В. Г. КОМИНАР

РЯД ФУР'Є НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

В роботі [1] остаточний член ряду Фур'є функції обмеженої варіації подається в формі

$$L_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/n} D_n^1(t)\, df(t+x),$$

де

$$D_n^1(t) = -\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin \kappa t}{\kappa}.$$

Треба оцінити верхню границю $|L_n(f,x)|$ по всіх функціях класу $V\omega$, де $V\omega$ є множина всіх функцій з варіацією V і модулем неперервності $\omega(\delta)$

$$\omega(\delta) = \max_{|x'-x''|<\delta.} |f(x+x') - f(x+x'')|$$

Легко бачити, що $\sup\limits_{f\in V_\omega}|L_n(f,x)|$ не залежить від x і тому можна обмежитись оцінкою $L_n(f,0)$.

Внаслідок того, що $D_n(-t) = -D_n(t)$

$$L_n(f,0) = L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n^1(t)\,[df(t) + df(-t)].$$

Л е м а I. Має місце рівність

$$D_n^1(t) = \mathrm{si}(nt) + O_1(1/n), \quad (0<t<\pi)$$

де

$$\mathrm{si}(t) = -\int_t^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt,$$

$$|O_1(1/n)| < \frac{1}{n}(1/2 + 2/\pi) < \frac{0{,}82}{n}.$$

Доведення її можна знайти в [1] з тим уточненням, що за теоремою про середнє значення

$$I(t)=\int_0^t \sin nt\left(\frac{1}{2\operatorname{tg} t/2}-\frac{1}{t}\right)dt=\int_0^t \varphi(t)\sin nt\,dt=$$

$$=\varphi(0)\int_0^{\xi}\sin nt\,dt+\varphi(t)\int_{\xi}^{t}\sin nt\,dt=-\varphi(t)\,\frac{\cos nt-\cos n\xi}{n}.$$

Оскільки $\varphi(t)$ монотонно спадна функція і

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=0, \quad \varphi(\pi)=-1/\pi.$$

Тоді

$$|I(t)|<\frac{2}{\pi n}.$$

З допомогою цієї леми L_n запишеться як

$$L_n=1/\pi\int_0^{\pi}\operatorname{si}(nt)\,[df(t)+df(-t)]+O_2(1/n),$$

де

$$|O_2(1/n)|<\frac{1}{\pi}|O_1(1/n)|\cdot V[-\pi,\pi].$$

Візьмемо цей інтеграл по частинах. Маючи на увазі, що $|\operatorname{si}(n\pi)|<\frac{1}{n}$ $\underset{-\pi\leqslant t\leqslant\pi}{|f(t)|}<M$, одержуємо:

$$L_n(f,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{t}f_1(t)\,dt+O_3(1/n),$$

де

$$f_1(t)=f(t)+f(-t),$$
$$O_3(1/n)=O_2(1/n)+\frac{2M}{\pi n}.$$

Розбивши інтеграл на n частин і застосувавши перетворення Абеля, одержимо

$$L_n=\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/n}\alpha_0(z)\sin nz f_1(z)dz-$$

$$-\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/n}\alpha_n(z)\sin nz f_1\left(z+\frac{n-1}{n}\pi\right)dz+$$

$$+\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/n}\sum_{\kappa=1}^{n-1}\alpha_k(z)\left[f_1\left(z+\frac{\kappa\pi}{n}\right)-f_1\left(z+\frac{\kappa-1}{n}\pi\right)\right]\sin nz dz+0_3(1/n),$$

де

$$\alpha_k(z)=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^j}{nz+j\pi}.$$

Додатково вичислимо інтеграл

$$R_k=\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\alpha_k\sin nz\,dz,\quad \kappa=0,\ldots,n.$$

Зробивши заміну змінних $z=t-\frac{\kappa\pi}{n}$, маємо

$$R_k=\frac{n}{\pi}\int\limits_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\sin nt\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{nt+(j-\kappa)\pi}\,dt=\frac{n}{\pi^2}\int\limits_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\sin nt\,\beta\left(\frac{nt}{\pi}\right)dt,$$

де

$$\beta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{t+\kappa}.$$

Ще раз робимо заміну змінних $t=\frac{\pi z}{n}+\frac{\kappa\pi}{n}$.

