В. О. ЛІХАЧОВ

ДО ПИТАННЯ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН КОРОТКОГО ЦИЛІНДРА

Розглянемо задачу про напружений стан короткого циліндра, навантаженого по його внутрішній та зовнішній поверхнях таким способом, як, наприклад, в роботі [1].

Будемо користуватися безрозмірними циліндричними координатами з початком координат в центрі циліндра.

За допомогою значка «б» будемо позначати рішення системи рівнянь Ламе в функціях Бесселя і Макдональда. Ці рішення, наприклад, можуть бути одержані з виразів (2.15) — (2.19) роботи [1]. За допомогою значка «p» — рішення системи Ламе в вигляді ряду по додатнім степеням змінної x $\left(x = \frac{r}{R_e}\right.$, де R_e — зовнішній радіус циліндра$\left.\right)$, за допомогою значка «n» — рішення системи Ламе в вигляді ряду з від'ємними степенями змінної x, за допомогою значка «l» — рішення системи Ламе в вигляді ряду з логарифмічними членами відносно x.

Рішення системи Ламе в функціях Бесселя і Макдональда дають можливість задовольнити граничним умовам на бокових поверхнях циліндра. Інші рішення системи Ламе можуть бути використані для задоволення граничних умов на торцях циліндра.

Відносно компонент зміщення будемо вважати, що вони задовольняють одному з таких умов.

$$„A“\ u_z,\ \frac{\partial u_r}{\partial \zeta},\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \text{ рівні нулеві при } \zeta = 0,$$

$$„B“\ u_r,\ u_\theta,\ \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \text{ рівні нулеві при } \zeta = 0.$$

Далі за браком місця наведемо рішення системи рівнянь Ламе на випадок умови A, взявши члени лише при $\sin \kappa\Theta$ або при $\cos \kappa\Theta$.

§ 1. РІШЕННЯ «p» СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ

$$xu_\theta^p = \sum_{n=k+0,2\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_0^n x^{n+2} + d_k x^k + B_0^n x^n \zeta^2 + (-1)^{m+1} C_m^n x^{n-2m} \zeta^{2m+2}] \sin \kappa\Theta,$$

$$u_r^p = \sum_{n=k+0,2\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_1^n x^{n+1} - d_k x^{n-1} + B_1^n x^{n-1} \zeta^2 + (-1)^{m+1} A_m^n x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2}] \cos \kappa\Theta,$$

$$u_z^p = \sum_{n=k+0,2\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[d_0 x^n \zeta + (-1)^m d_m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+1)!} x^{n-2m} \zeta^{2m+1} \right] \cos \kappa\Theta,$$

$$\Theta^p = \sum_{n=k+0,2\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^k \left[x^n + (-1)^m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m} \zeta^{2m} \right] \cos \kappa\Theta$$

для будь-якого цілого індексу κ, де

$$A_0^n = \frac{1}{(n+2)^2-\kappa^2} \left[\kappa d_n^k - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k - (n+2) a_n^k \right],$$

$$B_0^n = -\frac{\kappa}{2} d_n^k + \frac{2\nu-1}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k + \frac{n}{2} a_n^k,$$

$$C_m^n = \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!} \left[\kappa d_n^k - \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} \kappa \alpha_n^k - (n-2m) a_n^k \right],$$

$$A_1^n = \frac{1}{(n+2)^2-\kappa^2} \cdot \left[-(n+2) d_n^k + \frac{3\nu-2}{\nu-2} (n+2) \alpha_n^k + \kappa a_n^k \right],$$

$$B_1^n = \frac{n}{2} d_n^k - \frac{2\nu-1}{\nu-2} n \alpha_n^k - \frac{\kappa}{2} a_n^k,$$

$$A_m^n = \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!} \left[-(n-2m) d_n^k + \right.$$

$$\left. + \frac{(m+4)\nu-2}{\nu-2} (n-2m) \alpha_n^k + \kappa a_n^k \right],$$

$$d_0 = d_n^k - \frac{2\nu}{\nu-2} \alpha_n^k, \quad d_m = d_n^k - \frac{(m+2)\nu}{\nu-2} \alpha_n^k.$$

