С. П. ГАВЕЛЯ

ВИКРИВЛЕННЯ ПОВЕРХЕНЬ РОЗРИВУ ЯДЕР ДЕЯКИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Запропонований в [1] спосіб пристосування до неопуклих областей побудованих Я. Б. Лопатинським в [2] ядер потенціалів, що зводять граничні задачі для лінійних еліптичних систем до регулярних інтегральних рівнянь, істотно зв'язаний з необхідністю визначення як області аналітичної продовжуваності їх, так і фактичного такого продовження. Оскільки це не завжди легко виконати, в даній замітці приводиться спосіб усунення такої необхідності шляхом деякого викривлення поверхень розриву безпосередньо побудованих в [2] ядер. При цьому використовуються деякі результати, а також всі позначення [1], за винятком випадків, де це спеціально зауважується.

Умовимось насамперед повернення від так званої місцевої системи координат (початок якої знаходиться в точці $y \in S$, а остання вісь ox_n направлена вздовж внутрішньої нормалі $\nu(y)$ до поверхні S в цій точці) до попередньої загальної координатної системи позначати з допомогою заміни аргумента (x) через $(x-y, y)$ та навпаки. Умовимося далі називати означаючими дві слідуючі властивості «півпросторового» ядра $G(x)$, що забезпечують його придатність для зведення розглядуваних задач до регулярних інтегральних рівнянь (у випадку опуклих областей V):

а) $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) G(x-y, y) = 0$ при $x \in V$, $y \in S$.

б) Нехай, як і в [2], рядки граничного оператора $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ впорядковано за зростаючими порядками диференціювання s_k, тобто так, що $\underline{s} = s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{p\frac{s}{2}} = \bar{s}$, та об'єднано в групи з однаковими порядками s_k по $\varkappa_l$ рядків в кожній l-групі. Нехай, крім того, $G^0(x-y, y)$ означає результат усунення з матриці $G(x-y, y)$ перших $l-1$ груп її стовпців, та, відповідно до цього,

$$u^0(x) = \overbrace{\int_S \cdots \int}^{n-1} G^0(x-y, y) \mu(y) \, d_y S.$$

Тоді при $x \in D$, $y, z \in S$ та $L \leqslant j \leqslant L + \varkappa_l$, де $L = \sum_{\nu=1}^{l-1} \varkappa_\nu$, буде

$$\lim_{x\to y} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^0(x) = \mu_j(y) + \overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{S} B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) G^0(y-z, z)\,\mu(z)\, d_z S\,,$$

причому

$$B_j\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) G^0(x-z, z) = 0\left(\frac{(x-z, \nu(z))}{|x-z|^n}\right),$$

для всіх

$$j \leqslant L + \varkappa_l\,.$$

Побудуємо тепер в кожній точці $y \in S$ дві замкнуті поверхні Ω та Q, які дотикались би до S в цій точці y та були б аналітичними принаймні в деяких її оточеннях Ω_0 та Q_0. Вважаючи одну з них, наприклад Ω, задовольняючою умовам вживання її у виразі (12) з [1] та користуючись аналогічними приведеними там міркуваннями (див. [1], стор. 167—168), дістанемо

$$G(x) = -\overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} B_z^j\{R(x, \xi; 0), G(\xi)\}\, d_\xi \Omega + g(x)\,, \tag{1}$$

де $g(x)$ — аналітична та така, що задовольняє умові

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g(x) = 0\,,$$

при $x \in V/0$ функція.

Тоді, очевидно, означаючі властивості а) та б) ядра $G(x)$ збережуться при заміні його функцією $G_*(x)$, визначеною виразом

$$G_*(x) = \overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{\Omega_0} \sum_{j=1}^{n} \nu_i B_z^j\{R(x, \xi; 0), G(\xi)\}\, d_\xi \Omega + g(x)\,. \tag{2}$$

(Очевидно, при побудові множини Ω_0 слід припускати її приналежність до деякої неперервно залежної від координат точки y сім'ї. В наступному буде потрібне аналогічне припущення і відносно множини Q_0).

