Збірник робіт аспірантів
Львівського державного університету ім. Ів. Франка

В. О. ЛІХАЧОВ

ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНОЇ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПАЯНИМ КОРОТКИМ ЦИЛІНДРОМ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай у круглий отвір пластинки впаяний короткий циліндр. Напружений стан пластинки на безмежності візьмемо таким, при якому комплексні потенціали $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ Колосова-Мусхелішвілі виражаються у вигляді деяких поліномів від z.

Будемо позначати товщину пластинки через $2h$, зовнішній радіус циліндра через R_e, внутрішній — через R_i, довжину циліндра — через $2L$. Далі будемо користуватися циліндричною системою координат з початком у точці перетину площини пластинки з віссю циліндра. Вісь oz направимо по осі циліндра. Очевидно, що в цьому випадку площина $z=0$ збігається з серединною площиною пластинки.

В області контакту пластинки з циліндром приймаються умови [3]

$$\widehat{rr}_0(\theta)=\widehat{rr}(\theta),\ \widehat{r\theta}_0(\theta)=\widehat{r\theta}\quad \text{при } -h\leqslant z\leqslant h \tag{1}$$

$$u_{r_0}=u_r,\ u_{\theta_0}=u_\theta\quad \text{при } z=0 \tag{2}$$

Крім цього, для циліндра приймаємо, що

$$\widehat{rr}=\widehat{r\theta}=0\qquad \text{при } r=R_e\, i\, |z|>h \tag{3}$$

$$\widehat{rz}=0\qquad \text{при } r=R_e \tag{4}$$

$$\widehat{zz}=\widehat{zr}=\widehat{z\theta}=0\qquad \text{при } z=\pm L \tag{5}$$

та

$$\widehat{rr}=\widehat{rz}=\widehat{r\theta}=0\qquad \text{при } r=R_i, \tag{6}$$

якщо циліндр порожнистий.

Виходячи з симетрії задачі відносно серединної площини, будемо надалі вважати, що $z\geqslant 0$.

§ 1. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНКИ

Напружений стан пластинки на підставі робіт [1], [2] визначається через коефіцієнти функцій $\varphi(\eta)$ і $\psi(\eta)$ комплексного змінного η, [3].

§ 2. ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ ДЛЯ КОРОТКОГО ЦИЛІНДРА

1. Розглянемо деформацію короткого циліндра, навантаженого по його внутрішній та зовнішній поверхнях в такий спосіб, як і в роботі [3].

При розв'язанні таких просторових задач виникають труднощі в задоволенні всім граничним умовам через нестачу довільних сталих інтегрування. Однак можна дати такі розв'язки рівнянь Ламе, які дають можливість задовольнити граничним умовам на бокових поверхнях циліндра і досить добре на його торцях.

Будемо надалі за допомогою значка p позначати рішення системи Ламе на випадок кінцевої циліндричної області, які можуть бути отримані з виразів (2.15—2.19) роботи [3], якщо в останніх параметр λ замінити на $\frac{p\pi}{l}$, де $l=\frac{L}{R_l}$, і застосувати відповідні формули обернення для кінцевих синус- і косинус-перетворень Фур'є. За допомогою значка «п» будемо позначати поліноміальні рішення системи рівнянь Ламе, які також задовольняють одній з слідуючих умов:

$$A \quad u_z^{\text{п}},\ \frac{\partial u_z^{\text{п}}}{\partial\zeta},\ \frac{\partial u_\Theta^{\text{п}}}{\partial\zeta} \quad \text{рівні нулеві при } \zeta=0$$

$$B \quad u_r^{\text{п}},\ u_\Theta^{\text{п}},\ \frac{\partial u_z^{\text{п}}}{\partial\zeta} \quad \text{рівні нулеві при } \zeta=0.$$