Через ν позначаємо число Пуассона.
На випадок задачі, симетричної відносно осі, одержуємо:

$$u_r^p = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2} x + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n+3} \left[\frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \alpha_n - \beta_n \right] x^{n+2} + \right.$$

$$+ \frac{n+1}{2} \left[\beta_n - \frac{3\nu-2}{\nu-2} \alpha_n \right] x^n \zeta^2 +$$

$$\left. + (-1)^m \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2(n-2m+1)}{(2m+2)!} \left[\beta_n - \frac{(m+3)\nu-2}{\nu-2} \alpha_n \right] x^{n-2m} \zeta^{2m+2} \right\},$$

$$u_z^p = \beta_0 \zeta + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\beta_n - \frac{\nu}{\nu-2} \alpha_n \right] x^{n+1} \zeta + \right.$$

$$\left. + (-1)^m \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m+1)!} \left[\beta_n - \frac{(m+1)\nu}{\nu-2} \alpha_n \right] x^{n-2m+1} \zeta^{2m+1} \right\},$$

$$\Theta^p = \alpha_0 + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n \left[x^{n+1} + (-1)^m \frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m)!} x^{n-2m+1} \zeta^{2m} \right].$$

§ 2. РІШЕННЯ «n» СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ

$$xu_\Theta^n = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[E_0\frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k}} + G_0\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k-2}} + L_0\frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m-2}}\right]\sin 2\kappa\Theta + \right.$$

$$\left. + \left[E_1\frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k+1}} + G_1\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k-1}} + L_1\frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m-1}}\right]\sin(2\kappa+1)\Theta\right\},$$

$$u_r^n = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[E_2\frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k+1}} + G_2\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k-1}} + L_2\frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m-1}}\right]\cos 2\kappa\Theta + \right.$$

$$\left. + \left[E_3\frac{\zeta^{2k-2n+2}}{x^{2k+2}} + G_3\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k}} + L_3\frac{\zeta^{2k-2n-m}}{x^{2k-2m-1}}\right]\cos(2\kappa+1)\Theta\right\},$$

$$u_z^n = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[E_4\frac{\zeta^{2k-2n+1}}{x^{2k}} + G_4\frac{\zeta^{2k-2n-1}}{x^{2k-2}} + L_4\frac{\zeta^{2k-2n-2m-1}}{x^{2k-2m-2}}\right]\cos 2\kappa\Theta + \right.$$

$$\left. + \left[E_5\frac{\zeta^{2k-2n+1}}{x^{2k+1}} + G_5\frac{\zeta^{2k-2n-1}}{x^{2k-1}} + L_5\frac{\zeta^{2k-2n-2m-1}}{x^{2k-2m-1}}\right]\cos(2\kappa+1)\Theta\right\},$$

$$\Theta^n = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\gamma_n^{2k}\left[\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k}} + \frac{(2\kappa-2n)\ldots(2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4\ldots4m(2\kappa-1)\ldots(2\kappa-m)}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m}}\right]\cos 2\kappa\Theta + \gamma_n^{2k+1}\left[\frac{\zeta^{2k-2n}}{x^{2k+1}} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(2\kappa-2n)\ldots(2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4\ldots4m(2\kappa-1)\ldots(2\kappa-m)}\cdot\frac{\zeta^{2k-2n-2m}}{x^{2k-2m+1}}\right]\cos(2\kappa+1)\Theta\right\},$$