$$R_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(-1)^k\sin\pi z\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-(z+k)t}}{1+e^z}\,dt\right)dz,$$

оскільки з [2] 6, 392 (1), 6, 391 (2)

$$\beta(z)=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-zt}}{1+e^{-t}}\,dt,$$

$$R_k=\int\limits_0^{\infty}\frac{l^{-kt}}{1+l^{-t}}\left(\int\limits_0^1\sin\pi z e^{-zt}\,dz\right)dt.$$

Внутрішній інтеграл береться по частинах

$$I=\int\limits_0^1 e^{-zt}\sin\pi z\,dz=\frac{\pi(e^z+1)}{\pi^2+t^2}.$$

Якщо $\kappa>0$, то з [2] 3. 223 [1].

$$R_k=-\frac{\mathrm{si}\,(\kappa\pi)}{\pi}.$$

Для $\kappa=0$

$$R_0=\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{\pi^2+t^2}=1/2.$$

Елементарні обчислення показують, що

$$|\mathrm{si}(\kappa\pi)|<\frac{2}{\pi\kappa^2}+\frac{1}{\pi}\ln\frac{\kappa+1}{\kappa}.$$

Введемо позначення:

$$\omega_k(\pi/n) = \max_{0<z<\pi/n} \left| f_1\left(z + \frac{\kappa\pi}{n}\right) - f_1\left(z + \frac{\kappa-1}{n}\pi\right) \right|$$

$$\omega_0(\pi/n) = \max_{0<z<\pi/2} |f_1(z) - 2f(0)|.$$

Будемо вважати, що $f(0)=0$ (це не має істотного значення). Оцінюючи L_n по модулю і $\left|f_1\left(z-\frac{\kappa\pi}{n}\right)-f_1\left(z+\frac{\kappa-1}{n}\pi\right)\right|$ замінивши $\omega_k(\pi/n)$, одержуємо інтеграли $|R_k|$. Позначивши

$$O_4(1/n) = O_3(1/n) + \frac{2M}{n}.$$

$$|L_n| \leqslant O_4(1/n) + \frac{1}{2}\omega_0(\pi/n) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\omega_k(\pi/n)\,|\,\mathrm{si}(\kappa\pi)|.$$

Якщо вважати, що $\omega_k(\pi/n) = 2\omega(\pi/n)$ є функція обмеженої варіації, то одержуємо функцію, яка задовольняє умові Ліпшиця. Таким чином, треба підібрати $\omega_k(\pi/n)$ так, щоб сума $\frac{1}{2}\dot{\omega}_0 + 1/n\sum_{k=1}^{n-1}\omega_k|\mathrm{si}(\kappa\pi)|$ досягала по можливості найбільшого значення при умові, що

$$\omega_k < 2\omega(\pi/n);$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \leqslant V[-\pi, \pi],$$

$\alpha_k = |\,\mathrm{si}(\kappa\pi)|$ монотонно спадає.

Легко бачити, що при цих умовах (спираючись на [3, стор. 203]) найбільшого значення сума досягає при

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{N-1} = 2\omega(\pi/n),$$

де

$$N = \left[\frac{V[\pi;\pi]}{\omega(\pi/n)}\right],$$

$$|\omega_N| < 2\omega(\pi/n);\ \omega_{N+1} = \cdots = \omega_{n-1} = 0.$$

Отже, маємо

$$|L_n| < O_4(\pi/n) + 3\omega(\pi/n) + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\kappa^2}\omega(\pi/n) + \frac{2}{\pi^2}\omega(\pi/n)\sum_{k=1}^{N-1}\ln\frac{\kappa+1}{\kappa};$$

$$|L_n| < O_4(1/4) + 5\omega(\pi/n) + \frac{2}{\pi^2}\omega(\pi/n)\ln N,$$

де

$$|O_4(1/n)| \leqslant \frac{4M}{n} + \frac{V[-\pi;\pi]\cdot 0{,}83}{n},$$

$$N = \left[\frac{V[-\pi;\pi]}{\omega(\pi/n)}\right].$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Изв. АН СССР, т. 13, № 6, 1949 г.

2. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Госиздательство техникотеоретической литературы, М., 1951.

3. Зыгмунд А. Тригонометрические ряды. Гонти, 1939,