На випадок умови A ці рішення мають такий вид:

$$u_{zk}^{\text{п}}=\sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{(-1)^m d_m\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+1)!}x^{n-2m}\zeta^{2m+1}+$$

$$+d_0x^n\zeta\Bigg\}\cos\kappa\Theta+$$

$$+\sum_{n=k+1,3,5\ldots}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{(-1)^m l_m\frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\ldots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m+1)!}x^{n-2m-1}\zeta^{2m+1}+$$

$$+l_0x^{n-1}\zeta\Bigg\}\sin\kappa\Theta,$$

де

$$d_0=d_n^k-\frac{2\nu}{\nu-2}\alpha_n^k,\quad l_0=l_n^k-\frac{2\nu}{\nu-2}\beta_n^k,$$

$$d_m=d_n^k-\frac{(m+2)\nu}{\nu-2}\alpha_n^k,\quad l_m=l_n^k-\frac{(m+2)\nu}{\nu-2}\beta_n^k.$$

$$xu_{\Theta k}^{n}=\sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{(-1)^{m+1}D_m\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!}x^{n-2m}\zeta^{2m+2}+$$

$$+D_0\frac{1}{(n+2)^2-\kappa^2}x^{n+2}+D\frac{1}{2}x^n\zeta^2\Bigg\}\sin\kappa\Theta+$$

$$+\sum_{n=k+1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(-1)^{m+1}C_m\frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\ldots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!}x^{n-2m+1}\zeta^{2m+1}+\right.$$

$$\left.+C_0\frac{1}{(n+1)^2-\kappa^2}x^{n+1}+C\frac{1}{2}x^{n-1}\zeta^2\right\}\cos\kappa\Theta,$$

де

$$D_0=\kappa d_n^k-\frac{3\nu-2}{\nu-2}\kappa\alpha_n^k-(n+2)a_n^k,$$

$$D=-\kappa d_n^k+\frac{4\nu-2}{\nu-2}\kappa\alpha_n^k+na_n^k,$$

$$D_m=\kappa d_n^k-\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}\kappa\alpha_n^k-(n-2m)a_n^k,$$

$$C_0=-\kappa l_n^k+\frac{3\nu-2}{\nu-2}\kappa\beta_n^k-(n+1)b_n^k,$$

$$C=\kappa l_n^k-\frac{4\nu-2}{\nu-2}\kappa\beta_n^k+(n-1)b_n^k,$$

$$C_m=-\kappa l_n^k+\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}\kappa\beta_n^k-(n-2m-1)b_n^k,$$

$$u_{rk}^{\text{п}}=\sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(-1)^m A_m\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!}x^{n-2m-1}\zeta^{2m+2}+\right.$$

$$\left.+A_0\frac{1}{(n+2)^2-\kappa^2}x^{n+1}+A\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{n-1}\zeta^2\right\}\cos\kappa\Theta+$$

$$+\sum_{n=k+1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(-1)^m B_m\frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\ldots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!}x^{n-2m-2}\zeta^{2m+2}+\right.$$

$$\left.+B_0\frac{1}{(n+1)^2-\kappa^2}x^n+B\cdot\frac{1}{2}x^{n-2}\zeta^2\right\}\sin\kappa\Theta,$$

де

$$A_0=-(n+2)d_n^k+\frac{(3\nu-2)(n+2)}{\nu-2}\alpha_n^k+\kappa a_n^k,$$

$$A=nd_n^k-\frac{4\nu-2}{\nu-2}n\alpha_n^k-\kappa a_n^k,$$

$$A_m=-(n-2m)d_n^k+\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}(n-2m)\alpha_n^k+\kappa a_n^k,$$

$$B_0=-(n+1)l_n^k+\frac{(3\nu-2)(n+1)}{\nu-2}\beta_n^k-\kappa b_n^k,$$

$$B=(n-1)l_n^k-\frac{(4\nu-2)(n-1)}{\nu-2}\beta_n^k-\kappa b_n^k,$$

$$B_m=-(n-2m-1)l_n^k+\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}(n-2m-1)\beta_n^k-\kappa b_n^k$$

$$\Theta_k^{\text{п}} = \sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n^k \left[(-1)^m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m} \zeta^{2m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x^n \right] \right\} \cos \kappa\Theta +$$

$$+ \sum_{n=k+1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \beta_n^k \left[(-1)^m \frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\ldots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m-1} \zeta^{2m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x^{n-1} \right] \right\} \sin \kappa\Theta ,$$

для будь-якого цілого індексу κ.

