Збірник робіт аспірантів
Львівського державного університету ім. Ів. Франка

М. С. ВОЛОШИНА

ПРО ДЕЯКІ ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В цій замітці для деякого класу еліптичних систем визначається вид граничних умов, для яких ядра інтегралів типу потенціалу, що розв'язують відповідну граничну задачу, мають точкову особливість.

В замітці використовуються результати і позначення робіт [7] і [8].

ВИПАДОК ПОСТІЙНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Нехай

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=\sum_{k,l=1}^{n}A_{kl}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k\,\partial x_l}=0 \tag{1}$$

є сильно еліптична в сенсі М. Й. Вишика система (див. [4]). Тут $A_{kl}=A_{lk}=A_{kl}'$* — сталі дійсні матриці порядку p, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — точка n-вимірного дійсного простору. Нехай D—область, обмежена зв'язною поверхнею S типу Ляпунова.

Розв'язок граничної задачі

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0 \quad (x\in D),$$

$$B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)=f(y) \quad (y\in S), \tag{2}$$

згідно з методом Я. Б. Лопатинського [1] шукаємо у вигляді інтеграла типу потенціалу

$$u(x)=\int\cdot\cdot(\underset{S}{n}-1)\cdot\cdot\int G(x,y)\,\mu(y)\,d_yS\,, \tag{3}$$

де $G(x,y)$ — ядро інтеграла типу потенціалу, $\mu(y)$ — «густина» потенціалу.

Розроблений в [1] метод зведення граничних задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь до регулярних інтегральних рівнянь створено в припущенні опуклості розглядуваної області.

Ця вимога пояснюється тим, що ядра інтегралів типу потенціалу у випадку неопуклої області можуть мати сильні розриви всередині області інтегрування, що заважає застосуванню методу.

* Штрих зверху означає транспонування.

Проте вдалося показати, що існують два типи граничних умов — умови типу Діріхле і Неймана, для яких ядро інтеграла типу потенціалу має точкову особливість також і у випадку неопуклої області.

Теорема. *Для того, щоб ядро інтеграла типу потенціалу, що розв'язує деяку граничну задачу (2), мало тільки точкову особливість, необхідно і достатньо, щоб граничні умови мали один з двох виглядів: умова типу Діріхле:*

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = C_1(y) \qquad (y \in S), \tag{4}$$

умова типу Неймана:

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = C_2(y) \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk} \nu_l(y) \frac{\partial}{\partial y_k} + Q(y)^*, \quad y \in S. \tag{5}$$

Тут $\nu_l(y)$ — компоненти одиничного вектора внутрішньої нормалі в точці $y \in S$, $C_1(y)$ і $C_2(y)$ — оборотні дійсні матриці, $\tilde{A}_{lk}$ — постійні дійсні квадратні матриці, які мають властивість $\tilde{A}_{kl} = \tilde{A}'_{lk}$, $\tilde{A}_{kl} + \tilde{A}_{lk} = 2A_{kl}$ і визначаються із співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{k,l=1} \tilde{A}_{kl} \nu_l \tau_k &= Re\, B_0(\nu, \tau)\, A_0, \\ B_0(\nu, \tau) &= \left[\int_+ A^{-1}(\beta\nu + \tau)\, d\beta\right]^{-1} \int_+ \beta A^{-1}(\beta\nu + \tau)\, d\beta, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$A_0 = \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \nu_k \nu_l$$

причому внаслідок умови еліптичності, матриця A_0 є оборотною (докладно про це див. в [7]); τ і ν є n-вимірні одиничні вектори, $(\tau, \nu) = 0$, $\int_+ (\ldots)\, d\beta$ означає інтегрування по простому додатньо орієнтованому замкненому контуру, який охоплює β-корені $\det A(\beta\nu + \tau) = 0$ з додатньою уявною частиною.

Зауважимо, що оскільки на порядок особливості ядра має вплив лише перший доданок правої частини (5), то для спрощення, $Q(y)$ будемо опускати. Крім того, для спрощення запису замість $C_1(y)$, $C_2(y)$, $\nu_l(y)$ будемо писати C_1, C_2, ν_l відповідно.

