З. О. МЕЛЬНИК

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В роботі методом відображень розв'язується змішана задача для гіперболічного рівняння другого порядку в чотирьохвимірному просторі з коефіцієнтами при старших похідних, залежними від просторових координат.

В § 1, використовуючи результати В. Г. Гоголадзе (див. [1]), ми приводимо розв'язок задачі Коші для рівняння (1,6). В § 2 методом відображень розв'язується змішана задача для рівняння (1, 6). Параграфи 3 і 4 присв'ячені змішаній задачі для деяких нелінійних рівнянь і випадку, коли в граничну умову входить нормальна похідна.

§ 1. ЗАДАЧА КОШІ

1. Для повноти розглянемо задачу інтегрування рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = f(x, t) \tag{1,1}$$

при початкових умовах

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{1,2}$$

Тут $L(u) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right)$, $(\alpha, \beta = 1,2,3)$ — оператор еліптичного типу; $g^{\alpha\beta}$, c — задані неперервні разом із своїми похідними функції точки; f — два рази, φ — чотири рази, ψ — три рази неперервно диференційовані.

Згідно методу акад. Соболева, розглядаємо задачу варіаційного числення про мінімум функціоналу

$$\int_{M_0}^{M} \frac{ds}{c(x)},$$

де $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha\, dx^\beta$ — елемент дуги в просторі Рімана, $g_{\alpha\beta}$ є елементи матриці, оберненої до матриці $\|g^{\alpha\beta}\|$.

В даному випадку для функції σ (M, M_0), яка узагальнює $\frac{1}{r}$ для випадку $g^{\alpha\beta} = 0$, коли $\alpha \neq \beta$ і $g^{\alpha\beta} = c = 1$ при $\alpha = \beta$ і для основної функції $\tau(M, M_0)$ центрального поля варіаційної задачі одержуються рівняння

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial\tau}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial x^\beta}=\frac{1}{c^2},$$

$$\sigma L(\tau)+2g^{\alpha\beta}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial x^\beta}+2\sigma\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial x^\beta}=0.$$

Використовуючи співвідношення

$$|L(\sigma)|\leqslant\frac{K}{\tau(M, M_0)},$$

$$\lim_{S_1\to M_0}\iint\limits_{S_1} g^{\alpha\beta}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\cos(n, x^\beta)\,dS_1=-4\pi,$$

для розв'язку $u(M,t)$ задачі (1,1) — (1,2) одержується інтегральне рівняння:

$$u(M_0, t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\{\varphi(M)P(\sigma)-\sigma P(\varphi)-\sigma P(\tau)\psi(M)\}\,dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{P}[u(M, t)]\,L(\sigma)\,dv+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{P}\sigma[f]\,dv, \tag{1,3}$$

де

$$P(v)=g^{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\cos(n, x^\beta);$$

$$[u(M, t)]=u(M, t-\tau);$$

P є область $\tau(M, M_0)<t$, S — обмежуюча цю область поверхня, n — зовнішня нормаль до S.

Рівняння (1,3) будемо розв'язувати методом послідовних наближень, взявши за $u^0(M_0,t)$ вираз:

$$u^0(M_0,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\{\varphi(M)P(\sigma)-\sigma P(\varphi)-\sigma P(\tau)\psi(M)\}dS+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{P}\sigma[f]dv. \tag{1,4}$$

Тоді

$$u^j(M_0,t)=u^0(M_0,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{P}[u^{j-1}(M,t)]L(\sigma)\,dv,\ (j=1,2,3,\ldots). \tag{1,5}$$

Так само, як і в [1] показується, що цей процес збігається з єдиною граничною функцією $u(M_0,t)$, яка і являється розв'язком поставленої задачі.

2. Нехай тепер нам потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-L(u)+g^\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}+g(x,t)u=f(x,t) \tag{1,6}$$

з початковими умовами (1,2). Тут g^α і g — два рази неперервно диференційовані функції точки. Будемо розв'язувати цю задачу методом Пікара: розглянемо рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-L(u)+\lambda\left\{g^\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}+g(x,t)u\right\}=f(x,t), \qquad (1,6')$$

де λ — деякий числовий параметр, який в дальшому покладемо рівним одиниці, і будемо шукати ряд

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k(x,t), \qquad (1,7)$$

який формально задовольняє рівняння (1,6) і початкові умови (1,2). Очевидно, досить, щоб цим умовам задовольняла функція $u_0(x,t)$, а всі останні функції $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$,... повинні при $t=0$ перетворюватись в нуль разом із своїми першими похідними по t.

