ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. ІВ. ФРАНКА

ЗБІРНИК РОБІТ АСПІРАНТІВ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТА ФІЗИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТІВ

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1961

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. ІВ. ФРАНКА

ЗБІРНИК РОБІТ АСПІРАНТІВ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТА ФІЗИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТІВ

ВИПУСК ПЕРШИЙ

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1961

Друкується за рішенням Редакційно-видавничої ради
Львівського ордена Леніна державного університету
ім. Ів. Франка

Черговий збірник праць аспірантів Львівського університету включає двадцять одну статтю аспірантів кафедр диференціальних рівнянь, механіки, обчислювальної математики, теорії функцій та ін. Результати праць нові, становлять науковий та практичний інтерес. Збірник розрахований на викладачів математики, аспірантів, студентів.

Відповідальний редактор
проф. М. П. Шереметьєв

Редактор Б. В. Полубічко
Технічний редактор А. В. Малявко
Коректор Н. І. Трофимович

Львовский ордена Ленина государственный университет
имени Ивана Франко.
СБОРНИК РАБОТ АСПИРАНТОВ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТОВ.
Выпуск первый.

БГ 03572. Здано до набору 25/I-1961 р. Підписано до друку 25/X-1961 р. Формат 70×108 1/16. Паперов. арк. 4,25. Умов. друк. арк. 11,64. Обл.-вид. арк. 9,12. Тираж 1000. Ціна 46 коп.
Зам. № 111.

Львівська книжкова друкарня Головполіграфвидаву
Міністерства культури УРСР. Львів, Пекарська, 11.

С. П. ГАВЕЛЯ, А. М. КУЗЕМКО

ЗАСТОСУВАННЯ РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Специфічні властивості диференціальних рівнянь пружної рівноваги пологих оболонок дозволяють досягти деяких спрощень при зведенні різних крайових задач для таких оболонок до регулярних інтегральних рівнянь (в порівнянні із загальним методом Я. Б. Лопатинського [2]). Зокрема виявляється можливим використати відомі результати з теорії потенціалу, що стосуються відповідних крайових задач для бігармонійного рівняння або для системи Ляме на площині. Застосування функцій Гріна дає можливість зводити розглядувані задачі теорії оболонок до розв'язуючої системи двох (а в ряді випадків одного) регулярних інтегральних рівнянь. Наведемо приклад зведення до регулярних інтегральних рівнянь задачі про жорстко-шарнірне закріплення пологої оболонки.

ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧ ДО ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

Пружна рівновага пологої оболонки описується, як відомо [1], системою рівнянь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+(k_1+\sigma k_2)\frac{\partial w}{\partial x_1}=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1,$$

$$\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+(k_2+\sigma k_1)\frac{\partial w}{\partial x_2}=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2,$$

$$(k_1+\sigma k_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(k_2+\sigma k_1)\frac{\partial v}{\partial x_2}+[(k_1+k_2)^2-2(1-\sigma)k_1k_2]\,w+ \tag{1}$$

$$+\frac{h^2}{12}\Delta\Delta w=\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_3,$$

або при $X_1=X_2=0$ ([1], стор. 308).

$$\Delta\Delta\Phi-Eh\,\nabla w=0,$$

$$\Delta\Delta w+\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\nabla\Phi=\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}X_3, \tag{2}$$

де

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

$\Phi(x)$ — функція напружень, що зв'язана з компонентами u, v, w вектора зміщень формулами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x_1} + (k_2 + \sigma k_1) w\right],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma \frac{\partial v}{\partial x_2} + (k_1 + \sigma k_2) w\right],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{Eh}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right),$$

де $k_1 = k_1(x)$, $k_2 = k_2(x)$ — головні кривизни оболонки, $x_1 = x_1(x)$, $x_2 = x_2(x)$, $x_3 = x_3(x)$ — компоненти зовнішнього поверхневого навантаження, h — товщина оболонки, σ — коефіцієнт Пуассона, E — модуль пружності матеріалу, $x = (x_1, x_2)$ (як і надалі $y = (y_1, y_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ і т. д.).

При розв'язуванні деяких крайових задач (наприклад, задачі про жорстке защемлення краю) зручніше користуватись системою диференціальних рівнянь у вигляді (1), в той час як для інших задач (наприклад, про вільно-шарнірне спирання) виявляється більш зручною форма (2). Можна застосувати такий загальний запис обох цих систем (із збереженням потрібних у наступному властивостей):

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) Z + a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w = f,$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w + b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) Z = \varphi - \delta w, \tag{3}$$

де в першому випадку

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1-\sigma}{2}\Delta + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{1-\sigma}{2}\Delta + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \beta(x)\frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \alpha(x) = k_1 + \sigma k_2, \quad \beta(x) = k_2 + \sigma k_1,$$

$$B\frac{\partial}{\partial x} = \Delta\Delta, \quad b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \beta(x)\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

$$f = -\frac{1-\sigma^2}{Eh}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1-\sigma^2}{Eh}X_3, \ Z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\delta = [(k_1 + k_2)^2 - 2(1-\sigma)k_1 k_2],$$

у другому випадку

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \Delta\Delta, \tag{5}$$

$$b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\nabla, \quad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -Eh\nabla,$$

$$Z(x) = \Phi(x), \quad f = 0, \quad \varphi = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} x_3, \; \delta = 0.$$

Введемо також такі загальні позначення для різних крайових умов:

$$PZ(y) = 0, \; Qw(y) = 0, \; (y \in S), \tag{6}$$

де S — границя розглядуваної області Ω, а P та Q — матриці відповідного розміру лінійних диференціальних операторів.