де $\kappa = 1, 2, 3\ldots.$

$$E_0 = \frac{2\kappa}{(2\kappa-2n+2)(2\kappa-2n+1)}\left[-v_n^{2k} + \gamma_n^{2k} - (2\kappa-2n+1)u_n^{2k}\right],$$

$$G_0 = -\frac{2\kappa}{4(2\kappa-1)}\cdot\left[\frac{2}{\nu-2}\gamma_n^{2k} + \frac{2\kappa-2}{2\kappa}v_n^{2k} + (2\kappa-2n+1)u_n^{2k}\right],$$

$$L_0 = -\frac{(2\kappa-2n)\ldots(2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa-2n-2m+1)}{4\ldots4(m+1)(2\kappa-1)\ldots(2\kappa-m-1)}\times$$

$$\times\left[2\kappa\frac{m\nu+2}{\nu-2}\gamma_n^{2k} + (2\kappa-2m-2)v_n^{2k} + 2\kappa(2\kappa-2n+1)u_n^{2k}\right],$$

$$E_1 = \frac{2\kappa+1}{(2\kappa-2n+2)(2\kappa-2n+1)}\cdot\left[\gamma_n^{2k+1} - v_n^{2k+1} - (2\kappa-2n+1)u_n^{2k+1}\right],$$

$$G_1 = -\frac{2\kappa+1}{8\kappa}\cdot\left[\frac{2}{\nu-2}\gamma_n^{2k+1} + \frac{2\kappa-1}{2\kappa+1}v_n^{2k+1} + (2\kappa-2n+1)u_n^{2k+1}\right],$$

$$L_1 = -\frac{(2\kappa-2n)\ldots(2\kappa-2n-2m+2)(2\kappa'-2n-2m+1)}{4\ldots4(m+1)2\kappa\ldots(2\kappa-m)}\left[(2\kappa+1)\frac{m\nu+2}{\nu-2}\gamma_n^{2k+1} + \right.$$

$$\left. + (2\kappa-2m-1)v_n^{2k+1} + (2\kappa+1)(2\kappa-2n+1)u_n^{2k+1}\right],$$

$$E_2 = E_0, \quad G_2 = G_0 \frac{2\kappa - 2}{2\kappa} - \frac{v_n^{2k}}{2\kappa},$$

$$L_2 = -\frac{(2\kappa - 2n)\dots(2\kappa - 2n - 2m + 2)(2\kappa - 2n - 2m + 1)}{4\dots4(m+1)(2\kappa - 1)\dots(2\kappa - m - 1)} \times$$

$$\times \left[\frac{(m+1)(2\kappa - m - 1)}{2\kappa m(2\kappa - m)} v_n^{2k} + (2\kappa - 2n + 2)\left(\frac{m\nu + 2}{\nu - 2}\gamma_n^{2k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\kappa - 2n - 2}{2\kappa} v_n^{2k} + (2\kappa - 2n + 1) u_n^{2k}\right)\right].$$

$$E_3 = E_1, \quad G_3 = G_1 \frac{2\kappa - 1}{2\kappa + 1} - \frac{v_n^{2k+1}}{2\kappa + 1},$$

$$L_3 = -\frac{(2\kappa - 2n)\dots(2\kappa - 2n - 2m + 2)(2\kappa - 2n - 2m + 1)}{4\dots4(m+1)2\kappa\dots(2\kappa - m)} \times$$

$$\times \left[\frac{(m+1)(2\kappa - m)}{(2\kappa + 1)m(2\kappa - m + 1)} v_n^{2k+1} + (2\kappa - 2n + 2)\left(\frac{m\nu + 2}{\nu - 2}\gamma_n^{2k+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\kappa' - 2n - 2}{2\kappa + 1} v_n^{2k+1} + (2\kappa - 2n + 1) u_n^{2k+1}\right)\right],$$

$$E_4 = E_5 = u_n^{2k} + \frac{\nu}{\nu - 2} \cdot \frac{1}{2\kappa - 2n + 1}\gamma_n^{2k'},$$

$$G_4 = \frac{(2\kappa - 2n + 1)(2\kappa - 2n)}{4(2\kappa - 1)} u_n^{2k} + \frac{\nu}{\nu - 2} \cdot \frac{2\kappa - 2n}{2(2\kappa - 1)}\gamma_n^{2k};$$