Підставляючи (1,7) в (1,6′) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ, одержимо:

$$\begin{gathered}\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-L(u_0)=f,\\ \frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-L(u_j)=-\left\{g^\alpha\frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha}+gu_{j-1}\right\}\\ (j=1,2,3,\ldots).\end{gathered} \qquad (1,8)$$

Для u_0 маємо формулу (1, 3). Виходячи з цієї формули, для u_j одержимо рівняння:

$$\begin{gathered}u_j(M_0,t)=\frac{1}{4\pi}\iiint_P [u_j(M,t)]L(\sigma)dv-\\ -\frac{1}{4\pi}\iiint_P \sigma\left[g^\alpha(M,t)\frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha}+g(M,t)u_{j-1}\right]dv\\ (j=1,2,3,\ldots).\end{gathered} \qquad (1,9)$$

Це рівняння знову розв'язуємо методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення

$$u_j^0(M_0,t)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_P \sigma\left[g^\alpha(M,t)\frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha}+g(M,t)u_{j-1}\right]dv, \qquad (1,10)$$

$$(j=1,2,3,\ldots).$$

Тоді

$$u_j^k(M_0,t)=u_j^0(M,t)+\frac{1}{4\pi}\iiint_P [u_j^{k-1}(M,t)]L(\sigma)dv. \qquad (1,11)$$

Діючи аналогічно [1], можна показати, що

$$|u_j^k-u_j^{k-1}|\leqslant R\frac{G^{2k+2}t^{2k+2}}{(2k+2)!},$$

де R і G — деякі постійні, що залежать від коефіцієнтів, вільного члена і початкових даних. Це дає можливість показати, що функція

$$u_j(M_0,t)=\lim_{k\to\infty} u_j^k(M_0,t)=u_j^0(M_0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\{u_j^k(M_0,t)-u_j^{k-1}(M_0,t)\}$$

являється розв'язком рівняння (1,8). Будуючи відповідні мажорантні ряди, можна легко показати, що ряд $\sum_{j=0}^{\infty} u_j(M_0,t)$ і ряди, одержані з нього почленним диференціюванням по x^α, рівномірно збігаються для значень t, для яких поверхня $\tau(M, M_0)=t$ повністю лежить в області $D\{\tau(M,M_0)\leqslant T(M)\}$, з кожної точки якої можна побудувати центральне поле, принаймні до еквідістантної поверхні

$$\tau(M,Q)=T-\tau(Q,M_0).$$

Далі показується, що сума ряду $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ являється єдиним розв'язком задачі (1,6) — (1,2).

§ 2. ЗМІШАНА ЗАДАЧА. МЕТОД ВІДОБРАЖЕНЬ

Розв'яжемо задачу знаходження розв'язку рівняння (1,6) в області $x^3>0$ при початкових умовах (1,2), який задовольняє граничну умову

$$u(M_0,t)\,|_{x^3=0}=0; \tag{2,1}$$

будуть припускатись виконаними умови узгодження: $\varphi\,|_{x^3=0}=\psi\,|_{x^3=0}=0$.

Для збереження неперервності даних при відображенні, треба додатково припустити, що $g^{\alpha\beta}(x^1, x^2, 0)=0$, коли $\alpha=3$, $\beta\neq 3$, $\alpha\neq 3$, $\beta=3$; $f(x^1, x^2, 0, t)=0$ і $g^3(x^1, x^2, 0,t)=0$.

Завдання полягає в тому, щоб початкові дані $\varphi(M)$ і $\psi(M)$, коефіцієнти $g^{\alpha\beta}$, g^α, g і вільний член f рівняння продовжити за площину $x^3=0$ так, щоб одержаний для всього простору (x^1, x^2, x^3) розв'язок задачі Коші при $x^3=0$ перетворювався в тотожній нуль. Для цього, очевидно, досить, щоб при $x^3=0$ перетворювались в нуль вирази (1,4), (1,5), (1,10), (1,11). В нашому випадку областю інтегрування у всіх згаданих виразах є або об'єм $\tau(M,M_0)<t$, або обмежуюча його поверхня $\tau(M,M_0)=t$. А це при відповідних умовах симетричності, які в дальшому будуть накладені на величини $g^{\alpha\beta}$, є області, симетричні відносно площини $x^3=0$.