Користуючись тією обставиною, що шукані функції w та Z в рівняннях (3) зв'язані між собою лише через молодші похідні, зведення задачі (3) та (6) до регулярних інтегральних рівнянь можна досягти так. Спочатку розглянемо допоміжні задачі

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) Z = F(x), \; (x \in \Omega), \; PZ(y) = 0, \; (y \in S) \tag{7}$$

та

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w = \Psi(x), \; (x \in \Omega), \; Qw(y) = 0, \; (y \in S). \tag{8}$$

Зведення таких задач до регулярних інтегральних рівнянь (наприклад, методом Я. Б. Лопатинського [2]) порівняно нескладне, а в ряді випадків здійснене ([3], [4]). Розв'язання одержуваних в результаті інтегральних рівнянь визначають функції Гріна $H(x,\xi)$ та $\Gamma(x,\xi)$ задач (7) та (8) відповідно. Розв'язання $Z(x)$ та $w(x)$ цих задач визначаються виразами

$$Z(x) = \iint_{\Omega} H(x,\xi) F(\xi) d_{\xi} \Omega, \tag{9}$$

$$w(x) = \iint_{\Omega} \Gamma(x,\xi) \Psi(\xi) d_{\xi} \Omega. \tag{10}$$

Підрозуміваючи, далі, під $F(\xi)$ та $\Psi(\xi)$ функції

$$F(\xi) = f(\xi) - \mu(\xi) \tag{11}$$

та

$$\Psi(\xi) = \varphi(\xi) - \nu(\xi) - \delta w, \tag{12}$$

де

$$\mu(\xi) = a\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) w(\xi),$$

$$\nu(\xi) = b\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) Z(\xi),$$

та позначаючи

$$K(x,\xi) = \iint_{\Omega} \Gamma(x,\zeta) b\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) H(\zeta,\xi) d_{\zeta} \Omega,$$

$$M(x,\xi) = \iint_{\Omega} H(x,\zeta) a\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \Gamma(\zeta,\xi) d_{\zeta} \Omega,$$

$$\chi(x) = \iint_{\Omega} [\Gamma(x,\xi)\varphi(\xi) - K(x,\xi) f(\xi)] d_{\xi} \Omega,$$

$$\psi(x) = \iint\limits_{\Omega} H(x, \xi) f(\xi) - M(x, \xi) \varphi(\xi)] \, d_\xi \Omega,$$

одержуємо розв'язуючу систему інтегральних рівнянь:

$$\mu(x) = a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \chi(x) + \iint\limits_{\Omega} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) K(x, \xi) \mu(\xi) \, d_\xi \Omega -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x, \xi) w(\xi) \, d_\xi \Omega, \qquad (13)$$

$$w(x) = \chi(x) + \iint\limits_{\Omega} K(x, \xi) \mu(\xi) \, d_\xi \Omega - \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x, \xi) \delta(\xi) w(\xi) \, d_\xi \Omega,$$

або

$$\nu(x) = b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) + \iint\limits_{\Omega} b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) M(x, \xi) \nu(\xi) \, d_\xi \Omega + \qquad (14)$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) M(x, \xi) \delta(\xi) w(\xi) \, d_\xi \Omega,$$

$$w(x) = \iint\limits_{\Omega} \quad (x, \xi) \varphi(\xi) \, d_\xi \Omega - \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x, \xi) \nu(\xi) \, d_\xi \Omega -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x, \xi) \delta(\xi) w(\xi) \, d_\xi \Omega.$$

Регулярність одержаних інтегральних рівнянь (13) та (14) — наслідок того, що оператори $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ містять у собі диференціювання більш низького порядку в порівнянні з $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ відповідно. Слід відмітити, що система (14) дещо простіша від системи (13). Крім того, ці системи перетворюються в окремі рівняння у випадку $\delta = 0$ (5).