$$L_4 = \frac{(2\kappa - 2n + 1)\dots(2\kappa - 2n - 2m + 1)(2\kappa - 2n - 2m)}{4\dots4(m+1)(2\kappa - 1)\dots(2\kappa - m - 1)} \times$$

$$\times \left[u_n^{2k} + \frac{(m+2)\nu}{\nu - 2} \cdot \frac{1}{2\kappa - 2n + 1}\gamma_n^{2k}\right].$$

$$G_5 = G_4 \frac{2\kappa - 1}{2\kappa},$$

$$L_5 = \frac{(2\kappa - 2n + 1)\dots(2\kappa - 2n - 2m + 1)(2\kappa - 2n - 2m)}{4\dots4(m+1)\cdot 2\kappa\dots(2\kappa - m)} \times$$

$$\times \left[u_n^{2k+1} + \frac{(m+2)\nu}{\nu - 2} \cdot \frac{1}{2\kappa - 2n + 1}\gamma_n^{2k+1}\right].$$

У випадку, коли $\kappa = 1$, маємо:

$$x u_\Theta^n = \left\{\frac{1}{x} u_1' + \left[\frac{\nu}{2(\nu - 2)}\gamma_1' - v_1'\right]\frac{\zeta^2}{x}\right\}\sin\Theta,$$

$$u_r^n = \left\{\frac{1}{x^2} u_1' - v_1' + \left[\frac{\nu}{2(\nu - 2)}\gamma_1' - v_1'\right]\frac{\zeta^2}{x^2}\right\}\cos\Theta,$$

$$u_z^n = (\gamma_1' + v_1')\frac{\zeta}{x}\cos\Theta,$$

$$\Theta^n = \gamma_1' \frac{\zeta}{x}\cos\Theta.$$

§ 3. РІШЕННЯ «l» СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛАМЕ

$$xu_\theta^l = \sum_{n=k+2,4\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{[P_0 x^{n+2} + Q_0 x^n \zeta^2 + R_0 x^{n-2m} \zeta^{2m+2}] \ln x +$$

$$+ P_1 x^{n+2} + Q_1 x^n \zeta^2 + R_1 x^{n-2m} \zeta^{2m+2}\} \sin \kappa\Theta ,$$

$$u_r^l = \sum_{n=k+2,4\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{[P_2 x^{n+1} + Q_2 x^{n-1} \zeta^2 + R_2 x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2}] \ln x +$$

$$+ P_3 x^{n+1} Q_3 x^{n-1} \zeta^2 - \frac{n}{12} x^{n-3} \zeta^4 + R_3 x^{n-2m-1} \zeta^{2m+2} + Z_3 x^{n-2m-3} \zeta^{2m+4}\Big\} \cos\kappa\Theta,$$

$$u_z^l = \sum_{n=k+2,4\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{[P_4 x^n \zeta + Q_4 x^{n-2m} \zeta^{2m+1}] \ln x + P_5 x^n \zeta +$$

$$+ Q_5 x^{n-2m} \zeta^{2m+1}\} \cos \kappa\Theta ,$$

$$\Theta^l = \sum_{n=k+2,4\ldots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Big\{\delta_n^k \Big[x^n + (-1)^m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m)!} x^{n-2m} \zeta^{2m}\Big] \ln x +$$

$$+ (-1)^m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+21^2-\kappa^2]}{(2m)!} \times$$

$$\times \Big(\sum_{p=1}^{m} \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2-\kappa^2} \Big) x^{n-2m} \zeta^{2m}\Big\} \cos \kappa\Theta,$$

де

$$P_1 = \Big[\frac{2n+4}{((n+2)^2-\kappa^2)^2} - \frac{2}{(n+2)^2-\kappa^2}\Big]\Big[\frac{\nu}{\nu-2}\kappa\delta_n^k - 2\nu_n^k - \mu_n^k\Big] - \frac{1}{(n+2)^2-\kappa^2}\mu_n^k$$