Розглянемо вираз (1,4):

$$u^0(M_0,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\{\varphi(M)P(\sigma)-\sigma P(\varphi)-\sigma P(\tau)\psi(M)\}\,dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P\sigma[f]\,dv=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\Big\{\varphi(M)g^{\alpha\beta}\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\cos(n,x^\beta)-$$

$$-\sigma g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\cos(n,x^\beta)-\sigma g^{\alpha\beta}\frac{\partial\tau}{\partial x^\alpha}\cos(n,x^\beta)\psi(M)\Big\}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P\sigma[f]\,dv.$$

Продовжимо дані задачі слідуючим чином:

$$c(R)-c(R^*)=0$$

$$g^{\alpha\beta}(R)-g^{\alpha\beta}(R^*)=0 \qquad (\alpha,\beta\neq 3 \text{ або } \alpha=\beta=3)$$

$$g^{\alpha\beta}(R)+g^{\alpha\beta}(R^*)=0 \qquad (\alpha=3,\ \beta\neq 3 \text{ або } \alpha\neq 3,\ \beta=3)$$
$$f(R,t)+f(R^*,t)=0$$
$$\varphi(R)+\varphi(R^*)=0$$
$$\psi(R)+\psi(R^*)=0.$$

Тут R і R^* — точки, симетричні відносно площини $x^3=0$. Виходячи із виразів відповідних величин, замічаємо, що тоді

$$\tau(R,M_0)=\tau(R^*,M_0)$$
$$\sigma(R,M_0)=\sigma(R^*,M_0)$$
$$P(\sigma)_R=P(\sigma)_{R^*}$$
$$P(\tau)_R=P(\tau)_{R^*}$$
$$P(\varphi)_R=P(\varphi)_{R^*}.$$

Розбиваючи при $x^3=0$ об'єм P і квазісферу S на дві частини P^+, S^+, коли точка M лежить в півпросторі $x^3>0$ і P^-, S^-, коли точка M лежить в півпросторі $x^3<0$, і враховуючи, що

$$\cos(n,x^\alpha)_R=\frac{\dfrac{\partial\tau}{\partial x^\alpha}}{\sqrt{\operatorname{grad}^2\tau}}\Bigg|_R=\begin{cases}\cos(n,x^\alpha)_{R^*}, & \alpha\neq 3\\ -\cos(n,x^\alpha)_{R^*}, & \alpha=3,\end{cases}$$

одержуємо:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S^+}\{\varphi(M)P(\sigma)-\sigma P(\varphi)-\sigma P(\tau)\psi(M)\}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{P^+}\sigma[f]\,dv=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S^-}\{\varphi(M)P(\sigma)-\sigma P(\varphi)-\sigma P(\tau)\psi(M)\}\,dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{P^-}\sigma[f]\,dv.$$

(Тут запис $P(\sigma)_R$ означає, що значення $P(\sigma)$ береться в точці R). Виходить при нашому законі продовження початкових даних, коефіцієнтів і вільного члена рівняння

$$u^0(M_0,t)\,|_{x^3=0}=0.$$

Очевидно, що

$$u^0(R,t)=-u^0(R^*,t),$$
$$L(\sigma)_R=L(\sigma)_{R^*}.$$

Тоді з (1,5), виходить, що

$$u^j(M_0,t)\,|_{x^3=0}=0,$$
$$u^j(R,t)=u^j(R^*,t), \quad (j=1,2,3,\dots).$$

Із всього сказаного випливає, що

$$u_0(M_0,t)\,|_{x^3=0}=0,$$
$$u_0(R,t)=-u_0(R^*,t).$$

Продовжимо тепер коефіцієнти g^α і g таким чином:

$$g^{\alpha}(R,t)=g^{\alpha}(R^*,t),\quad (\alpha=1,2)$$
$$g^3(R,t)=-g^3(R^*,t)$$
$$g(R,t)=g(R^*,t)$$

Тоді з (1,10) випливає, що

$$u_j^0(M_0,t)\,|_{x^3=0}=0$$
$$u_j^0(R,t)=-u_j^0(R^*,t),\quad (j=1,2,3,\ldots)$$

А значить, і

$$u_j^k(M_0,t)\,|_{x^3=0}=0$$
$$u_j^k(R,t)=-u_j^k(R^*,t),\quad (j,k=1,2,3,\ldots)$$

Отже,

$$u_j(M_0,t)\,|_{x^3=0}=0\quad (j=0,1,2,\ldots)$$

А це означає, що побудований в такий спосіб розв'язок задачі (1,6) — (1,2) задовольняє умові (2,1).