Розв'язуюча система інтегральних рівнянь може бути одержана і в простішому вигляді:

$$\mu(x) + \iint\limits_{\Omega} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x, \xi) \nu(\xi) \, d_\xi \Omega = f,$$

$$\nu(x) + \iint\limits_{\Omega} \left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \delta(x) \right] H(x, \xi) \mu(\xi) \, d_\xi \Omega = \varphi, \qquad (15)$$

де $\mu(x)$ та $\nu(x)$ — густини потенціалів

$$Z(x) = \iint\limits_{\Omega} H(x, \xi) \mu(\xi) \, d_\xi \Omega, \qquad (16)$$

$$w(x) = \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x, \xi) \nu(\xi) \, d_\xi \Omega.$$

Система (15) зводиться до одного з (матричних) рівнянь:

$$\mu(x) = f^*(x) + \iint_\Omega K(x, \xi)\, \mu(\xi)\, d_\xi \Omega$$

або

$$\nu(x) = \varphi^*(x) + \iint_\Omega M(x, \xi)\, \nu(\xi)\, d_\xi \Omega. \tag{17}$$

Тут

$$K(x, \xi) = \iint_\Omega a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x, \zeta) \left[b\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) - \delta(\zeta) \right] H(\zeta, \xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$M(x, \xi) = \iint_\Omega \left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \delta(x) \right] H(x, \zeta)\, a\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \Gamma(\zeta, \xi)\, d_\zeta \Omega,$$

$$f^*(x) = f(x) - \iint_\Omega a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \iint_\Omega \left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \delta(x) \right] H(x, \xi)\, f(\xi)\, d_\xi \Omega.$$

Одержані інтегральні рівняння (17), як і рівняння (13), (14), необмежено розв'язні при достатній малості головних кривизн.

ЖОРСТКО-ШАРНІРНЕ ЗАКРІПЛЕННЯ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ

Пропонований спосіб проілюструємо на задачі про шарнірне закріплення пологої оболонки. Крайові умови в цьому випадку будуть:

$$u|_s = v|_s = w|_s = \Delta w|_s = 0. \tag{18}$$

Позначення $\Delta w = \omega$ дозволяє записати цю задачу так:

$$\frac{1-\sigma}{2} \Delta u + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} = f_1(x), \tag{19}$$

$$\frac{1-\sigma}{2} \Delta v + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \beta \frac{\partial w}{\partial x_2} = f_2(x), \tag{20}$$

$$\Delta \omega + \frac{12\delta}{h^2} w + \frac{12\alpha}{h^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{12\beta}{h^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} = \varphi(x), \tag{21}$$

$$\Delta w - \omega = 0, \tag{22}$$

$$u|_s = v|_s = 0, \tag{23}$$

$$w|_s = \omega|_s = 0. \tag{24}$$

Нехай $H(x, \xi)$ та $\Gamma(x, \xi)$ — функції Гріна задач

$$\frac{1-\sigma}{2} \Delta u + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) = f_1^*(x),$$

$$\frac{1-\sigma}{2} \Delta v + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) = f_2^*(x), \tag{25}$$

$$u|_s = v|_s = 0$$

та

$$\begin{gathered}\Delta\omega=\varphi_1(x),\\ \Delta w=\varphi_2(x),\\ \omega\big|_s=w\big|_s=0\end{gathered}\tag{26}$$

відповідно. Скориставшись відомим зведенням задач (25), (26) до інтегральних рівнянь, для визначення цих функцій Гріна матимемо:

$$H(x,\xi)=\Theta(x,\xi)+\nu(x,\xi),$$
$$\Gamma(x,\xi)=G(x,\xi)+g(x,\xi),$$

де

$$\Theta(x,\xi)=\frac{1}{4\pi(1-\sigma)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}(3-\sigma)\ln|x-\xi|-(1+\sigma)\frac{(x_1-\xi_1)^2}{|x-\xi|^2} & -(1+\sigma)\frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^2}\\ -(1+\sigma)\frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^2} & (3-\sigma)\ln|x-\xi|-(1+\sigma)\frac{(x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^2}\end{pmatrix},$$

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}I,\quad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\vartheta(x,\xi)=\int_S T(x,\zeta)p(\zeta,\xi)d_\zeta S,\ g(x,\xi)=\int_S L(x,\zeta)q(\zeta,\xi)d_\zeta S.$$

$p(\zeta,\xi)$ та $q(\zeta,\xi)$ — розв'язки відомих регулярних інтегральних рівнянь

$$p(y,\xi)+\int_S T(y,\eta)p(\eta,\xi)d_\eta S+\Theta(y,\xi)=0,$$
$$(y\in S)$$
$$q(y,\xi)+\int_S L(y,\eta)q(\eta,\xi)d_\eta S+G(y,\xi)=0$$

з ядрами

$$T(y,\eta)=\frac{2(y-\eta,n(\eta))}{\pi(3-\sigma)|y-\eta|^2}\Bigg\{(1-\sigma)I+\frac{1+\sigma}{|y-\eta|^2}+$$
$$+\begin{pmatrix}(y_1-\eta_1)^2 & (y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2)\\ (y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2) & (y_2-\eta_2)^2\end{pmatrix}\Bigg\},$$
$$L(y,\eta)=\frac{(y-\eta,n(\eta))}{\Pi|y-\eta|^2}I,$$

де $n(\eta)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до контуру.