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\mu_n^k + \frac{\nu}{\nu+2}\kappa\delta_n^k - 2\nu_n^k ,$$

$$R_1 = (-1)^m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!} \times$$

$$\times \Big[2 + (m+2) \sum_{p=1}^{m} \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2-\kappa^2}\Big] \Big(\frac{\nu}{\nu-2}\kappa\delta_n^k - 2\nu_n^k\Big) -$$

$$-(-1)^m \frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!} \cdot \Big(1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2-\kappa^2}\Big)\mu_n^k,$$

$$P_3 = \Big[-\frac{1}{\kappa}\mu_n^k + \frac{\nu}{\nu-2}\delta_n^k - \frac{2}{\kappa}\nu_n^k\Big]\Big[\frac{n+3}{(n+2)^2-\kappa^2} - \frac{(2n+4)(n+2)}{((n+2)^2-\kappa^2)^2}\Big] +$$

$$+ \frac{n+2}{(n+2)^2-\kappa^2}\Big(\frac{\nu}{\nu-2}\kappa\delta_n^k - 2\nu_n^k\Big),$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}\beta_n^k - \frac{2\nu-1}{\nu-2}\delta_n^k + \frac{n}{2}\Big(\frac{5}{\kappa}\nu_n^k + \frac{1}{\kappa}\mu_n^k - \beta_n^k\Big).$$

$$R_3=(-1)^{m}\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+2)!}\left[\beta_n^k+(n-2m)\left(\frac{5}{\kappa}\nu_n^k+\frac{1}{\kappa}\mu_n^k-\beta_n^k\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{3\nu-2}{\nu-2}\delta_n^k-b_n^k\cdot\sum_{p=1}^{m}\frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2-\kappa^2}\right],$$

$$Z_3=-(-1)^m\frac{4(\nu-1)}{\nu-2}\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m)^2-\kappa^2]}{(2m+4)!}\left[\frac{2n(m+1)}{n^2-\kappa^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}(2m+1-p)\frac{2n-4p}{(n-2p)^2-\kappa^2}\right],$$

$$Q_4=(-1)^m\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+1)!}\left[\beta_n^k-\frac{(m+2)\nu}{\nu-2}\delta_n^k\right],$$

$$P_5=\beta_n^k-\frac{2\nu}{\nu-2}\delta_n^k+\frac{5}{\kappa}\nu_n^k+\frac{1}{\kappa}\mu_n^k.$$

$$Q_5=(-1)^m\frac{(n^2-\kappa^2)\ldots[(n-2m+2)^2-\kappa^2]}{(2m+1)!}\left[\frac{5}{\kappa}\nu_n^k+\frac{1}{\kappa}\mu_n^k-\beta_n^k+\right.$$

$$+\beta_n^k\left(1+\sum_{p=1}^{m}\frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2-\kappa^2}\right)-\frac{\nu}{\nu-2}\delta_n^k\times$$

$$\left.\times\left(2+(m+2)\sum_{p=1}^{m}\frac{2n-4p+4}{(n-2p+2)^2-\kappa^2}\right)\right],$$

і мають місце слідуючі співвідношення:

$$\mu_n^k-\kappa\beta_n^k+(n+4)\nu_n^k+\frac{2(\nu-1)}{\nu-2}\kappa\delta_n^k=0,$$

$$\kappa\nu_n^k-b_n^k+\frac{2(\nu-1)}{\nu-2}n\delta_n^k=0.$$

Вирази для $P_0, Q_0, R_0, P_2, Q_2, R_2, P_4$ отримаємо відповідно з виразів для $A_0, B_0, C_m^n, A_1^n, B_1^n, A_m^n$, d_0, якщо в останніх покласти $\alpha_n^k=\delta_n^k$, $a_n^k=\nu_n^k$, $d_n^k=\beta_n^k$.