Для задачі, симетричної відносно осі, маємо:

$$u_z^{\text{п}} = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\nu}{\nu-2} \Theta_n \left[(-1)^m (m+1) \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m+1)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x^{n+1}\zeta \right] + u_n \left[(-1)^m \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m+1)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} + x^{n+1}\zeta \right] \right\},$$

$$u_r^{\text{п}} = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Theta_n \left[\frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \frac{1}{n+3} x^{n+2} - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \cdot \frac{n+1}{2} x^n \zeta^2 + \right.\right.$$

$$\left. + (-1)^{m+1} \frac{(m+3)\nu-2}{\nu-2} \cdot \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2(n-2m+1)}{(2m+2)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \right] +$$

$$+ u_n \left[-\frac{1}{n+3} x^{n+2} + \frac{n+1}{2} x^n \zeta^2 + \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^m \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2(n-2m+1)}{(2m+2)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \right] \right\},$$

$$\Theta^{\text{п}} = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_n \left\{ x^{n+1} + (-1)^m \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m} \right\}.$$

Через ν ми позначили число Пуассона.

Нехай тепер виконується умова B. В цьому випадку для компонент зміщення одержимо такі вирази:

$$u_z^{\text{п}} = \sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \overline{d}_0 \frac{1}{(n+2)^2-\kappa^2} x^{n+2} + \overline{d}\; x^n \zeta^2 + \right.$$

$$\left. + (-1)^m \overline{d}_m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \right\} \cos \kappa\Theta +$$

$$+\sum_{n=k+1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\bar{l}_0\frac{1}{(n+1)^2-\kappa^2}x^{n+1}+\bar{l}\,x^{n-1}\zeta^2+\right.$$

$$\left.+(-1)^m l_m^k\frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\ldots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!}x^{n-2m-1}\zeta^{2m+2}\right\}\sin\kappa\Theta\,.$$

$$\bar{d}_0=\frac{\nu}{\nu-2}\cdot\bar{\beta}_n^k-\bar{d}_n^k,\qquad \bar{l}_0=\frac{\nu}{\nu-2}\bar{\alpha}_n^k-\bar{l}_n^k,$$

$$\bar{d}=-\frac{\nu}{\nu-2}\bar{\beta}_n^k+\frac{1}{2}\bar{d}_n^k,\ \bar{l}=-\frac{\nu}{\nu-2}\bar{\alpha}_n^k+\frac{1}{2}\bar{l}_n^k,$$

$$d_m=-\frac{(m+2)\nu}{\nu-2}\bar{\beta}_n^k+\bar{d}_n^k,\ \bar{l}_m=-\frac{(m+2)\nu}{\nu-2}\bar{\alpha}_n^k+\bar{l}_n^k.$$

$$xu_\Theta^{\text{п}}=\sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\bar{D}_0\cdot\frac{1}{(n+2)^2-\kappa^2}x^{n+2}\zeta+D\cdot\frac{1}{6}x^n\zeta^3+\right.$$

$$\left.+(-1)^m\bar{D}_m\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+3)!}x^{n-2m}\zeta^{2m+3}\right\}\sin\kappa\Theta+$$

$$+\sum_{n=k+1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\bar{C}_0\frac{1}{(n+1)^2-\kappa^2}x^{n+1}\zeta+\bar{C}\frac{1}{6}x^{n-1}\zeta^3+\right.$$

$$\left.+(-1)^m\bar{C}_m\frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\ldots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m+3)!}x^{n-2m-1}\zeta^{2m+3}\right\}\cos\kappa\Theta,$$

де

$$\bar{D}_0=\kappa\bar{d}_n^k-(n+2)\bar{b}_n^k-\frac{3\nu-2}{\nu-2}\kappa\bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{D}=-\kappa\bar{d}_n^k+n\,b_n^k+\frac{4\nu-2}{\nu-2}\kappa\bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{D}_m=-\kappa\bar{d}_n^k+(n-2m)\bar{b}_n^k+\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}\kappa\,\bar{\beta}_n^k,$$

$$\bar{C}_0=-\kappa\bar{l}_n^k-(n+1)\bar{a}_n^k+\frac{3\nu-2}{\nu-2}\kappa\bar{\alpha}_n^k,$$

$$\bar{C}=\kappa\,\bar{l}_n^k+(n-1)\,\bar{a}_n^k-\frac{4\nu-2}{\nu-2}\kappa\,\bar{\alpha}_n^k,$$