Шукаючи розв'язок задач (19), (20), (21), (22), (23) та (24) у вигляді

$$Z(x)=\iint_\Omega H(x,\xi)\mu(\xi)d_\xi\Omega,$$

$$w^*(x)=\iint_\Omega \Gamma(x,\xi)\nu(\xi)d_\xi\Omega,$$

де

$$Z(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\ v(x)\end{pmatrix},\quad w^*(x)=\begin{pmatrix}\omega(x)\\ w(x)\end{pmatrix},$$

дістанемо систему інтегральних рівнянь:

$$\mu_1(x)+\iint\limits_{\Omega}\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\Gamma_{11}(x,\ \xi)\nu_1(\xi)+\Gamma_{12}(x,\ \xi)\nu_2(\xi)\Big]d_\xi\Omega=f_1(x), \tag{27}$$

$$\mu_2(x)+\iint\limits_{\Omega}\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big[\Gamma_{21}(x,\ \xi)\nu_1(\xi)+\Gamma_{22}(x,\ \xi)\nu_2(\xi)\Big]d_\xi\Omega=f_2(x), \tag{28}$$

$$\nu_1(x)+\frac{12\delta}{h^2}\Big\{\iint\limits_{\Omega}[\Gamma_{11}(x,\xi)\nu_1(\xi)+\Gamma_{12}(x,\xi)\nu_2(\xi)]\,d_\xi\Omega+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\xi)}{\partial x_1}+\beta(x)\frac{\partial H_{21}(x,\xi)}{\partial x_2}\Big)\mu_1(\xi)+\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\xi)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\xi)}{\partial x_2}\Big)\mu_2(\xi)\Big]d_\xi\Omega=\varphi(x), \qquad (29$$

$$\nu_2(x)=\iint\limits_{\Omega}\Gamma_2(x,\ \xi)\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega+\iint\limits_{\Omega}\Gamma_{22}(x,\ \xi)\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega. \tag{30}$$

Виключення з (29) невідомих $\mu_1(\xi)$ та $\mu_2(\xi)$ за формулами (27) та (28) приводить, нарешті, до розв'язуючої системи регулярних інтегральних рівнянь:

$$\nu_1(x)+\iint\limits_{\Omega}T_{11}(x,\ \xi)\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega+\iint\limits_{\Omega}T_{12}(x,\xi)\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega=\varphi^*(x),$$

$$\nu_2(x)-\iint\limits_{\Omega}\Gamma_{21}(x,\ \xi)\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega-\iint\limits_{\Omega}\Gamma_{22}(x,\ \xi)\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega=0,$$

де

$$T_{11}(x,\xi)=\frac{12\delta}{h^2}\Big\{\Gamma_{11}(x,\xi)-\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{21}(x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\alpha(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\Gamma_{11}(\zeta,\xi)+\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\beta(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\Gamma_{21}(\zeta,\xi)\Big]d_\zeta\Omega\Big\},$$

$$T_{12}(x,\xi)=\frac{12\delta}{h^2}\Big\{\Gamma_{12}(x,\ \xi)-\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{21}\,x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\alpha(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\Gamma_{12}(\zeta,\ \xi)+\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\beta(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\Gamma_{22}(\zeta,\ \xi)\Big]d_\zeta\Omega\Big\},$$

$$\varphi^*(x)=\varphi(x)+\frac{12\delta}{h^2}\left\{\iint\limits_{\Omega}\left[\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\xi)}{\partial x_1}+\beta(x)\frac{\partial H_{21}(x,\xi)}{\partial x_2}\right]f_1(\xi)\,d_\xi\Omega+\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{\Omega}\left[\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\xi)}{\partial x_1}+\beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\xi)}{\partial x_2}\right]f_2(\xi)\,d^\xi\Omega.\right.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек, ГИТТЛ, 1949.
2. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. № 5, 1953.
3. Панич О. И. Мат. сбор., н. с. 50 (92), № 3, 1960.
4. Цандеков М. И. Труды Тбилисского университета, т. 56, 1955.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

В. М. ГЕМБАРА

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛОВОМУ РЕЖИМІ

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Як відомо [2, 8], осесиметричний напружений стан тонкої конічної оболонки, яка знаходиться в нерівномірному температурному полі, визначається за допомогою двох функцій N і Θ, що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\alpha^2 \frac{d^2 N}{d\alpha^2} + \alpha \frac{dN}{d\alpha} - N + (1-\nu^2) D_0 l \operatorname{ctg}\omega \cdot \alpha\Theta + (1-\nu) l\alpha^2 \frac{dN_t}{d\alpha} = 0,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2\Theta}{d\alpha^2} + \alpha \frac{d\Theta}{d\alpha} - \Theta - \frac{l \operatorname{ctg}\omega}{D_2} \alpha N - \frac{l}{D_2} \alpha C - \frac{l\alpha^2}{D_2} \frac{dM_t}{d\alpha} = 0, \tag{1}$$