Розглянемо випадок, коли $n=k$.

$$xu_\Theta^l=\sum_{n=k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{[P_6x^{n+2}+Q_6x^n\zeta^2]\ln x+P_7x^n\zeta^2+Q_7x^{n-2}\zeta^4+$$

$$+R_7x^{n-2m-2}\zeta^{2m+4}\}\sin\kappa\Theta,$$

$$u_r^l=\sum_{n=k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{[P_8x^{n+1}+Q_8x^{n-1}\zeta^2[\ln x+P_9x^{n+1}+Q_9x^{n-1}\zeta^2+$$

$$+Z_9x^{n-3}\zeta^4+R_9x^{n-2m-3}\zeta^{2m+4}\}\cos\kappa\Theta,$$

$$u_z = \sum_{n=k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [P_{10} x^n \zeta \ln x + Q_{10} x^n \zeta + R_{10} x^{n-2} \zeta^3 +$$

$$+ Z_{10} x^{n-2m-2} \zeta^{2m+3}] \cos \kappa\theta ,$$

$$\theta = \sum_{n=k-1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_n^k \Big[x^n \ln x - n x^{n-2} \zeta^2 - 2n \times$$

$$\times \frac{4...4m (n-1)...(n-m)}{(2m+2)!} x^{n-2m-2} \zeta^{2m+2} \Big] \cos \kappa\theta ,$$

де

$$P_6 = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{\nu}{\nu-2} n\delta_n^n - 2\nu_n^n + \mu_n^n \right), \quad Q_6 = -\frac{1}{2} \mu_n^n ,$$

$$P_7 = -\frac{n+2}{4(n+1)} \left(\frac{\nu}{\nu-2} n\delta_n^n - 2\nu_n^n - \mu_n^n \right), \quad Q_7 = -\frac{2n}{4!} \left(\frac{\nu}{\nu-2} n\delta_n^n - 2\nu_n^n + \mu_n^n \right),$$

$$R_7 = 2n \frac{4...4m (n-1)...(n-m)}{(2m+4)!} \left[(m+1) \left(2\nu_n^n - \frac{\nu n}{\nu-2} \delta_n^n \right) + \mu_n^n \right],$$

$$P_8 = \frac{n+2}{4(n+1)} \left[\frac{2}{n} \nu_n^n - \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{1}{n} \mu_n^n \right] - \frac{1}{n} \nu_n^n , \quad Q_8 = \frac{1}{2} \mu_n^n ,$$

$$P_9 = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{2}{n} \nu_n^n - \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \mu_n^n \right),$$

$$Z_9 = \frac{2n(n-2)}{4!} \left[\frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{2}{n} \nu_n^n - \mu_n^n \right] + \frac{n-1}{3} \nu_n^n ,$$

$$Q_9 = \frac{n(n+2)}{4(n+1)} \left(\frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{2}{n} \nu_n^n + \mu_n^n \right) + \frac{1}{2} \mu_n^n + \nu_n^n ,$$

$$R_9 = 2n(n-2m-2) \frac{4...4m(n-1)...(n-m)}{(2m+4)!} \left[\frac{(m+1)\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \frac{2(m+1)}{n} \nu_n^n - \mu_n^n \right] +$$

$$+ 2 \frac{4...4(m+1)(n-1)...(n-m-1)}{(2m+4)!} \nu_n^n , \quad P_{10} = \beta_n^n ,$$

$$Q_{10} = \frac{1}{n(n+1)} \left[-\nu_n^n + \frac{n+2}{2} \mu_n^n + \frac{n(n+2)}{2} \cdot \frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n \right],$$

$$R_{10} = \frac{n}{3} \left[\frac{\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \beta_n^n \right],$$

$$Z_{10} = 2n \frac{4...4m(n-1)...(n-m)}{(2m+3)!} \left[\frac{(m+1)\nu}{\nu-2} \delta_n^n - \beta_n^n \right]$$

і має місце залежність

$$n\nu_n^n + \mu_n^n - n\beta_n^n + \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} n\delta_n^n = 0.$$