$$\bar{C}_m=\kappa\bar{l}_n^k+(n-2m-1)\bar{a}_n^k-\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}\kappa\bar{\alpha}_n^k.$$

$$u_r^{\text{п}}=\sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\bar{A}_0\frac{n+2}{(n+2)^2-\kappa^2}x^{n+1}\zeta+\bar{A}\frac{n}{6}x^{n-1}\zeta^3+\right.$$

$$\left.+\bar{A}_m(-1)^{m+1}(n-2m)\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+3)!}x^{n-2m-1}\zeta^{2m+3}\right\}\cos\kappa\Theta+$$

$$+\sum_{n=k+1,3,5\dots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\overline{B}_0\frac{n+1}{(n+1)^2-\kappa^2}x^n\zeta+\overline{B}\frac{n-1}{6}\cdot x^{n-2}\zeta^3+\right.$$

$$\left.+(-1)^{m+1}\overline{B}_m(n-2m-1)\frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\dots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m+3)!}x^{n-2m-2}\zeta^{2m+3}\right\}\sin\kappa\Theta,$$

де

$$\overline{A}_0=-\overline{d}_n^k+\frac{\kappa}{n+2}b_n^k+\frac{3\nu-2}{\nu-2}\overline{\beta}_n^k,$$

$$\overline{A}=\overline{d}_n^k-\frac{n}{\kappa}b_n^k-\frac{4\nu-2}{\nu-2}\overline{\beta}_n^k,$$

$$\overline{A}_m=-\overline{d}_n^k+\frac{n-2m}{\kappa}\overline{b}_n^k+\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}\overline{\beta}_n^k,$$

$$\overline{B}_0=-\overline{l}_n^k-\frac{\kappa}{n+1}\overline{a}_n^k+\frac{3\nu-2}{\nu-2}\overline{\alpha}_n^k,$$

$$\overline{B}=\overline{l}_n^k+\frac{n-1}{\kappa}\overline{a}_n^k-\frac{4\nu-2}{\nu-2}\overline{\alpha}_n^k,$$

$$\overline{B}_m=-\overline{l}_n^k+\frac{2m-n+1}{\kappa}\overline{a}_n^k+\frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2}\overline{\alpha}_n^k.$$

$$\Theta_k^{\text{п}}=\sum_{n=k+0,2,4\dots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\overline{\beta}_n^k\left[(-1)^m\frac{(n^2-\kappa^2)\dots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+1)!}x^{n-2m}\zeta^{2m+1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+x^n\zeta\right]\right\}\cos\kappa\Theta+$$

$$+\sum_{n=k+1,3,5\dots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\overline{\alpha}_n^k\left[(-1)^m\frac{[(n-1)^2-\kappa^2]\dots[(n-2m+1)^2-\kappa^2]}{(2m+1)!}x^{n-2m-1}\zeta^{2m+1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+x^{n-1}\zeta\right]\right\}\sin\kappa\Theta,$$

для будь-якого цілого індексу κ.

Для задачі, симетричної відносно осі, одержуємо:

$$u_z^{\text{п}}=\sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\nu}{\nu-2}\overline{\Theta}_n\left[\frac{1}{(n+3)^2}x^{n+3}-x^{n+1}\zeta^2+\right.\right.$$

$$\left.+(-1)^{m+1}(m+2)\frac{(n+1)^2\dots(n-2m+3)^2}{(2m+2)!}x^{n-2m+1}\zeta^{2m+2}\right]+$$

$$+\overline{u}_n\left[\frac{1}{(n+3)^2}x^{n+3}-\frac{1}{2}x^{n+1}\zeta^2+\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{m+1}\frac{(n+1)^2\dots(n-2m+3)^2}{(2m+2)!}x^{n-2m+1}\zeta^{2m+2}\right]\right\},$$

$$u_r^{\text{п}} = \sum_{n=k+0,2,4\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \overline{\Theta}_n \left[\frac{3\nu-2}{\nu-2} \cdot \frac{1}{n+3} x^{n+2}\zeta - \frac{2\nu-1}{\nu-2} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot x^n \zeta^3 + \right.\right.$$

$$\left. + (-1)^{m+1} \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \cdot (n-2m+1) \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m+3)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+3} \right] +$$

$$+ \overline{u}_n \left[\frac{1}{n+3} x^{n+2}\zeta - \frac{n+1}{6} x^n \zeta^3 + \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^{m+1} \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2 (n-2m+1)}{(2m+3)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+3} \right] \right\},$$

$$\Theta^{\text{п}} = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_n^k \left\{ x^{n+1}\zeta + (-1)^m \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m+1)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} \right\}.$$