де $D_0 = \frac{E\delta}{1-\nu^2}$ і $D_2 = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ — жорсткості відповідно на розтяг і згин;

$$N = l\alpha N_\alpha, \quad \Theta = -\frac{1}{l} \frac{dw}{d\alpha},$$

$$N_t = \frac{\alpha_t E}{1-\nu} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} t(\alpha, \gamma; \tau)\, d\gamma, \quad M_t = \frac{\alpha_t E}{1-\nu} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \gamma t(\alpha, \gamma; \tau)\, d\gamma; \tag{2}$$

N_α — нормальне зусилля, віднесене до одиниці довжини паралелі; α — безрозмірна координата (початок координат взято у вершині конуса, $\alpha = \frac{x}{l}$); 2ω — кут розхилу конуса; ν — коефіцієнт Пуассона; E — модуль Юнга; α_t — коефіцієнт температурного розширення; δ — товщина оболонки; l — довжина твірної конуса; $t(\alpha, \gamma; \tau)$ — температура в точці (α, γ); γ — віддаль точок оболонки до її середньої поверхні; w — зміщення в напрямку зовнішньої нормалі до поверхні.

З системи диференціальних рівнянь (1) для визначення N і Θ одержимо:

$$\alpha^3 \frac{d^4\Theta}{d\alpha^4} + 4\alpha^2 \frac{d^3\Theta}{d\alpha^3} + b\alpha\Theta = -\frac{lC}{D_2} - \frac{(1-\nu) l^2 \operatorname{ctg}\omega}{D_2} \alpha^2 \frac{dN_t}{d\alpha} - \\ - \frac{3 l\alpha^2}{D_2} \frac{d^2 M_t}{d\alpha^2} - \frac{l\alpha^3}{D_2} \frac{d^3 M_t}{d\alpha^3} \tag{3}$$

$$N = \frac{D_2}{l \operatorname{ctg} \omega}\left(\alpha \frac{d^2\Theta}{d\alpha^2} + \frac{d\Theta}{d\alpha} - \frac{\Theta}{\alpha} - \frac{l\alpha}{D_2}\frac{dM_t}{d\alpha} - \frac{Cl}{D_2}\right), \qquad (4)$$

де $b = \frac{D_0}{D_2}(1 - \nu^2) l^2 \operatorname{ctg}^2 \omega$, C — стала, що визначається з граничних умов.

Крім рівнянь (1) або (3) і (4), шукані функції N і Θ повинні задовольняти граничні умови, які для вільних від зовнішніх зусиль країв оболонки набирають вигляду

$$N_\alpha = 0,\ M_\alpha = 0 \text{ і } Q = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_i,\ i = 0{,}1. \qquad (5)$$

Додатні напрямки зусиль і моментів показано на рис. 1.

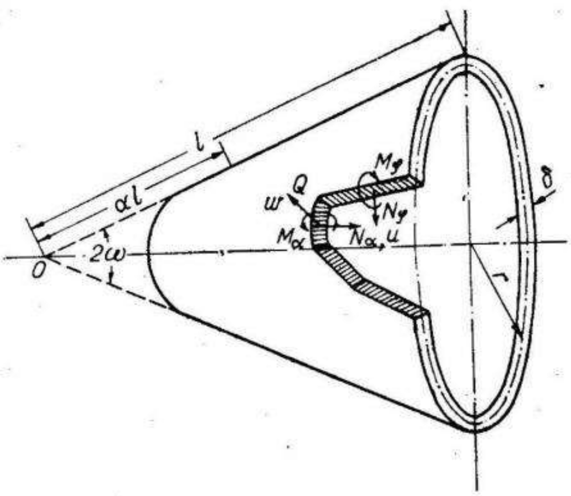


Рис. 1.

Як видно з (1) і (2), коли фізико-механічні властивості матеріалу не залежать від температури, зусилля і моменти в оболонці повністю визначаються величинами

$$T = \frac{1}{\delta}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} t(\alpha,\ \gamma;\ \tau)\, d\gamma \text{ і } T^* = \frac{12}{\delta^2}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \gamma\, t(\alpha,\ \gamma;\ \tau)\, d\gamma,$$

що зв'язані з N_t і M_t співвідношеннями

$$N_t = \frac{\alpha_t E \delta}{1 - \nu} T \text{ і } M_t = \frac{\alpha_t E \delta^2}{12\,(1 - \nu)} T^*. \qquad (6)$$

У випадку, коли тепловіддача з поверхень оболонки відбувається за законом Ньютона [5], для визначення величин T і T^* має місце система двох диференціальних рівнянь [6, 7]

$$\frac{1}{l^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{\delta}(h_1 t_1 + h_2 t_2) = \frac{c\rho}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial\tau} - \frac{1}{\delta}(h_1 t_1^c + h_2 t_2^c),$$

$$\frac{1}{l^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial T^*}{\partial\alpha}\right) - \frac{6}{\delta}(h_1 t_1 - h_2 t_2) - \frac{12}{\delta^2}(t_1 - t_2) = \frac{c\rho}{\lambda}\frac{\partial T^*}{\partial\tau} - \frac{6}{\delta}(h_1 t_1^c - h_2 t_2^c),$$