На випадок задачі, симетричної відносно осі, одержимо:

$$u_r^l = \left(\frac{\mu_0}{2} - \frac{\nu-1}{\nu-2} \delta_0 \right) \frac{\zeta^2}{x} + (\delta_0 - \mu_0) \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \frac{x}{2} + \frac{\gamma_0}{x} +$$

$$+\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[(\chi_1 x^{n+2}+\psi_1 x^n\zeta^2+f_1 x^{n-2m}\zeta^{2m+2})\ln x+\chi_2 x^{n+2}+$$

$$+\psi_2 x^n\zeta^2+f_2 x^{n-2m}\zeta^{2m+2}],$$

$$u_z^l=\mu_0\zeta\ln x+\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[(\chi_3 x^{n+1}\zeta+\psi_3 x^{n-2m+1}\zeta^{2m+1})\ln x+$$

$$+\chi_4 x^{n+1}\zeta+f_4 x^{n-2m+1}\zeta^{2m+1}],$$

$$\Theta^l=\delta_0\ln x+\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\delta_n\Big[x^{n+1}+(-1)^m\times$$

$$\times\frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m)!}x^{n-2m+1}\zeta^{2m}\Big]\ln x+$$

$$+\delta_n^k\Big[x^{n+1}+(-1)^m\frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m)!}\Big(\frac{n+3}{n+1}+2\sigma_{m-1}\Big)x^{n-2m+1}\zeta^{2m}\Big]\Big\},$$

де

$$\chi_1=\chi_2=\frac{1}{n+3}\Big(\frac{2(\nu-1)}{\nu-2}a_n-b_n\Big),\quad \psi_1=\frac{n+1}{2}\Big(b_n-\frac{3\nu-2}{\nu-2}a_n\Big),$$

$$\psi_2=\frac{n+2}{n+1}\cdot\psi_1,\ \chi_3=b_n-\frac{\nu}{\nu-2}a_n,\ \chi_4=\chi_3,$$

$$f_1=(-1)^m\frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2(n-2m+1)}{(2m+2)!}\Big(b_n-\frac{(m+3)\nu-2}{\nu-2}a_n\Big),$$

$$f_2=\Big(\frac{n+3}{n+1}+2\sigma_{m-1}+\frac{1}{n-2m+1}\Big)\cdot f_1,$$

$$\psi_3=(-1)^m\frac{(n+1)^2\ldots(n-2m+3)^2}{(2m+1)!}\Big(b_n-\frac{(m+1)\nu}{\nu-2}a_n\Big),$$

$$f_4=\Big(\frac{n+3}{n+1}+2\sigma_{m-1}\Big)\psi_3,\ \sigma_0=0,\ \sigma_{m-1}=\sum_{k=1}^{m=1}\frac{1}{n-2\kappa+1}.$$

§ 4. ЗАДОВОЛЕННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Візьмемо компоненти зміщення в слідуючому виді:

$$xu_\Theta=xu_\Theta^б+xu_\Theta^p+xu_\Theta^n+xu_\Theta^l,$$

$$u_r=u_r^б+u_r^p+u_r^n+u_r^l,$$

$$u_z=u_z^б+u_z^p+u_z^n+u_z^l.$$

Використовуючи відомі співвідношення між напруженнями і переміщеннями, одержимо, очевидно, що і компоненти напруження будуть мати аналогічний вид:

$$\sigma_r=\sigma_r^\sigma+\sigma_r^p+\sigma_r^n+\sigma_r^l,$$

. . . .

$$\sigma_z=\sigma_z^\sigma+\sigma_z^p+\sigma_z^n+\sigma_z^l.$$

Задовольнивши граничним умовам на бічних поверхнях циліндра (розклавши попередньо ʒ різних степенів у відповідні ряди), ми використаємо сталі, які входять в рішення системи Ламе, позначене за допомогою значка *б*. Сталі, які входять в рішення *p, n, e,* визначаються з систем, які одержимо, задовольнивши умовам на торцях циліндра і умовам, які виникають при розкладі ʒ різних степенів в ряди, щоб задовольнити умовам на бічних поверхнях.

ЛІТЕРАТУРА

Ліхачов В. О. Деформація пружної безмежної пластинки з впаяним циліндром, Львів, 1959.