-1}$ і $A_{m,2k}$ ($k=1,2$; $m=0,2$) комплексно спряжені, легко довести [1, стор. 233], що u, v, w, Q_1, S_1 — дійсні.

Запишемо тепер граничні умови (1,1) та (1,2). Одержимо відповідно:

з 1) (1,1) $$-\gamma\left[(\varkappa-1)a_2-\beta_0+\frac{1}{3}b_4\right]=2\sum_{i=1}^{4}[2c^2\lambda_{2i}^4-(2+\nu+8c^2)\lambda_{2i}^2+4$$

з 2) (1,1) $$-\gamma\left[\frac{\varkappa-1}{2}a_0+b_2\right]=\sum_{i=1}^{4}\lambda_{oi}^4A_{oi};$$

$$-\gamma\left[(\varkappa+1)a_2-\beta_0-\frac{1}{3}b_4\right]=\sum_{i=1}^{4}(\lambda_{2,i}^2-4)^2A_{oi}$$

з 3) (1,1) $$-H(a_0-\beta_2)^{i=1}=\frac{Ehc^2}{(1-\nu^2)R}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{oi}^2[(1-c^2)\lambda_{oi}^2+\nu]A_{oi};$$

$$H(\beta_0+4a_2-b_4)=\frac{Ehc^2}{(1-\nu^2)R}\sum_{i=1}^{4}\lambda_{2i}\{(1-c^2)\lambda_{2i}^6-[12-\nu-2\times$$

$$\times(1+3\nu)c^2]\lambda_{2i}^4+4[4(3-\nu c^2)-\nu(1+\nu)]\lambda_{2i}^2-16[3-2(1-\nu)c^2]\}A_{2i}.$$

з 4) (1,1) $$-H(\beta_0-2a_2+b_4)=\frac{2Eh}{(1+\nu)R}\sum_{i=1}^{4}\lambda_{2i}[c^2(\lambda_{2i}^4-16)-$$

$$-(1+\nu)\lambda_{2i}^2]A_{2i}.$$

з 1) (1,2) $$-\sum_{i=1}^{2}\lambda_{oi}^3A_{oi}=0$$

$$\sum_{i=1}^{4}(\lambda_{2i}^2-4)\lambda_{2i}A_{2i}=0 \tag{2,14}$$

$$з\ 2)\ (1,2)-\sum_{i=1}^{4}\lambda_{2i}\left[c^2(\lambda_{2i}^4-16)-4-\nu\lambda_{2i}^2\right]A_{2i}=0,$$

де позначено

$$a_2^*=R^2a_2;\ b_2^*=R^2b_2;\ b_4^*=R^4b_4;\ \gamma=\frac{R}{2\mu}. \tag{2,15}$$

Легко зауважити, що система рівнянь для знаходження постійних інтегрування розбивається на дві відокремлені групи рівнянь: перша — для знаходження A_{01}, A_{02}, b_2, друга — для знаходження a_2, b_4, A_{2i} $(i=1, 2, 3, 4)$.

Корені першої системи визначаються дуже просто:

$$A_{01}=\frac{\lambda_{02}(1+\varkappa)\gamma q}{2\lambda_{01}^4(\lambda_{01}-\lambda_{02})\left[\lambda_{01}\lambda_{02}(\lambda_{01}+\lambda_{02})-q\right]}\alpha_0$$

$$A_{02}=\frac{(1+\varkappa)\gamma q\alpha_0}{2\left[\lambda_{01}\lambda_{02}(\lambda_{01}+\lambda_{02})-q\right]} \tag{2,16}$$

$$b_2=-\frac{(1+\varkappa)\gamma q\alpha_0}{2\left[\lambda_{01}\lambda_{02}(\lambda_{01}+\lambda_{02})-q\right]},$$

де

$$q=\frac{(1-\nu^2)RH}{(1-c^2)c^2\gamma Eh}.$$

Цим результатом уточнюється робота [6].

Випишемо рівняння, які залишилися для визначення a_2, b_4, A_{2i} $(i=1,\ldots 4)$, спочатку привівши їх до найбільш простого вигляду:

$$1)\ \sum_{i=1}^{4}A_{2i}\left\{\frac{16\varkappa\kappa\gamma(1-\nu+16c^2)}{1+\nu}\lambda_{2i}-3\varkappa\left[(1-4c^2)\lambda_{2i}^4-2(6+\nu+8c^2)\lambda_{2i}^2+24\right]+\right.$$
$$\left.+(1-4c^2)\lambda_{2i}^4-2(2-\nu-8c^2)\lambda_{2i}^2+8\right\}=2\gamma(1+\varkappa)\beta_c$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{4}A_{2i}\left\{3\left[(1+4c^2)\lambda_{2i}^4-2(6+\nu+8c^2)\lambda_{2i}^2+24\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\kappa\gamma}{1-\nu^2}\lambda_{2i}\left[c^2(\nu-8c^2-\nu c^2)\lambda_{2i}^6+8(1-\nu)^2+320c^2\right]\right\}=0$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{4}A_{2i}\lambda_{2i}\left[\lambda_{2i}^4+\frac{16(2+\nu+8\nu^2)}{\nu-8c^2}\right]=0 \tag{2,17}$$

$$4)\ \sum_{i=1}^{4}A_{2i}\lambda_{2i}\left[\lambda_{2i}^2+\frac{4(1+8c^2)}{4-8c^2}\right]=0$$

$$5)\ a_2 = \frac{1}{\varkappa}\left\{\beta_0 - \frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{4}[(1-4c^2)\lambda_{2i}^4 - 2(2-\nu-8c^2)\lambda_{2i}^2 + 8]A_{2i}\right\}$$

$$6)\ b_4 = \frac{3}{2\gamma}\sum_{i=1}^{4}[(1+4c^2)\lambda_{2i}^4 - 4(6+\nu+8c^2)\lambda_{2i}^2 + 24]A_{2i} -$$

$$-\frac{3}{2\varkappa\gamma}\sum_{i=1}^{4}[(1-4c^2)\lambda_{2i}^4 - 2(2-\nu-8c^2)\lambda_{2i}^2 + 8]A_{2i} + \frac{3}{\varkappa}\beta_0. \qquad (2,18)$$

Тут введено позначення:

$$\kappa = \frac{Eh}{(\nu - 8c^2)HR}.$$

Таким чином, розв'язання системи (2,14) зводиться до розв'язання чотирьох рівнянь (2, 17). Числове розв'язання (2, 17) не зустрічає труднощів, однак запис коренів в загальному вигляді занадто громіздкий, і ми його не наводимо.

Визначимо лише, що A_{21}, A_{22} одного порядку з c^2A_{23}, c^2A_{24}.

Визначивши постійні інтегрування a_2, b_2, b_4, A_{01}, A_{02}, A_{2i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ і підставляючи їх значення в (2,12) та (1,4) неважко за відомими формулами [1,4] визначити зміщення і напруги в довільній точці циліндричної оболонки і пластинки.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Госиздат, М.—Л., 1949.
2. А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек. Госиздат, М., 1953.
3. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. ОГИЗ, 1948.
4. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. АН СССР, М., 1954.
5. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инженерный сборник, т. XIV, М., 1953.
6. Г. И. Соколов. Осесимметрическая задача о сопряжении цилиндрической оболочки с упругой пластинкой. Бюлетень наукової студентської конференції 1954 р., частина II, Львів, 1955.