де c — питома теплоємність; ϱ — питома густина; λ — коефіцієнт теплопровідності; h_1 і h_2 — відносні коефіцієнти тепловіддачі з поверхень $\pm\frac{\delta}{2}$; t_1^c і t_2^c — значення температури навколишнього середовища з боку поверхень $\pm\frac{\delta}{2}$; t_1 і t_2 — значення температури відповідно на поверхнях $\gamma=+\frac{\delta}{2}$ і $\gamma=-\frac{\delta}{2}$.

Якщо в цих рівняннях припустити, що $h_1=h_2=h$, $t_1^c=t_2^c=t_c$, і прийняти лінійний закон розподілу температури по товщині стінки, то у випадку, коли граничні значення температури на краю оболонки є парними функціями змінної γ, виявляється, що $T^*\equiv 0$, а для визначення величини T має місце таке диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{l^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right)-2\frac{h}{\delta}T=\frac{c\rho}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial\tau}-2\frac{h}{\delta}T_c \tag{7}$$

при крайових умовах виду:

$$T=T_c \text{ при } \tau=0 \text{ і } T=T_i \text{ при } \alpha=\alpha_i, i=0,1. \tag{8}$$

Надалі будемо розглядати конічну оболонку, замкнуту у вершині. Користуючись перетворенням Лапласа [3, 5], знайдемо розв'язок задачі (7) і (8) у формі:

$$T=T_c+\frac{T_0-T_c}{I_0(g)}I_0(\alpha g)+$$

$$+(T_0-T_c)e^{-\frac{2ah}{\delta}\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2a\sqrt{2\frac{h}{\delta}+\frac{p_k}{a}}\,I_0\left(\alpha l\sqrt{2\frac{h}{\delta}+\frac{p_k}{a}}\right)}{p_k I_0\left(l\sqrt{2\frac{h}{\delta}+\frac{p_k}{a}}\right)}e^{-\mu_k^2F_0}, \tag{9}$$

де $a=\frac{\lambda}{c\rho}$ — коефіцієнт температуропровідності; $F_0=\frac{a\tau}{l^2}$ — критерій Фур'є; $p_\kappa=-a\left(2\frac{h}{\delta}+\frac{\mu_k^2}{l^2}\right)$; μ_k — корені рівняння $I_0(z)=0$, $k=0, 1, 2, \ldots$; $I_0(x)$ — функція Бесселя 1-го роду, $I_0(x)$ — модифікована функція Бесселя.

Підставляючи вираз (9) для температури T у співвідношення (6) і враховуючи при цьому, що $T^*=0$, одержимо формули для N_t і M_t, в результаті внесення яких в систему рівнянь (3) і (4) матимемо вихідні рівняння для визначення функцій N і Θ:

$$\alpha^3\frac{d^4\Theta}{d\alpha^4}+4\alpha^2\frac{d^3\Theta}{d\alpha^3}+b\alpha\Theta=-\frac{lC}{D_2}-$$

$$-\frac{\alpha_t E\delta l^2\operatorname{ctg}\omega}{D_2}(T_0-T_c)e^{-\frac{2ah}{\delta}\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\alpha l\left(2\frac{h}{\delta}+\frac{p_k}{a}\right)I_1\left(\alpha l\sqrt{2\frac{h}{\delta}+\frac{p_k}{a}}\right)}{p_k I_0\left(l\sqrt{2\frac{h}{\delta}+\frac{p_k}{a}}\right)}e^{-\mu_k^2F_0}$$

$$N=\frac{D_2}{l\operatorname{ctg}\omega}\left(\alpha\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}+\frac{d\Theta}{d\alpha}-\frac{\Theta}{\alpha}\right).$$

ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЬ І МОМЕНТІВ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛОВОМУ РЕЖИМІ

Розглянемо для прикладу конічну оболонку, замкнуту у вершині, при стаціонарному тепловому **режимі.**

Як видно з формули (9), при досить великих значеннях τ тепловий потік можна вважати стаціонарним, тобто

$$T_{cm} = T_c + \frac{T_0 - T_c}{I_0(g)} I_0(\alpha g), \tag{10}$$

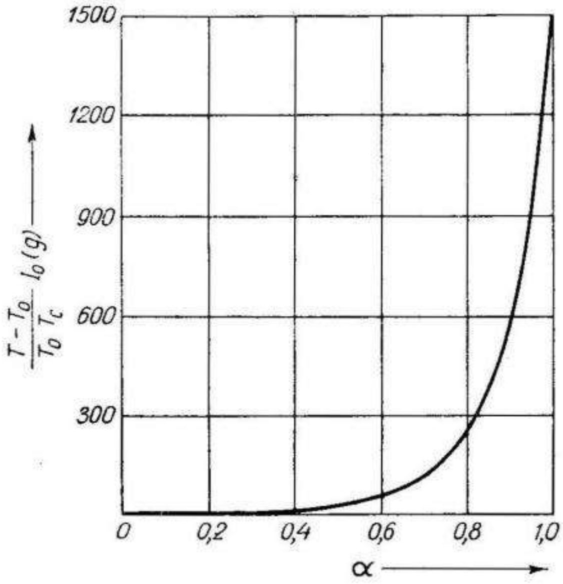


Рис. 2.

