Л. М. ЗОРІЙ

ПРО УМОВИ СТІЙКОСТІ В ЦІЛОМУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 1. Розглянемо систему рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = F_{11}(x, y) + F_{12}(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_{21}(x, y) + F_{22}(x, y). \tag{1,1}$$

Припускається, що функції F_{ij} $(i,j=1,2)$ неперервні, задовольняють умовам єдиності розв'язку в області $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$ і $F_{ij}(0,0) = 0 \, (i,j=1,2)$.

Відомо, що нульовий розв'язок системи (1,1) називається асимптотично стійким в цілому, якщо він асимптотично стійкий за Ляпуновим (тобто при досить малих збуреннях) і якщо кожен інший розв'язок $x = x(t)$, $y = y(t)$ системи (1,1) має властивість

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \tag{1,2}$$

Якщо ж розв'язок $x = 0$, $y = 0$ асимптотично стійкий і всі розв'язки, які починаються в області D, що оточує початок координат, мають властивість (1,2), то D називається областю притягання нульового розв'язку або областю асимптотичної стійкості.

§ 2. Теорема 2.1. *Якщо виконуються умови:*

а) $x F_{11}(x, y) = -a_{11}(x, y) x^2 < 0$ *при* $x \neq 0, y \neq 0$

$y F_{22}(x, y) = -a_{22}(x, y) y^2 < 0$ „ „

б) $y F_{12}(x, y) = \varphi_{12}(x) \psi_{12}(y) f(x, y) y^2 > 0$ *при* $x \neq 0, y \neq 0$

$x F_{21}(x, y) = -\varphi_{21}(x) \psi_{21}(y) f(x, y) x^2 < 0$ „ „

в) $\int\limits_0^x \frac{\varphi_{21}(x)}{\varphi_{12}(x)} x \, dx \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$,

$\int\limits_0^y \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y \, dy \to \infty$ *при* $|y| \to \infty$

і функції φ_{ij} *та* ψ_{ij} $(i, j = 1, 2; i \neq j)$ *одного знаку, то нульовий розв'язок системи (1,1) асимптотично стійкий в цілому.*

Доведення: Умови (а) і (б) теореми дозволяють записати систему (1,1) в такому виді:

$$\frac{dx}{dt} = -a_{11}(x,y)x + \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x,y)y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x,y)x - a_{22}(x,y)y, \tag{2,1}$$

де функції a_{11}, a_{22}, f додатні для довільних значень аргументів.

Візьмемо функцію Ляпунова

$$V = \int_0^x \frac{\varphi_{21}(x)}{\varphi_{12}(x)} x\,dx + \int_0^y \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y\,dy. \tag{2,2}$$

Завдяки умовам теореми ця функція додатньо-означена і безмежно велика. На основі рівнянь збуреного руху (2,1) її похідна

$$\frac{dV}{dt} = -a_{11}(x,y)\frac{\varphi_{21}(x)}{\varphi_{12}(x)}x^2 - a_{22}(x,y)\frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)}y^2 \tag{2,3}$$

є функцією від'ємно-означеною. Отже, на основі теореми Барбашина-Красовського [3] нульовий розв'язок справді стійкий в цілому.

Теорема 2.2. *Якщо $F_{11}(x,y) \equiv 0$ і виконуються умови (б) і (в) теореми 2.1, $yF_{22}(x,y) = -a_{22}(x,y)y^2 < 0$, при $x \neq 0, y \neq 0$ і функції φ_{ij} та $\psi_{ij}(i,j=1,2)$; $i \neq j$ одного знаку, то система (1,1) стійка в цілому.*

Доведення. Система (1, 1) виглядає тепер так:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x,y)y, \quad \frac{dy}{dt} = -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x,y)x - a_{22}(x,y)y. \tag{2,4}$$

Беручи V такою ж, як при доведенні попередньої теореми, одержуємо:

$$\frac{dV}{dt} = -a_{22}(x,y)\frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)}y^2. \tag{2,5}$$

Тут похідна є функцією знакопостійною, а саме: $\frac{dV}{dt} < 0$ при $y \neq 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$ при $y = 0$. Внаслідок того, що перетин множин $y = 0$, $V = c$ $(c > 0)$ не містить додатніх півтраєкторій системи, то на основі результатів згадуваної вже роботи [3] нульовий розв'язок асимптотично стійкий в цілому.

Теорема 2.3. *Якщо $F_{12}(x,y) = F_{21}(x,y) \equiv 0$ і виконується умова (а) теореми 2, 1, то нульовий розв'язок системи (1,1) асимптотично стійкий в цілому.*

Доведення очевидне, якщо взяти $2V = x^2 + y^2$.