Розкриваючи символи білінійних диференціальних форм B_z^j та позначаючи (з метою стислості)

$$-\sum_{k_1+\dots+k_n+l_1+\dots+l_n=s-1} a_{k_1\dots k_n}^{l_1\dots l_n}(z)\, \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}} R(x, z; 0)\, \frac{\partial^{l_1+\dots+l_n}}{\partial z_1^{l_1}\dots\partial z_n^{l_n}} G(z) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant s-1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} R(x, z)\, G^{(k)}(z)\,,$$

вираз [2] перепишемо у вигляді

$$G_*(x) = \overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{\Omega_0} \sum_{0 \leqslant k \leqslant s-1} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} R(x, \xi)\, G^{(k)}(\xi)\, d_\xi \Omega + g(x). \tag{3}$$

Якщо тепер, крім зауваженого вище, вважати, що аналітичне перетворення

$$\begin{matrix} \eta=\eta(\xi) \\ \xi=\xi(\eta) \end{matrix} \quad \begin{cases} \eta_1=\xi_1 & \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\Omega_0 \mid \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \eta_{n-1}=\xi_{n-1} & \mid \eta=(\eta_1,\ldots\eta_n)\in Q_0 \mid \\ \eta_n=\xi_n-\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) & \end{cases}$$

взаємно відображує множини Ω та Q_0 одну на одну, то буде мати місце таке **твердження:**

При заміні ядра $G_*(x)$ функцією

$$G^*(x)=\underbrace{\int\ldots\int}_{Q_0}^{n-1}\sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}\frac{\partial^k}{\partial\eta^k}R(x,\eta)G^{(k)}(\xi(\eta))d_\eta Q+g(x), \tag{4}$$

де $G^{(k)}(\xi(\eta))=G^{(k)}(\xi)|_{\xi=\xi(\eta)}$, його означаючі властивості а) та б) зберігаються.

В зв'язку з очевидною наявністю властивості а) у визначеного виразом (4) нового ядра $G^*(x)$ залишається переконатись лише в наявності у нього властивості б). Для цього, маючи на увазі представлення

$$G^*(x)=G_*(x)+\{G^*(x)-G_*(x)\}, \tag{5}$$

досить, в свою чергу, переконатись в неперервності (поблизу точки $x=y$) потенціалу

$$B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)u^*(x)=$$

$$=\underbrace{\int\ldots\int}_{S}^{n-1}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\{G^*(x-z,z)-G_*(x-z,z)\}\mu(z)\,d_zS \tag{6}$$

при $x\in V+S$; $y\in S\,(z\in S)$.

Це ж останнє переконання безпосередньо випливає з представлення

$$B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)G^*(x-z,z)=$$

$$=\underbrace{\int\ldots\int}_{\Omega_0}^{n-1}\sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial\eta^k}R(x-z,z;\eta)\,|_{\eta=\eta(\xi)}G^{(k)}(\xi)\sigma(\xi)d_\xi\Omega+g(x)$$

та з зауважень, що внаслідок взаємодотику поверхень Ω та Q, по-перше, $((n-1)$ — мірна) площа елемента поверхні Q по відношенню до Ω може бути оцінена

$$\sigma(\xi)=1+o(|\xi|)$$

та, по-друге, також має місце оцінка

$$B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{\partial^k}{\partial\eta^k}R(x-z,z;\eta)\Big|_{\eta=\eta(\xi)}-\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}R(x-z,z;\xi)\right\}=$$

$$=o\left(B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}R(x-z,z;\xi)\right).$$

Цілком очевидним, далі, є

Зауваження 1. Означаючі властивості а) та б) ядра $G(x)$ не порушуються при заміні його функцією

$$G^{**}(x)=\overbrace{\int\limits_{Q}\dots\int}^{n-1}\sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}\frac{\partial^k}{\partial\eta^k}R(x,\eta)\,\lambda^k(\eta)\,d_\eta Q+g(x), \tag{7}$$

де $\lambda^k(\eta)$, співпадаючи з $G^{(k)}(\xi(\eta))$ на Q_0, неперервно продовжена на $Q-Q_0$.