де

$$g = l\sqrt{2\frac{h}{\delta}}.$$

Стаціонарний розподіл температури в оболонці для розглядуваного випадку зображено на рис. 2.

Використовуючи вирази (10), (6) і враховуючи, що $T^* \equiv 0$, одержимо, виходячи з системи диференціальних рівнянь (3) і (4), такі рівняння для визначення функцій N і Θ:

$$\alpha^2 \frac{d^4\Theta}{d\alpha^4} + 4\alpha \frac{d^3\Theta}{d\alpha^3} + b\Theta = k(T_0 - T_c)\,\alpha I_1(\alpha g) \tag{11}$$

і

$$N = \frac{D_2}{l \operatorname{ctg} \omega}\left(\alpha \frac{d^2\Theta}{d\alpha^2} + \frac{d\Theta}{d\alpha} - \frac{\Theta}{\alpha}\right), \tag{12}$$

де

$$k = -\frac{\alpha_t E\delta\, l^2 g \operatorname{ctg} \omega}{D_2 I_0(g)}.$$

Розв'язок системи рівнянь (11) і (12) при граничних умовах (5) виглядає так:

$$\Theta = C_1 F_2(x) + C_2 F_1(x) + \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}\alpha^{2m+4} \tag{13}$$

і

$$N = \frac{D_2}{l \operatorname{ctg} \omega}\Big\{\sqrt{b}\left[-C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)\right] + (T_0 - T_c)\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(2m+5)(2m+3)\,\alpha^{2m+3}\Big\}, \tag{14}$$

де

$$F_1(x) = \operatorname{bei} x + \frac{2}{x}\operatorname{ber}' x; \qquad F_2(x) = \operatorname{ber} x - \frac{2}{x}\operatorname{bei}' x;$$

ber' x, *bei' x* — похідні по x відповідно від функцій Томпсона [1] *ber x* і *bei x*; $x = 2\sqrt[4]{b}\sqrt{\alpha}$;

$$A_{2m} = \frac{kq_m - bA_{2m-2}}{(2m+5)(2m+4)(2m+3)(2m+2)}; \; A_0 = \frac{kq_0}{5!};$$

$$q_m = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)^{2m+1}}{m!\,(m+1)!};$$

C_1 і C_2 визначаються з граничних умов (5).

Використовуючи рівняння рівноваги, закон Гука і рівняння сумісності деформацій для конічної оболонки, легко знайти вирази для зусиль і моментів через функції N і Θ, а саме:

$$N_\alpha = \frac{N}{l\alpha}, \quad Q = N_\alpha \operatorname{ctg}\omega, \quad N_\varphi = \frac{1}{l}\frac{dN}{d\alpha},$$

$$M_\alpha = -\frac{D_2}{l^2}\left(\frac{d^2w}{d\alpha^2} + \frac{\nu}{\alpha}\frac{dw}{d\alpha}\right)$$

і

$$M_\varphi = -\frac{D_2}{l^2}\left(\nu\frac{d^2w}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{dw}{d\alpha}\right),$$

де $\frac{dw}{d\alpha} = -l\Theta$; N_α, Q, M_α — відповідно нормальне й поперечне зусилля та згинаючий момент, віднесені до одиниці довжини паралелі; N_φ і M_φ — відповідно нормальне зусилля і згинаючий момент, віднесені до одиниці довжини твірної конуса.

В результаті підстановки виразів (13) і (14) для функцій N і Θ у вирази для зусиль і моментів одержимо формули:

$$N_\alpha = \frac{D_2}{l^2 \operatorname{ctg}\omega}\left\{\frac{\sqrt{b}}{\alpha}\left[-C_1F_1(x) + C_2F_2(x)\right] + (T_0 - T_c)\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(2m+5)(2m+3)\alpha^{2m+2}\right\}; \tag{15}$$

$$Q = N_\alpha \operatorname{ctg}\omega; \tag{16}$$

$$N_\varphi = \frac{D_2}{l^2 \operatorname{ctg}\omega}\left\{\frac{2b}{x}\left[-C_1H_1(x) + C_2H_2(x)\right] + (T_0 - T_c)\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(2m+5)(2m+3)^2\alpha^{2m+2}\right\}; \tag{17}$$