II. Щоб задовольнити граничним умовам на бокових поверхнях циліндра та на його торцях, візьмемо компоненти зміщення у виді:

$$u_r = u_r^p + u_r^{\text{п}}, \quad u_z = u_z^p + u_z^{\text{п}}, \quad u_\Theta = u_\Theta^p + u_\Theta^{\text{п}}.$$

Використавши відомі співвідношення, які зв'язують компоненти зміщення і напруження, одержимо, очевидно, що в цьому разі і компоненти напруження будуть мати аналогічний вид:

$$\widehat{rr} = \widehat{rr^p} + \widehat{rr^{\text{п}}}, \quad \widehat{rz} = \widehat{rz^p} + \widehat{rz^{\text{п}}}, \quad \widehat{zz} = \widehat{zz^p} + \widehat{zz^{\text{п}}} \text{ і т. д.}$$

Постійних інтегрування, які входять у вирази компонент зміщення з значком p, достатньо, щоб задовольнити умовам на бокових поверхнях циліндра, як це виходить з роботи [3].

Постійні інтегрування, які входять у вирази компонент зміщення з значком п, можуть бути використані, щоб задовольнити (наближено) умовам на торцях циліндра.

§ 3. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУНКЦІЙ $\varphi(\eta)$ І $\psi(\eta)$

Для визначення коефіцієнтів функцій $\varphi(\eta)$ і $\psi(\eta)$ будемо виходити з рівностей (2).

§ 4. ПРИКЛАДИ

1. Розтяг пластинки, в яку впаяний короткий круговий циліндр, у двох взаємно перпендикулярних напрямах рівномірно розподіленими на безмежності зусиллями

$$X_x^{(\infty)} = P, \quad Y_y^{(\infty)} = Q.$$

Коефіцієнти функцій $\varphi(\eta)$ і $\psi(\eta)$ дорівнюють:

$$b_1 = \frac{0{,}270\pi - 0{,}391\,l}{\pi + 0{,}782\,l}(P+Q),$$

$$a_1 = \frac{\pi^2 + 1{,}36\,\pi l - 1{,}82\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}(Q-P),$$

$$b_3 = \frac{\pi^2 + 0{,}895\,\pi l - 1{,}82\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\,(Q - P)\,.$$

Напружений стан пластинки визначається формулами:

$$\widehat{rr}_0 = \left(0{,}5 + \frac{0{,}270\,\pi - 0{,}391\,l}{\pi + 0{,}782\,l}\right)(P + Q) - \left[\frac{4\,(\pi^2 + 1{,}36\,\pi l - 1{,}82\,l^2)}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{3\,(\pi^2 + 0{,}895\,\pi l - 1{,}82\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho^4} + 0{,}5\right](Q - P)\cos 2\Theta\,;$$

$$\widehat{r\Theta}_0 = \left[0{,}5 - \frac{2\,(\pi^2 + 1{,}36\,\pi l - 1{,}82\,l^2)}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\,\frac{1}{\rho^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3\,(\pi^2 + 0{,}895\,\pi l - 1{,}82\,l^2)}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho^4}\right](Q - P)\sin 2\Theta\,;$$

$$\frac{2\mu_0}{R_e}\,u_{r_0} = \left(\frac{\varkappa^* - 1}{4}\,\rho - \frac{0{,}270\,\pi - 0{,}391\,l}{\pi + 0{,}782\,l}\right)(P + Q) +$$

$$+ \left[(\varkappa^* + 1)\,\frac{\pi^2 + 1{,}36\,\pi l - 1{,}82\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho} - 0{,}5 - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi^2 + 0{,}895\,\pi l - 1{,}82\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho^3}\right](Q - P)\cos 2\Theta\,;$$

$$\frac{2\mu_0}{R_e}\,u_{\Theta_0} = \left[0{,}5 + (1 - \varkappa^*)\,\frac{\pi^2 + 1{,}38\,\pi l - 1{,}82\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi^2 + 0{,}895\,\pi l - 1{,}82\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 12{,}1\,\pi l + 3{,}64\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho^3}\right](Q - P)\sin 2\Theta,$$