В розумінні спрощення обчислень явного виразу нових ядер часом виявляється корисним

Зауваження 2. При заміні ядра $G^{**}(x)$ розглядуваного потенціалу функцією

$$G^{***}(x)=\overbrace{\int\limits_{Q}\dots\int}^{n-1}\sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}\frac{\partial^k}{\partial\eta^k}R(x,\eta)\,\lambda^k(\eta)\,\gamma(\eta)\,d_\eta Q+g(x), \tag{8}$$

де $\gamma(\eta)=[\gamma_1(\eta),\dots,\gamma_p(\eta)]$ — діагональна матриця неперервних на Q функцій $\gamma_k(\eta)$, його властивість а) зберігається, а властивість б) видозмінюється таким чином:

$$\begin{gathered}\lim_{x\to y}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{00}(x)=\gamma_j^0\mu_j(y)+\\+\overbrace{\int\limits_{S}\dots\int}^{n-1}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{00}(y-z,z)\,\mu(z)\,d_zS,\end{gathered} \tag{9}$$

причому $\gamma_k^0=\gamma_k(0)=\text{const}$, $G^{00}(x-y,y)$ — позначає результат усунення з матриці $G(x-y,y)$ перших $l-1$ її стовпців, та, відповідно до цього,

$$u^{00}(x)=\overbrace{\int\limits_{S}\dots\int}^{n-1}G^{00}(x-y,y)\,\mu(y)\,d_yB.$$

Дійсно, представляючи

$$B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{00}(x)=$$

$$=\overbrace{\int\limits_{S}\dots\int}^{n-1}\Bigg\{\overbrace{\int\limits_{Q-Q_\varepsilon}\dots\int}^{n-1}\sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial\eta^k}R(x-y,y;\eta)\,\lambda^k(\eta)\,\gamma(\eta)\,d_\eta Q\Bigg\}\mu(y)\,d_yS+$$

$$+\overbrace{\int\limits_{S}\dots\int}^{n-1}\Bigg\{\overbrace{\int\limits_{Q_\varepsilon}\dots\int}^{n-1}\sum_{0\leqslant k\leqslant s-1}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial\eta^k}R(x-y,y;\eta)\lambda^k(\eta)d_\eta Q\Bigg\}\gamma(\eta)\,\mu(y)\,d_yS,$$

де $\eta\in Q_\varepsilon$, Q_ε — множина точок $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in Q$, для яких виконана умова $|(\eta_1,\dots,\eta_n)|\leqslant\varepsilon((\varepsilon>0))$, та переходячи до границі при $x\to y$, дістанемо

$$\lim_{x\to y}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{00}(x)=\gamma_j(\overline{\eta})\mu_j(y)+\overbrace{\int\limits_{S}\dots\int}^{n-1}B_j\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)G^{00}(y-z,z)\mu(z)\,d_zS.$$

З можливості вибору ε як завгодно малим та неперервності функцій $\gamma_j(\eta)$ виходить, що $\gamma_j(\eta)=\gamma_j(0)\gamma_j^0$.

Це й обумовлює співвідношення (9). Наявність же властивості а) у визначеній виразом (8) функції цілком очевидна.

Частинним випадком розглянутого є

Зауваження 3. Означаючі властивості а) та б) ядра $G(x)$ повністю зберігаються при заміні його визначеною виразом (8) функцією $G^{***}(x)$, якщо $\gamma(0)=E$ (E — одинична матриця порядку p).