В результаті одержуємо, що функція

$$u(M_0,t)=\sum_{j,k=0}^{\infty}\{u_j^k(M_0,t)-u_j^{k-1}(M_0,t)\},\ (\text{вважаємо, що } u_j^{-1}=0)$$

являється розв'язком поставленої змішаної задачі.

Зауваження. Методом відображень можна розв'язувати змішані задачі для рівняння (1,6) не тільки для півпростору, але і для інших типів областей. Ці області повинні бути обмежені плоскими гранями, причому вони такі, що послідовними відображеннями за грані можна покрити увесь простір без перекрить. Для кожної з цих областей буде свій закон продовження даних задачі. Крім цього, для збереження неперервності даних задачі приходиться припускати рівність нулю на гранях даних областей функцій $g^{\alpha\beta}$ (для деяких α і β), f і g^{α}. Покажемо, наприклад, що треба робити, коли розв'язок задається на гранях клина

$$x^1\geqslant 0,\quad x^2\geqslant 0,\quad 0\leqslant x^3\leqslant l.$$

В цьому випадку припускаємо, що $g^{\alpha\beta}(0,x^2,x^3)=0$, коли $\alpha=1$ $\beta\neq 1$ або $\alpha\neq 1$, $\beta=1$; $g^{\alpha\beta}(x^1,0,x^3)=0$, коли $\alpha=2$, $\beta\neq 2$ або $\alpha\neq 2$, $\beta=2$; $g^{\alpha\beta}(x^1,x^2,0)=g^{\alpha\beta}(x^1,x^2,l)=0$, коли $\alpha=3$, $\beta\neq 3$ або $\alpha\neq 3$, $\beta=3$; $g^1(0,x^2,x^3,t)=g^2(x^1,0,x^3,t)=g^3(x^1,x^2,0,t)=g^3(x^1,x^2,l,t)=0$; $f(0,x^2,x^3,t)=f(x^1,0,x^3,t)=f(x^1,x^2,0,t)=f(x^1,x^2,l,t)=0$.
Будуть також припускатись виконаними умови узгодження для початкових даних на відповідних гранях клина.

Тоді поступаємо таким чином: послідовними відображеннями за грані клина покриваємо увесь півпростір $t\geqslant 0$, $-\infty\leqslant x^{\alpha}\leqslant+\infty$, $(\alpha=1,2,3)$, і дані задачі продовжуємо так (в нас тут R і R^* будуть точки, симетричні відносно тієї із граней клина, за яку продовжуються дані):

$$c(R)-c(R^*)=0$$

$$g^{\alpha\beta}(R)-q^{\alpha\beta}(R^*)=0 \text{ при } \alpha,\ \beta\neq\kappa \text{ або } \alpha=\beta=\kappa, \text{ коли } R \text{ і } R^*$$

симетричні відносно грані $x^k=0$ або $x^k=l$ при $\kappa=3$.

$$g^{\alpha\beta}(R) + g^{\alpha\beta}(R^*) = 0 \text{ при } \alpha \neq \kappa,\ \beta = \kappa \text{ або } \alpha = \kappa,\ \beta \neq \kappa. \quad (\kappa = 1,2,3)$$

$$\varphi(R) + \varphi(R^*) = 0$$

$$\psi(R) + \psi(R^*) = 0$$

$$f(R, t) + f(R^*, t) = 0$$

Тоді формули (2,2) залишаються в силі і так само, як і раніше, одержуємо:

$$u_0(R, t) = -u_0(R^*, t)$$

$$\frac{\partial u_0(R,t)}{\partial x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\partial u_0(R^*, t)}{\partial x^\alpha}, & \text{якщо } R \text{ і } R^* \text{ симетричні відносно грані } x^\alpha = 0 \text{ або } x^3 = l. \\ -\dfrac{\partial u_0(R^*, t)}{\partial x^\alpha}, & \text{якщо } R \text{ і } R^* \text{ симетричні відносно інших граней.} \end{cases}$$

Тоді останні коефіцієнти продовжуємо таким чином:

$g^\alpha(R, t) + g^\alpha(R^*, t) = 0$, якщо R і R^* симетричні відносно грані $x^\alpha = 0$ або $x^3 = l$.