де

$$l = \frac{\mu_0}{\mu}\,.$$

2. Розтяг пластинки, в яку впаяний короткий порожнистий круговий циліндр, у двох взаємно перпендикулярних напрямках рівномірно розподіленими на безмежності зусиллями

$$X_{x}^{(\infty)} = P,\quad Y_{y}^{(\infty)} = Q.$$

На випадок цієї задачі одержуємо:

$$b_1 = \frac{0{,}270\,\pi - 0{,}569\,l}{\pi + 1{,}138\,l}\,(P + Q);$$

$$a_1 = \frac{\pi^2 + 2{,}31\,\pi l - 7{,}21\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 10{,}8\,\pi l + 14{,}42\,l^2}\,(Q - P);$$

$$b_3 = \frac{\pi^2 + 1{,}85\,\pi l - 7{,}21\,l^2}{4{,}16\,\pi^2 + 10{,}8\,\pi l + 14{,}42\,l^2}\,(Q - P);$$

$$\widehat{rr}_0 = \left(0{,}5 + \frac{0{,}270\,\pi - 0{,}569\,l}{\pi + 1{,}138\,l}\right)(P + Q) - \left[\frac{4(\pi^2 + 2{,}31\,\pi l - 7{,}21\,l^2)}{4{,}16\,\pi^2 + 20{,}8\,\pi l + 14{,}42\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{3(\pi^2 + 1{,}85\,\pi l - 7{,}21\,l^2)}{4{,}16\,\pi^2 + 10{,}8\,\pi l + 14{,}42\,l^2}\cdot\frac{1}{\rho^4} + 0{,}5\right](Q - P)\sin 2\Theta;$$

$$\widehat{r\Theta}_0=\left[0{,}5-\frac{2(\pi^2+2{,}31\pi l-7{,}21l^2)}{4{,}16\pi^2+10{,}8\pi l+14{,}42l^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3(\pi^2+1{,}85\pi l-7{,}21l^2)}{4{,}16\pi^2+10{,}8\pi l+14{,}42l^2}\cdot\frac{1}{\rho^4}\right](Q-P)\cos 2\Theta;$$

$$\frac{2\mu_0}{R_e}u_{r_0}=\left(\frac{\varkappa^*-1}{4}\rho-\frac{0{,}270\pi-0{,}569l}{\pi+1{,}138l}\cdot\frac{1}{\rho}\right)(P+Q)-$$

$$-\left[0{,}5-(\varkappa^*+1)\frac{\pi^2+2{,}31\pi l-7{,}21l^2}{4{,}16\pi^2+10{,}8\pi l+14{,}42l^2}\cdot\frac{1}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi^2+1{,}85\pi l-7{,}21l^2}{4{,}16\pi^2+10{,}8\pi l+14{,}42l^2}\cdot\frac{1}{\rho^3}\right](Q-P)\cos 2\Theta;$$

$$\frac{2\mu_0}{R_e}u_{\Theta_0}=\left[0{,}5+(1-\varkappa^*)\frac{\pi^2+2{,}31\pi l-7{,}21l^2}{4{,}16\pi^2+10{,}8\pi l+14{,}42l^2}\cdot\frac{1}{\rho}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2+1{,}85\pi l-7{,}21l^2}{4{,}16\pi^2+10{,}8\pi l+14{,}42l^2}\cdot\frac{1}{\rho^3}\right](Q-P)\sin 2\Theta.$$

Щоб знайти числове значення a_1, $в_1$, $в_3$, нами покладено

$$b=\frac{h}{R_e}=0{,}1,\ l=\frac{L}{R_e}=0{,}1\pi,\ \nu=4,\ \varkappa^*=2{,}08.$$

Умови на торцях циліндра задовольняються з точністю до 5% від навантаження, прикладеного на бокових поверхнях циліндра.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., 1951.
2. Шереметьев М. П. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сб. т. XIV. изд. АН СССР.
3. Ліхачов В. О. Деформація пружної безмежної пластинки з впаяним циліндром. Львів, 1959.