Доведемо дві леми.

Лема I. Має місце співвідношення:

$$\int_+ \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk} (\beta\nu_k + \tau_k) \nu_l A^{-1}(\beta\nu + \tau)\, d\beta = \pi i E, \tag{7}$$

де E — одинична матриця.

В роботі [7] було показано, що

$$B_0(\nu, \tau) = B_0'(\nu, \tau), \tag{8}$$

---

* Зауважимо, що для того, щоб існував єдиний розв'язок задачі типу Неймана, матриця $Q(y)$ (яка може бути і необоротною!) повинна мати властивість: форма $u'(y) Q(y) u(y)$ від'ємно визначена.

$$ImB_0(\nu,\tau)=(ImB_0(\nu,\tau))'=\pi\left[\int_+ A^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\right]^{-1}A_0^{-1}=$$

$$=\pi A_0^{-1}\left[\int_+ A^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\right]^{-1}, \tag{8'}$$

$$A_0=A_0'=\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}\nu_k\nu_l=\sum_{k,l=1}^{n}\widetilde{A}_{lk}\nu_k\nu_l. \tag{9}$$

Використовуючи (6) і (9), перетворимо підінтегральний вираз (7):

$$\sum_{k,l=1}^{n}\widetilde{A}_{lk}(\beta\nu_k+\tau_k)\nu_l A^{-1}(\beta\nu+\tau)=\beta A_0A^{-1}(\beta\nu+\tau)-$$

$$-A_0ReB_0(\nu,\tau)A^{-1}(\beta\nu+\tau).$$

Тоді (7) матиме вигляд:

$$A_0\int_+\beta A^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta-A_0ReB_0(\nu,\tau)\int_+ A^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta=\pi i. \tag{7'}$$

Підставляючи

$$A_0ReB_0(\nu,\tau)=A_0B_0(\nu,\tau)-iA_0ImB_0(\nu,\tau)=$$

$$=A_0\int_+\beta A^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\left[\int_+ A^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\right]^{-1}-\pi i\left[\int_+ A^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\right]^{-1}$$

в (7'), одержимо те, що вимагалось.

Лема II. Нехай $T(\tilde{\alpha})$, де $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ є однорідна матриця, степінь однорідності якої дорівнює $\kappa-n+2$, де n — розмірність простору ($n\geqslant 3$), κ — ціле додатне число ($\kappa<n$).

Нехай

$$\int_{(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})=1}\cdot\cdot(n-2)\cdot\cdot\int d_{\tilde{\alpha}}S\int_+\frac{A^{-1}(\alpha)}{(x-y,\alpha)^k}\,T(\tilde{\alpha})d\alpha_n\equiv 0. \tag{10}$$

Тоді $T(\tilde{\alpha})\equiv 0$. Тут $(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})=1$ означає інтегрування по поверхні $(n-2)$ - вимірної одиничної сфери, $d_{\tilde{\alpha}}S$ — елемент поверхні цієї сфери. Згідно з відомими формулами:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}},\quad \Gamma(n)=(n-1)!$$

маємо:

$$\frac{(\kappa-1)!}{(-i)^k(x-y,\alpha)^k}=\int_0^\infty r^{k-1}e^{ir(x-y,\alpha)}dr=\int_0^\infty r^{k-1}e^{ir(\widetilde{x}-\widetilde{y},\widetilde{\alpha})}e^{ir(x_n-y_n)\alpha_n}dr.$$

Помножуючи тотожність (10) на $\frac{(\kappa-1)!}{(-i)^k}$ і користуючись останнім співвідношенням, одержуємо

$$\int\cdot\cdot(n-2)\cdot\cdot\int\limits_{(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})=1} d_{\tilde{\alpha}} S \int\limits_0^\infty r^{k-1} e^{ir(\widetilde{x-y},\,\tilde{\alpha})}\,dr \int\limits_{+} e^{ir(x_n-y_n)\alpha_n} A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_n\, T(\tilde{\alpha}) \equiv 0 \quad (11)$$