Розглянемо систему (2,1) з нелінійними «добавками»:

$$\frac{dx}{dt} = -a_{11}(x,y)x + \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x,y)y + F_1(x,y)x$$
$$\frac{dy}{dt} = -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x,y)x - a_{22}(x,y)y + F_2(x,y)y. \tag{2,6}$$

5*

Тут функції $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ такі, що не порушуються умови існування та єдиності розв'язків, а функції a_{11}, a_{22}, φ, ψ, f задовольняють умовам теореми (2.1), тобто система без «добавок» стійка в цілому.

Теорема 2.4. *Якщо в усьому просторі* $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &\leqslant a_{11}(x,y) \\ F_2(x,y) &\leqslant a_{22}(x,y) \end{aligned} \tag{2,7}$$

причому хоча б в одній з них має місце строга нерівність, то нульовий розв'язок системи (2,6) *асимптотично стійкий в цілому.*

Доведення аналогічне, як в попередніх теоремах, якщо за V взяти функцію (2,2).

Примітка. Теорему 2.4 можна застосовувати для побудови систем з наперед заданою областю притягання нульового розв'язку.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1. В роботі [5] досліджуються геометрично різні частинні випадки рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + B\left(x, \frac{dx}{dt}\right)x = 0 \tag{2,8}$$

і приводяться достатні умови асимптотичної стійкості в цілому нульового розв'язку. Відносно функцій A, B припускається, що вони неперервні, задовольняють для всіх значень своїх аргументів умовам єдиності розв'язків і умовам Рауза-Гурвіца, тобто

$$A\left(x, \frac{dx}{dt}\right) > 0, \quad B\left(x, \frac{dx}{dt}\right) > 0.$$

На основі доведених теорем легко одержати деякі результати Б. С. Разумихіна, а також дослідити більш загальні види вказаного рівняння і при слабших припущеннях відносно функцій A і B.

Нехай $B\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = b_1(x)\, b_2\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $b_1(x) > 0$, $b_2\left(\frac{dx}{dt}\right) > 0$.

Розглянемо систему, рівнозначну нашому рівнянню:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -b_1(x)\, b_2(y)\, x - A(x,y)\, y.$$

На основі теореми 2.2 нульовий розв'язок асимптотично стійкий в цілому, якщо в усьому фазовому просторі виконуються умови:

$$b_1(x) > 0, \quad b_2(y) > 0, \quad A(x,y) > 0,$$

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_0^x b_1(x)\, x\, dx = \infty, \quad \lim_{|y| \to \infty} \int_0^y \frac{y}{b_2(y)}\, dy = \infty.$$

Приклад 2. Застосуємо теорему 2.1 для визначення умов стійкості в цілому деяких видів так званої системи Єршова:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) \\ \sigma &= c_1 x - d_1 y. \end{aligned} \tag{2,9}$$

Тут c_1, d_1 — додатні постійні, F і f — неперервні при всіх значеннях аргументів, задовольняють умовами єдиності розв'язку і $F(0,0)=0$, $f(0)=0$. Н. Н. Красовський [6] будує функцію

$$\varphi(\sigma, y)=c_1 F\left(\frac{\sigma+d_1 y}{c_1},\ y\right)-d_1 f(\sigma)$$

і дає такі умови стійкості в цілому:

(а) $y\varphi(0,y)<0$, $\sigma f(\sigma)>0$ при $y\neq 0$, $\sigma\neq 0$, $\sigma[\varphi(\sigma,y)-\varphi(0,y)]<0$ при $\sigma\neq 0$;

(б) $$\left|\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\,d\sigma\right|=\infty,\ \left|\int_0^{\infty}\varphi(0,y)\,dy\right|=\infty.$$

Н. П. Єругін [2] висловив думку, що умови (б) можна, мабуть, ослабити. Як приклад застосування теореми 2.1 проведемо дослідження деяких класів рівнянь такого типу.

Нехай дана система:

$$\frac{dx}{dt}=-a(x,y)x-bf_1(\sigma)y$$

$$\frac{dy}{dt}=c_1 f_1(\sigma)x-d_1 f_1(\sigma)y,\ \sigma=c_1 x-d_1 y.$$

Тут

$$F(x,y)=-a(x,y)x-bf_1(\sigma)y$$
$$f(\sigma)=\sigma f_1(\sigma).$$

На основі теореми 2.1 для асимптотичної стійкості в цілому нульового розв'язку цієї системи досить виконання в усьому фазовому просторі умов: $b>0$, $c_1>0$, $d_1>0$, $a(x,y)>0$, $f_1(\sigma)>0$.