$g^\alpha(R, t) - g^\alpha(R^*, t) = 0$, якщо R і R^* симетричні відносно інших граней.

$g(R, t) - g(R^*, t) = 0$ при продовженні за всі грані.

В цьому випадку $u_1, u_2, \ldots$ на гранях клина перетворюються в нуль, а їхні похідні поводять себе в симетричних точках так само, як і для u_0.

Аналогічно поступаємо і для інших типів областей.

§ 3. ВИПАДОК НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

Знайдемо тепер розв'язок рівняння

$$\frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right) = F\left(x^\alpha, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right), \tag{3,1}$$

який задовольняє умови (1,2), і (2,1).

Тут $F\left(x^\alpha, t, u, \dfrac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right) = F\left(x^1, x^2, x^3, t, u, \dfrac{\partial u}{\partial x^1}, \dfrac{\partial u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial u}{\partial x^3}\right)$ — задана неперервна разом із своїми другими похідними по всіх аргументах функція, яка задовольняє умову

$$F(x^1, x^2, 0, t, 0, 0, 0, v) = 0,$$

де v — довільне число.

Згідно (1,3) розв'язок задачі (3,1) — (1,2) еквівалентний розв'язкові інтегрального рівняння

$$u(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \{\varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M)\} ds +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_P [u(M, t)] L(\sigma) dv + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_P \sigma [F] dv. \tag{3,2}$$

Це інтегральне рівняння розв'язується методом послідовних наближень для значень t, вказаних в кінці § 1.

За нульове наближення візьмемо

$$u^0(M_0, t) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \{\varphi(M)P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau)\psi(M)\}\,dS.$$

Тоді

$$u^j(M_0, t) = u^0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi}\iiint_P [u^{j-1}(M, t)]L(\sigma)\,dv +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iiint_P \sigma\left[F\left(x^\alpha, t, u_{j-1}, \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha}\right)\right]dv.$$

Як і раніше, вважаючи, що F для всякої два рази неперервно диференційованої функції u обмежена деякою константою M, можна показати (міркуючи так само, як і в [1]), що даний процес зводиться до деякої граничної функції, що являється розв'язком рівняння (3,2).

Будемо тепер задовольняти умову (2,1).

З формул (2,2) слідує, що

$$u^0(M_0, t)\,|_{x^3=0} = 0$$

$$u^0(R, t) = -u^0 R^*, t).$$

Функцію F продовжуємо так:

$$F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_R = -F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*}.$$

Тоді

$$u^1(M_0, t)\,|_{x^3=0} = 0$$

$$u^1(R, t) = -u^1(R^*, t).$$

Враховуючи те, що u^0 і u^1 в симетричних точках ведуть себе однаково, матимемо

$$F\left(x^\alpha, t, u^1\, \frac{\partial u^1}{\partial x^\alpha}\right)_R = -F\left(x^\alpha, t, u^1, \frac{\partial u^1}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*}.$$

Звідси випливає, що взагалі

$$F\left(x^\alpha, t, u^j, \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}\right)_R = -F\left(x^\alpha, t, u^j, \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

І, значить,

$$u^j(M_0, t)\,|_{x^3=0} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

Отже, функція

$$u(M_0, t) = u^0(M_0, t) + \sum_{j=1}^{\infty}\{u^j(M_0, t) - u^{j-1}(M_0, t)\}$$

являється розв'язком задачі (3,1)—(1,2)—(2,1).

§ 4. БІЛЬШ ЗАГАЛЬНІ ГРАНИЧНІ УМОВИ

За допомогою розглянутого вище методу можна розв'язувати змішану задачу для рівняння (1,6) або (3,1), коли на границі задається умова

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{4,1}$$

або

$$\alpha u|_S + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0, \tag{4,2}$$

α і β — деякі постійні (випадок неоднорідних граничних умов легко зводиться до розглядуваного).