Цікаво зауважити, що можливість побудови описаних вище сімей поверхонь Ω та Q випливає з задоволення поверхні S умовам Ляпунова. При цьому поверхні Ω та Q можуть бути вибрані таким чином, щоб кожна з множин $\Omega-y$ цілком належала спільній частині області V та півпростору $(x-y,\nu(y))>0$, а кожна з множин Q не мала спільних точок з $V+S-y$. Таким чином, при досягненні усунення вимоги опуклості області V не виникає ніяких додаткових обмежень. Разом з тим ми уникаємо необхідності аналітичного продовження побудованих в [2] ядер, а також і визначення області аналітичності останнього.

Приклад. Проілюструємо щойно побудований метод пристосування «півпросторових» ядер до неопуклих областей та спосіб введення множників $\gamma(\eta)$, що полегшують обчислення, застосувавши їх до розглядуваної в [3] задачі типу Пуанкаре для гармонійних функцій.

Переходячи до рухомої під час інтегрування вздовж S системи координат, початок якої знаходиться в точці інтегрування y, а остання вісь ox_3 направлена вздовж напряму диференціювання граничного оператора, побудоване в [3] «півпросторове» ядро запишемо

$$q(x)=-\frac{\nu}{2\pi r}\left(\frac{x_1}{r+x_3},\ \frac{x_2}{r+x_3},\ 1\right),$$

де $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, ν — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S в її точці y в рухомих координатах.

З цього представлення видно, що розривне вздовж променя $x_1=$ $=x_2=0$, $x_3\leqslant 0$ ядро непридатне для областей, з якими такі промені перетинаються.

Функція

$$q_2(x)=\frac{x_2}{r(r+x_3)},$$

очевидно, може бути представлена у вигляді (1) слідуючим чином:

$$q_2(x)=-\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\Omega-\Omega_\varepsilon}\frac{\xi_2 d_\xi\Omega}{\sqrt{(\xi_1^2+\xi_2^2)\{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}},$$

де Ω — площина $\xi_3=0$, Ω_ε — множина тих її точок $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},0)$, для яких $|\xi|\leqslant\varepsilon$.

Відповідаюча $q_2(x)$ функція $q_2^*(x)$ з викривленою поверхнею розриву може бути побудована, очевидно, в такий спосіб

$$q_2^*(x)=-\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{Q-Q_\varepsilon}\frac{\eta_2\gamma(\eta)d_\eta Q}{\sqrt{(\eta_1^2+\eta_2^2)\{(x_1-\eta_1)^2+(x_2-\eta_2)^2+(x_3-\eta_3)^2\}}},$$

причому за Q може бути вибрана, наприклад, дотична до S в початку рухомої системи сфера радіуса R, що лежить зовні V.

Замінюючи змінні інтегрування

$$\eta_1 = R \sin\varphi \cos\vartheta;$$
$$\eta_2 = R \sin\varphi \sin\vartheta$$
$$\eta_3 = R(\cos\varphi - 1)$$

і потім $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$ та позначаючи $\alpha = x_1 \cos\vartheta + x_2 \sin\vartheta$, $\beta = \sqrt{r^2 + 4Rx_3 + 4R^2}$, одержимо

$$q_2^*(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t_0 \to 0} \int_0^{2\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\gamma^*(t, \vartheta)\sqrt{1+t^2}\,dt\,d\vartheta}{t\sqrt{\beta^2 t^2 - 4R\alpha t + r^2}}.$$

Тепер видно, що доцільно вибрати

$$\gamma^*(t, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

тобто $\gamma(\eta) = \sqrt{1 + \frac{\eta_3}{2R}}$, причому умова $\gamma(0) = 1$ буде виконана.