Виконуючи заміну $\alpha=\frac{\gamma}{r}$, маємо серію співвідношень:

$$\tilde{\gamma}=r\tilde{\alpha},\ \gamma_n=r\alpha_n,\ d_{\tilde{\gamma}} S=r^{n-2}\,dr\,d_{\tilde{\alpha}} S,\ d\gamma_n=r\,d\alpha_n,\ A^{-1}(\alpha)=r^2A^{-1}(\gamma),$$

$$T(\tilde{\alpha})=\frac{1}{r^{k-n+2}}T(\tilde{\gamma});\ \int\cdot\cdot(n-2)\cdot\cdot\int\limits_{(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})=1} d_{\tilde{\alpha}} S\int\limits_0^\infty r^{n-2}(\cdots)\,dr=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdot\cdot(n-1)\cdot\cdot\int(\cdots)\,d_{\tilde{\gamma}} S.$$

Здійснивши в (11) вказані перетворення і позначаючи для зручності $x-y$ і γ через x і α відповідно, одержимо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdot\cdot(n-1)\cdot\cdot\int e^{i(x,\,\tilde{\alpha})}\,\tilde{V}(\tilde{\alpha},x_n)\,d_{\tilde{\alpha}} S\equiv 0, \quad (12)$$

де

$$V(\tilde{\alpha},x_n)=\int\limits_{+} e^{ix_n\alpha_n}A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_n\,T(\tilde{\alpha}). \quad (13)$$

Внаслідок того, що (12) є формула обернення Фур'є для функції $V(\tilde{\alpha},x_n)$ із рівності її нулеві випливає, що

$$\tilde{V}(\tilde{\alpha},x_n)=\int\limits_{+} e^{ix_n\alpha_n}A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_n\,T(\tilde{\alpha})\equiv 0. \quad (14)$$

Матриця $\int\limits_{+} A^{-1}(\alpha)\,d\alpha_n$ внаслідок умови сильної еліптичності є оборотною ([1]). Тому, покладаючи в тотожності (14) $x_n=0$, одержують $T(\tilde{\alpha})\equiv 0$. Лема доведена.

Повернемось до доведення теореми. Достатність умов (4), (5) була доведена в замітці [7].

Необхідність. Нехай ядро інтеграла типу потенціалу деякої граничної задачі має точкову особливість. Оскільки ядро є розв'язком системи (1), воно повинно виражатися через фундаментальну матрицю $\varphi(x-y)$ цієї системи. Як відомо, $\varphi(x-y)$ має точкову особливість порядку $n-2$ (див. [2]).

Із представлень ядер інтегралів типу потенціалу, даних в [1], випливає, що для системи другого порядку (1) можливі лише два випадки: 1) порядок особливості ядра дорівнює $n-1$; 2) порядок особливості ядра дорівнює $n-2$.

В першому випадку із представлення ядра інтеграла типу потенціалу, даного в [1], випливає, що гранична умова може бути лише умовою типу Діріхле.

В другому випадку граничний оператор повинен містити в собі диференціювання першого порядку:

$$B\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\sum_{k=1}^{n} B_k\frac{\partial}{\partial y_k}. \tag{15}$$

(для простоти запису y зафіксовано і пропущено). При цьому припускається, що виконується умова регуляризовності:

$$\det\int\limits_{+} B(\beta\nu+\tau)\,A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta\neq 0.$$

Згідно з [1], ядро $G(x,y)$ має вигляд:

$$G(x,y)=-\frac{(n-3)!}{(-2\pi i)^{n-1}}\int\cdot\cdot(n-2)\cdot\cdot\int\limits_{\substack{(\tau,\tau)=1\\(\tau,\nu)=0}} d_\tau S\int\limits_{+}\frac{A^{-1}(\beta\nu+\tau)}{(x-y,\beta\nu+\tau)^{n-2}}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{+} B(\tilde\beta\nu+\tau)\,A^{-1}(\tilde\beta\nu+\tau)\,d\tilde\beta\right]^{-1}d\beta. \tag{16}$$

З другого боку, будучи розв'язком однорідної системи (1), ядро $G(x,y)$ виразиться через фундаментальну матрицю $\varphi\ (x-y)$ так:

$$G(x,y)=\varphi(x-y)\,C(y)+R(x,y), \tag{17}$$

де $R(x,y)$ — регулярний доданок (див. [3]).

