для скляної пластинки, підкріпленої стальним кільцем прямокутного поперечного перерізу $h \times b$ при $m = 0{,}2$; $P = Q$; $R = 10$; $h = b = 2$. В таблиці 2 дано порівняння напружень $\widehat{\theta\theta}/P$, підрахованих з врахуванням M і при $M = 0$, для кілець з різним відношенням $\frac{b}{b_1}$, де b_1 — мала піввісь еліпса.

Таблиця 1

Напруження	0	30°	45°	60°	90°
$\widehat{\theta\theta}/P$	1,56	1,46	1,31	1,16	1,04
$\widehat{\rho\rho}/P$	1,17	0,649	0,403	0,291	0,232

Таблиця 2

$\frac{b}{b_1}$	$M \neq 0$		$M = 0$	
	0	90°	0	90°
1/4	1,56	1,04	1,64	1,21
1/16	2,19	1,13	2,28	1,24

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Инженерный сборник, т. XIV, изд. АН СССР, 1953.
2. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий, ГИТТЛ, 1951.
3. К. Н. Русинко. Бюлетень наукової студентської конференції 1954 р., ч. II, Видав. Львівського університету, 1955.

Б. В. ДІТЯТЄВА

(Науковий керівник Н. П. Флейшман)

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗГИННІ КОЛИВАННЯ КРУГОВОГО ДИСКУ, ПІДКРІПЛЕНОГО РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

Добре відомо [1], що класична теорія, задовільно описуюча згинні коливання пластинок, розв'язує задачу коливання пластинок лише для небагатьох згинних видів руху. Однак виявилося, що для високочастотних видів коливань потрібно враховувати вплив інерції обертання і деформацію зсуву [2]. Для круглої пластинки в полярних координатах у випадку осьової симетрії маємо:

$$M_r = D\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\Psi\right)$$

$$M_\Theta = D\left(\nu\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}\right) \tag{1}$$

$$Q_r = k^2 \mu h\left(\Psi + \frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

$$M_{r\Theta} = Q_\Theta = 0,$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, μ, ν, h — модулі Юнга, зсуву, Пуасона і товщина відповідно; $k^2 = \frac{\pi^2}{12}$.

Функції Ψ і w зв'язані з радіальними і осьовими компонентами зміщення залежністю:

$$u_r = z\Psi(r,t)$$

$$u_z = w(r,t) \tag{2}$$

$$u_\Theta = 0.$$

Рівняння руху пластинки [2] в цьому випадку дадуть

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\Theta}{r} - Q_r = \frac{\rho h^3}{12}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3}$$

де ρ — густина пластинки.

Підставляючи (1) в (3) одержимо:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + S\frac{p^2h^3}{12D}\right)\Psi - \frac{k^2\mu h}{D}\left(\Psi + \frac{dw}{dr}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Psi + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + S\frac{p^2}{k^2\mu}\right)w = 0. \tag{4}$$

В результаті виключення Ψ знайдемо:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \delta_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \delta_2^2\right)w = 0, \tag{5}$$

де

$$\delta_1^2, \delta_2^2 = \frac{\delta_0^4}{2}\left[R + S \pm \sqrt{(R-S)^2 + 4\delta_0^{-4}}\right].$$

$$S = \frac{D}{k^2\mu h} \quad \delta_0^4 = S\frac{p^2h}{D} \quad R = \frac{h^2}{12}.$$

При введених позначеннях вираз Ψ через w має вигляд

$$\Psi = (R\delta_0^4 - S^{-1})^{-1} \frac{d}{dr}\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{ar} + (S\,\delta_0^4 + S^{-1})\right] w. \qquad (6)$$

Рішення рівняння (5) можна представити в такому виді:

$$w = w_1 + w_2\,, \qquad (7)$$

де w_1 — рішення рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \delta_i^2\right) w_i = 0 \qquad (i = 1, 2)\,. \qquad (8)$$

Тоді для Ψ маємо:

$$\Psi = (\sigma_1 - 1)\frac{dw_1}{dr} + (\sigma_2 - 1)\frac{dw_2}{dr}\,,$$

де

$$\sigma_1\,, \sigma_2 = (\delta_2^2\,, \delta_1^2)\,(R\,\delta_0^4 - S^{-1})^{-1}. \qquad (9)$$

Рівняння (8) є рівнянням *и* Бесселя нульового порядку. Їх рішення таке:

$$w_1 = A_1 J_0(\delta_1 r)$$

$$w_2 = A_2 J_0(\delta_2 r).$$

Граничні умови візьмемо у виді:

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\nu + \delta}{r}\Psi\right)_{r=a} = 0$$

$$\left(\Psi + \frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = 0\,,$$

що відповідає вільному спиранню пластинки з підкріпленим краєм. Постійна σ враховує вплив підкріплюючого кільця [3].

Підставляючи Ψ із (9) і w із (7) в граничні умови, одержуємо:

$$(\sigma_1 - 1)\frac{d^2 w_1}{dr^2} + (\sigma_2 - 1)\frac{d^2 w_2}{dr^2} +$$

$$+ \frac{\nu + \delta}{r}(\sigma_1 - 1)\frac{dw_1}{dr} + \frac{\nu + \delta}{r}(\sigma_2 - 1)\frac{dw_2}{dr} = 0\,,$$

$$(\sigma_1 - 1)\frac{dw_1}{dr} + (\sigma_2 - 1)\frac{dw_2}{dr} + \frac{dw_1}{dr} + \frac{dw_2}{dr} = 0\,. \qquad (10)$$

Прирівнюючи детермінант системи (10) нулю, одержуємо рівняння частот. Після деяких перетворень будемо мати:

$$\frac{g - \beta^2}{g + 1}\gamma\Gamma_1 + \frac{1 - g\beta^2}{1 + g}\beta\gamma\Gamma_2 - [1 - (\nu + \delta)]\,(1 - \beta^2) = 0$$

$$\cdot \left[1 - \beta^2 (g+1)^2 / g (1+\beta^2)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = p/\bar{p}$$

$$d/h = \gamma (\bar{p}/p) \left[(1+\beta^2)/3(1+g)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де

$$\beta = \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \quad \gamma = \delta_1 a \quad g = \frac{R}{S}$$

$$\Gamma_1 = \frac{J_0(\gamma)}{J_1(\gamma)}, \quad \Gamma_2 = \frac{J_0(\beta\gamma)}{J_1(\beta\gamma)}, \quad \bar{p} = \pi(\mu)\rho^{1/2} h.$$

В цих трьох рівняннях міститься повне рішення задачі для випадку $p > \bar{p}$. Випадок $p < \bar{p}$ одержується, якщо покласти $\beta = i\beta_1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Deresevich and R. D. Mindlin. Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, № 1, p.p. 86—88, 1955.

2. R. D. Mindlin. Journal of Applied Mechanics Vol. 18, № 1, p.p. 31—38, 1951.

3. Г. Н. Савин и Н. П. Флейшман. Инженерный сборник Ин-та механики АН СССР, т. 8, стр. 77—82, М., 1950.