З нескладних обчислень, далі, одержимо остаточно

$$q_2^*(x) = \begin{cases} \dfrac{2Rx_2}{r(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)} - \dfrac{1}{2r} & \text{зовні сфери } r^2 + 2Rx_3 = 0 \\[2ex] \dfrac{2Rx_2}{r(r^2 + 2Rx_3 - \beta r)} - \dfrac{1}{2r} & \text{всередині тієї ж сфери.} \end{cases}$$

Тотожність

$$(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)(r^2 + 2Rx_3 - \beta r) = 4R^2(x_3^2 - r^2)$$

переконує в аналітичності функції $q_2^*(x)$ зовні прямої $x_1 = x_2 = 0$. Але вираз

$$(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)|_{x_1 = x_2 = 0} = x_3(x_3 + 2R) + |x_3(x_3 + 2R)|$$

обертається в нуль лише при $-2R \leqslant x_3 \leqslant 0$. З цього виходить, що функція

$$q_2^{**}(x) = \frac{2Rx_2}{r(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)} - \frac{1}{2r},$$

яка являє собою аналітичне продовження заданої зовні сфери $r^2 + 2Rx_3 = 0$ частини функції $q_2^*(x)$, аналітична зовні відрізка $x_1 = x_2 = 0$, $-2R \leqslant x_3 \leqslant 0$.

Виходячи з функції $q_1(x) = \frac{x_1}{r(r + x_3)}$, цілком аналогічно попередньому, очевидно, будемо мати

$$q_1^{**}(x) = \frac{2Rx_1}{r(r^2 + 2Rx_3 + \beta r)} - \frac{1}{2r}.$$

Таким чином, нове ядро $q^{**}(x)$ розглядуваної задачі може бути визначене з допомогою виразу

$$g^{**}(x) = -\frac{\nu}{2\pi}(q_1^{**}(x),\ q_2^{**}(x),\ q_3^{**}(x)).$$

При цьому може бути покладено $q_3^{**}(x) = \frac{1}{r}$, в зв'язку з точковим характером особливості цієї функції.

Представлення

$$\delta(x) = q_i^{**}(x) - q_i^{*}(x) = \frac{x_i(\beta - 2R - r)}{2R(r^2 - x_3^2)} \quad (i = 1,2)$$

та випливаюча з нього оцінка $\frac{\partial}{\partial x_3}\delta(x) = 0(|x|^{-1})$ $\left(\text{тут } \frac{\partial}{\partial x_3}\right.$ — вигляд головної частини граничного оператора в рухомих координатах$\left.\right)$ переконують в зберіганні означаючих властивостей функцією $q^{**}(x)$.

З попереднього, отже, ясно, що одержане таким способом нове ядро $q^{**}(x)$, аналітичне зовні відрізка $x_1 = x_2 = 0$, $-2R \leqslant x_3 \leqslant 0$, придатне для зведення до регулярних інтегральних рівнянь розглядуваної задачі у випадку області, з якою не перетинаються лише такі відрізки.

Примітка. Зважаючи на локальний характер леми Я. Б. Лопатинського [4], побудоване в [1] та використовуване тут представлення (1) функції $G(x)$ слід уточнити, поклавши $R(x;\ z,\ 0) = \omega\ (x,\ z)$ при $z \in \Omega\ \Omega_0$. В зв'язку з цим буде

$$g(x) = -\lim_{\rho\to 0}\overbrace{\int\dots\int}^{n-1}_{S_\rho}\sum_{j=1}^{n}\nu_j\ B_z^j(R(x;z,0),G(z))d_zS -$$

$$-\sum_{l=0}^{t}\left\{\frac{\partial^l}{\partial y^l}\omega(x,y)\right|_{y=0}\ \overbrace{\int\dots\int}^{n-1}_{(\Omega_0\setminus T\rho)\cup S\rho}\sum_{j=1}^{n}\nu_j\ B_z^j(\vartheta_l(z),G(z))d_zS.$$

(Множині Ω_0 в [1] відповідає T_n).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гавеля С. П. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8, стор. 158—174, Львів, 1957.

2. Лопатинський Я. Б. Укр. мат. журн. 5, № 2, 1953.

3. Лопатинський Я. Б. Наукові записки ЛДУ, серія фізико-математична, в. 5, Львів, 1953.

4. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, т. 79, № 5, 1951.