Використовуючи формулу Гріна [5] і теорему типу Ліувіля [6], можна показати, що $R(x,y)\equiv 0$.

Тому

$$G(x,y)=\varphi(x-y)\,C(y), \tag{18}$$

причому внаслідок оборотності $G(x,y)$ і $\varphi(x-y)$, матриця $C(y)$ оборотна.

Покладаючи в (18) для простоти $C(y)=E$ і використовуючи представлення фундаментальної матриці, дане Я. Б. Лопатинським в [2], маємо:

$$G(x,y)=\frac{(n-3)!}{(-2\pi i)^{n}}\int\cdot\cdot(n-2)\cdot\cdot\int\limits_{\substack{(\tau,\tau)=1\\(\tau,\nu)=0}} d_\tau S\int\limits_{+}\frac{A^{-1}(\beta\nu+\tau)}{(x-y,\beta\nu+\tau)^{n-2}}\,d\beta. \tag{19}$$

Віднімаючи (19) від (16), одержуємо:

$$\int\cdot\cdot(n-2)\cdot\cdot\int\limits_{\substack{(\tau,\tau)=1\\(\tau,\nu)=0}} d_\tau S\int\limits_{+}\frac{A^{-1}(\beta\nu+\tau)}{(x-y,\beta\nu+\tau)^{n-2}}\left\{\left[\int\limits_{+} B(\tilde\beta\nu+\tau)A^{-1}(\tilde\beta\nu+\tau)d\tilde\beta\right]^{-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}E\right\}d\beta\equiv 0. \tag{20}$$

Направляючи одиничний вектор ν по n-ій осі, зауважуючи, що матриця у фігурних дужках є однорідна матриця нульового виміру і використовуючи лему II, із (20) одержуємо:

$$\int\limits_{+} B(\beta\nu+\tau)A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta=2\pi iE. \tag{21}$$

Далі, згідно з лемою I, маємо:

$$\int\limits_{+} 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}(\beta\nu_k+\tau_k)\nu_l A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta = 2\pi i E. \tag{22}$$

Віднімаючи (21) від (22), маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\nu_k \int\limits_{+} \beta A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta + \sum_{k=1}^{n} B_k\tau_k \int\limits_{+} A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta -$$

$$-2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_k\nu_l \int\limits_{+} \beta A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta - 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\tau_k\nu_l \int\limits_{+} A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta \equiv 0. \tag{23}$$

З формули (6) випливає:

$$\int\limits_{+} \beta A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta = B_0(\nu,\tau)\int\limits_{+} A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta. \tag{24}$$

Підставляючи (24) в (23) і використовуючи оборотність матриці $\int\limits_{+} A^{-1}(\beta\nu+\tau)\,d\beta$, одержуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\nu_k B_0(\nu,\tau) + \sum_{k=1}^{n} B_k\tau_k - 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_k\nu_l B_0(\nu,\tau) - 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\tau_k\nu_l \equiv 0.$$

Відокремимо дійсну і уявну частини:

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\nu_k Re B_0(\nu,\tau) + \sum_{k=1}^{n} B_k\tau_k - 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_k\nu_l Re B_0(\nu,\tau) -$$

$$-2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\tau_k\nu_l \equiv 0, \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\nu_k Im\, B_0(\nu,\tau) - 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_k\nu_l Im\, B_0(\nu,\tau) \equiv 0. \tag{26}$$