Розглянемо детальніше випадок граничної умови (4,1). Коли границею нашої області є площина $x^3 = 0$, то щоб задовольнити граничну умову, треба перш за все вміти вичисляти похідну по x^3 від функцій типу

$$v_1(M_0, t) = \iint\limits_{\tau(M, M_0)=t} f(M, M_0, t)\, dS,$$

і

$$v_2(M_0, t) = \iiint\limits_{\tau(M, M_0)<t} F(M, M_0, t)\, dv.$$

Легко показати (див., наприклад, [I]), що

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_0^3} = \iint\limits_{\tau(M, M_0)=t} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_0^3} + \frac{\partial f}{\partial \nu} \cdot \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x_0^3}}{n(M)} - 2Hf \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x_0^3}}{n(M)} \right\} dS;$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_0^3} = \iiint\limits_{\tau(M, M_0)<t} \frac{\partial F}{\partial x_0^3}\, dv - \iint\limits_{\tau(M, M_0)=t} F \cdot \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x_0^3}}{n(M)}\, dS,$$

де H — середня кривизна поверхні в просторі Рімана з метрикою $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$;

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \sqrt{g^{\alpha\beta}}\, \frac{\partial f}{\partial x_0^\alpha} \cos(n, x^\beta)$$

$$\sqrt{g^{\alpha\beta}}\, \frac{\partial s}{\partial x_0^\alpha} \cos(n, x^\beta) = -n(M).$$

Позначимо:

$$\varphi(M) P(\sigma) - \sigma P(\varphi) - \sigma P(\tau) \psi(M) = K(M, M_0).$$

Тоді з (1,3) маємо:

$$\frac{\partial u(M_0, t)}{\partial x_0^3} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{ \frac{\partial K}{\partial x_0^3} + \left(\frac{\partial K}{\partial \nu} - 2HK - \psi(M) L(\sigma) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sigma f(M, 0) \right) \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x_0^3}}{n(M)} \right\} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_P \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0^3} \left([u(M, t)] L(\sigma) + \sigma[f] \right) \right\} dv.$$

Так само з (1,9) одержимо:

$$\frac{\partial u_j(M_0, t)}{\partial x_0^3} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P \left\{\frac{\partial}{\partial x_0^3}\left([u_j(M, t)]L(\sigma) - \sigma\left[g^\alpha \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha} + g u_{j-1}\right]\right)\right\} dv -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'} \left\{u_j(M, 0)\, L(\sigma) - \sigma\left(g^\alpha \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x^\alpha} + g\, u_{j-1}\right)\right\} \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x_0^3}}{n(M)}\, dS\,.$$

З цих формул випливає, що для того, щоб розв'язок рівняння (1,6), який задовольняє умові (1,2), задовольняв граничній умові

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x^3}\right|_{x^3=0} = 0\,,$$

досить дані задачі продовжити в такий спосіб:

$$c(R) = c(R^*)$$
$$g^{\alpha\beta}(R) = g^{\alpha\beta}(R^*),\ \text{коли}\ \alpha,\ \beta \neq 3\ \text{або}\ \alpha = \beta = 3\,,$$
$$g^{\alpha\beta}(R) = -\,g^{\alpha\beta}(R^*),\ \text{коли}\ \alpha = 3, \beta \neq 3\ \text{або}\ \alpha \neq 3, \beta = 3$$
$$\varphi(R) = \varphi(R^*)$$
$$\psi(R) = \psi(R^*)$$
$$f(R, t) = f(R^*, t)$$
$$g^\alpha(R, t) = g^\alpha(R^*, t),\ (\alpha = 1, 2)$$
$$g^3(R, t) = -\,g^3(R^*, t)$$
$$g(R, t) = g(R^*, t)$$

У випадку нелінійного рівняння (3,1) продовження коефіцієнтів таке ж, а функція F продовжується за законом:

$$F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_R = F\left(x^\alpha, t, u^0, \frac{\partial u^0}{\partial x^\alpha}\right)_{R^*}.$$

Коли ми маємо справу з граничною умовою (4,2), то продовження даних являється комбінацією продовження для випадку граничних умов (2,1) і (4,1).

Зовсім аналогічно поступаємо і для інших типів областей.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Г. Гоголадзе. Волновое уравнение для неоднородной и анизотропной среды. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, IX, М., 1935.

2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, ГТТИ, М.—Л., 1951.

3. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. II, ГТТИ, М.—Л., 1951.