Порівняємо останні умови з умовами Н. Н. Красовського.

$$\varphi(\sigma,y)=c_1\left[-a\left(\frac{\sigma+d_1 y}{c_1},\ y\right)\frac{\sigma+d_1 y}{c_1}-bf_1(\sigma)\,y\right]-d_1\sigma f_1(\sigma)$$

$$\varphi(0,y)=c_1\left[-a\left(\frac{d_1 y}{c_1},y\right)\frac{d_1 y}{c_1}-bf_1(0)\,y\right].$$

Тоді

1. $y\varphi(0,y)=-y^2\left[a\left(\frac{d_1 y}{c_1},\ y\right)d_1+c_1 bf_1(0)\right]<0$ при $y\neq 0$,

2. $\sigma f(\sigma)=\sigma^2 f_1(\sigma)>0$ при $\sigma\neq 0$,

3. $\sigma[\varphi(\sigma,y)-\varphi(0,y)]=-\sigma^2\alpha(\sigma,y)-2\sigma y\,\beta(\sigma,y)$,

де

$$\alpha(\sigma,y)=\left[a\left(\frac{\sigma+d_1 y}{c_1},\ y\right)+d_1 f_1(\sigma)\right]>0,$$

$$\beta(\sigma,y)=\left[\frac{1}{2}d_1 a\left(\frac{\sigma+d_1 y}{c_1},y\right)+\frac{1}{2}d_1 a\left(\frac{d_1 y}{c_1},y\right)+c_1 bf_1(\sigma)\right]>0,$$

звідки видно, що ця умова, взагалі кажучи, не виконується.

Неважко досягти порушення першої з умов (б), хоча функції $a(x,y)$, $f_1(\sigma)$ будуть в цей же час такими, що наші умови виконуються і система стійка в цілому. Друга з умов (б) в нашому випадку виконується.

Очевидно, що теорема 2.1 дозволяє одержати достатні умови і у випадку, коли $b = b(x) > 0$ або $b = b(y) > 0$. Додаткові умови матимуть вид:

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_0^x \frac{x}{b(x)}\, dx = \infty, \quad \lim_{|y| \to \infty} \int_0^y b(y)\, y\, dy = \infty$$

відповідно.

§ 3. Розглянемо систему нелінійних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{3,1}$$

Відносно функцій $F_{ij}\, (i, j = 1, \ldots, n)$ зробимо припущення, аналогічні випадку системи двох рівнянь.

Теорема 3.1. *Якщо в усьому фазовому просторі* $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ *виконані умови*:

1. $x_i F_{ii}(x_1, \ldots, x_n) = -a_{ii}(x_1, \ldots, x_n)\, x_i^2 < 0$ *при* $x_i \neq 0$,

2. $x_j F_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\, A_{jj}(x_j)\, x_j^2 > 0$ *при* $x_j \neq 0\, (i < j)$

3. $x_j F_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = -a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\, A_{jj}(x_j)\, x_j^2 < 0$ *при* $x_j \neq 0$ $(i > j)$

4. $\lim\limits_{|x_j| \to \infty} \int_0^{x_j} A_{jj}(x_j)\, x_j\, dx_j = \infty$ $(j = 1, \ldots, n)$

і функції $a_{ij} \equiv a_{ji}$ *при* $i \neq j$, *то нульовий розв'язок системи (3,1) асимптотично стійкий в цілому.*

Доведення очевидне, якщо взяти

$$V = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{x_j} A_{jj}(x_j)\, x_j\, dx_j, \tag{3.2}$$

бо тоді

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x_1, \ldots, x_n)\, A_{jj}(x_j)\, x_j^2. \tag{3,3}$$

Примітки. 1) Для систем виду (3, 1), в яких $F_{ij} = F_{ji} \equiv 0\ (i \neq j)$ одночасно або неодночасно та $F_{ij} \equiv 0\ (i = j)$ неодночасно, теорема 3.1 залишається в силі. Для таких систем справедливі також теореми, аналогічні теоремам (2.3) та (2.4), але при доведенні функцію V треба відповідно змінювати.

2) Очевидно, що теорема справедлива також для ряду систем, подібних до системи (3, 1) в цьому розумінні, що функції, які розміщені симетрично відносно головної діагоналі системи (3, 1) при виконанні умов теореми, пізніше взаємно мінялися місцями.

Неважко переконатися, що результат С. Н. Шиманова [4] одержується з теореми 3.1 як частинний випадок.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку професорові Остапу Степановичу Парасюку за постановку теми даної роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Немицкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
2. Н. П. Еругин. Качественные методы в теории устойчивости, ПММ, 1955, т. XIX, вып. 5.
3. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, 1952, т. XXXVI, № 3.
4. С. Н. Шиманов. Об устойчивости решения одной нелинейной системы уравнений. Успехи математических наук, 1953, т. XVIII, вып. 6.
5. Б. С. Разумихин. Об устойчивости тривиального решения систем 2-го порядка, ПММ, 1955, т. XIX, вып. 3.
6. Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 1.