Із (8′) випливає, що $\det Im\, B_0(\nu,\tau) \neq 0$. Тому з (26) маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\nu_k - 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_k\nu_l \equiv 0. \tag{27}$$

Підставляючи в (25) замість $Re B_0(\nu,\tau)$ його значення з (6) і замість $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k\nu_k$ його значення з (27), одержуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\tau_k - 2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\tau_k\nu_l \equiv 0,$$

звідки, зрівнюючи коефіцієнти при τ_k, одержуємо:

$$B_k = 2 \sum_{l=1}^{n} \widetilde{A}_{lk} \nu_l .$$

Остаточно маємо:

$$B\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2 \sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{A}_{lk} \nu_l \frac{\partial}{\partial y_k} .$$

У випадку, коли матриця C в (18) не є одиничною, одержуємо:

$$B\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\,C^{-1} \sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{A}_{lk} \nu_l \frac{\partial}{\partial y_k} .$$

Теорема повністю доведена.

У виразі для ядра (16) множник в квадратних дужках виникав за рахунок граничної умови, що було обумовлено застосуванням методу [1].

Застосовуючи вищенаведені положення, можна, проте, довести дещо більше.

Теорема. *Нехай дано інтеграл типу потенціалу*:

$$M(x, y) = \int\limits_{\substack{(\tau,\tau)=1\\(\tau,\nu)=0}} \cdot \cdot (n-2) \cdot \cdot \int d_\tau S \int\limits_{+} \frac{A^{-1}(\beta\nu + \tau)}{(x - y, \beta\nu + \tau)^{n-2}} P(\nu,\tau)\, d\beta , \qquad (28)$$

де $P(\nu,\tau)$ — довільна однорідна матриця нульового виміру відносно τ. Нехай матриця $M(x,y)$ оборотна хоча б при одному x. Для того, щоб інтеграл типу потенціалу (28) мав точкову особливість, необхідно і достатньо, щоб матриця $P(\nu,\tau)$ мала вигляд:

$$P(\nu, \tau) = \left[\int\limits_{+} \sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{A}_{lk} \nu_l (\beta\nu_k + \tau_k) A^{-1}(\beta\nu + \tau) d\beta \right]^{-1} C , \qquad (29)$$

де C — оборотна постійна матриця.

Теорема. *Нехай дано інтеграл типу потенціалу*

$$N(x, y) = \int\limits_{\substack{(\tau,\tau)=1\\(\tau,\nu)=0}} \cdot \cdot (n-2) \cdot \cdot \int d_\tau S \int\limits_{+} \frac{A^{-1}(\beta\nu + \tau)}{(x - y, \beta\nu + \tau)^{n-1}} Q(\nu, \tau)\, d\beta , \qquad (30)$$

де $Q(\nu, \tau)$ — однорідна матриця першого степеня однорідності відносно τ. Нехай матриця $N(x, y)$ оборотна хоча б при одному x. Для того, щоб потенціал $N(x, y)$ мав точкову особливість, необхідно і достатньо, щоб матриця $Q(\nu, \tau)$ була постійною оберненою матрицею.

ВИПАДОК ЗМІННИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Використовуючи результати роботи [8], першу з доведених вище теорем можна перенести на випадок довільної сильно еліптичної системи другого порядку з достатньо гладкими змінними коефіцієнтами, якщо припустити, що для цієї системи існує фундаментальна матриця.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Укр. мат. журн., т. 5, № 2, 1953.
2. Я. Б. Лопатинский. Укр. мат. журн., т. 3, № 3, 1951.
3. Я. Б. Лопатинский. ДАН СССР, т. 79, № 5, 1951.
4. М. И. Вишик. Мат. сб., т. 29 (71), № 3, 1951.
5. Б. Р. Лаврук. ДАН УРСР, № 3, 214, 1956.
6. С. Д. Эйдельман. Мат. сб., т. 33 (75), № 2, 1953.
7. М. С. Волошина. ДАН УРСР, № 9, 1958.
8. М. С. Волошина. ДАН УРСР, № 10, 1958.