$$M_\alpha = \frac{D_2}{l}\left\{C_1\left[\frac{2\sqrt{b}}{x}H_2(x) + \frac{\nu}{\alpha}F_2(x)\right] + C_2\left[\frac{2\sqrt{b}}{x}H_1(x) + \frac{\nu}{\alpha}F_1(x)\right] + (T_0 - T_c)\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(2m+4+\nu)\alpha^{2m+3}\right\}; \tag{18}$$

$$M_\varphi = \frac{D_2}{l}\left\{C_1\left[\frac{2\nu\sqrt{b}}{x}H_2(x) + \frac{1}{\alpha}F_2(x)\right] + C_2\left[\frac{2\nu\sqrt{b}}{x}H_1(x) + \frac{1}{\alpha}F_1(x)\right] + \right.$$

$$\left. + (T_0 - T_c)\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}[(2m+4)\nu + 1]\alpha^{2m+3}\right\}, \tag{19}$$

де

$$H_1(x) = bei'x - \frac{4}{x^2}ber'x - \frac{2}{x}beix;\; H_2(x) = ber'x +$$

$$+ \frac{4}{x}bei'x - \frac{2}{x}berx.$$

У випадку вільного від зовнішнього навантаження краю оболонки, згідно з умовами (5), для постійних C_1 і C_2 одержуємо:

$$C_1 = (T_0 - T_c)\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{2m}\left\{\frac{1}{\sqrt{b}}(2m+5)(2m+3)\left[\sqrt[4]{b}H_1(x_0) + \right.\right.}{F_1(x_0)\left[\sqrt[4]{b}H_1(x_0) + \nu F_1(x_0)\right] +}$$

$$\frac{\left.\left. + \nu F_1(x_0)\right] - (2m + 4 + \nu)F_2(x_0)\right\}}{+ F_2(x_0)\left[\sqrt[4]{b}H_2(x_0) + \nu F_2(x_0)\right]}, \tag{20}$$

$$C_2 = (T_0 - T_c)\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{2m}\left\{(2m + 4 + \nu)F_1(x_0) + \right.}{F_1(x_0)\left[\sqrt[4]{b}H_1(x_0) + \nu F_1(x_0)\right] +}$$

$$\frac{\left. + \frac{1}{\sqrt{b}}(2m+5)(2m+3)\left[\sqrt[4]{b}H_2(x_0) + \nu F_2(x_0)\right]\right\}}{+ F_2(x_0)\left[\sqrt[4]{b}H_2(x_0) + \nu F_2(x_0)\right]}, \tag{21}$$

де $x_0 = x\,|_{\alpha=1} = 2\sqrt[4]{b}$.

Розглянемо тепер випадок, коли $b \gg 1$, що має місце в багатьох практичних задачах. Тоді частковий розв'язок рівняння (11) можна одержати [4] наближено у формі

$$\Theta_1 = (T_0 - T_c)\frac{k}{b}\alpha I_1(\alpha g).$$

При цьому для функцій N і Θ одержимо формули

$$\Theta = C_1F_2(x) + C_2F_1(x) + (T_0 - T_c)\frac{k}{b}\alpha I_1(\alpha g) \tag{22}$$

$$N = \frac{D_2}{l\,\mathrm{ctg}\,\omega}\left\{\sqrt{b}\left[-C_1F_1(x) + C_2F_2(x)\right] + \right.$$

$$\left. + (T_0 - T_c)\frac{k\alpha}{b}\left[2gI_0(\alpha g) + \left(g^2\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)I_1(\alpha g)\right]\right\}. \tag{23}$$

В результаті формули для визначення зусиль і моментів у тонкій конічній оболонці наберуть вигляду:

$$N_\alpha = \frac{D_2}{l^2 \operatorname{ctg} \omega}\left\{\frac{\sqrt{b}}{\alpha}\left[-C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)\right] + (T_0 - T_c)\frac{k}{b}\left[2g\, I_0(\alpha g) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(g^2 \alpha - \frac{1}{\alpha}\right) I_1(\alpha g)\right]\right\}; \tag{24}$$

$$Q = N_\alpha \operatorname{ctg} \omega; \tag{16}$$

$$N_\varphi = \frac{D_2}{l^2 \operatorname{ctg} \omega}\left\{\frac{2b}{x}\left[-C_1 H_1(x) + C_2 H_2(x)\right] + (T_o - T_c)\frac{k}{b}\left[\left(3 g^2 \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) I_1(\alpha g) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + g(1 + g^2 \alpha^2) I_o(\alpha g)\right]\right\}; \tag{25}$$

$$M_\alpha = \frac{D_2}{l}\left\{C_1\left[\frac{2\sqrt{b}}{x} H_2(x) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{\alpha} F_2(x)\right] + C_2\left[\frac{2\sqrt{b}}{x} H_1(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{\alpha} F_1(x)\right] + (T_o -$$

$$\left. - T_c)\frac{k}{b}\left[g\alpha\, I_o(\alpha g) + \nu\, I_1(\alpha g)\right]\right\}; \tag{26}$$

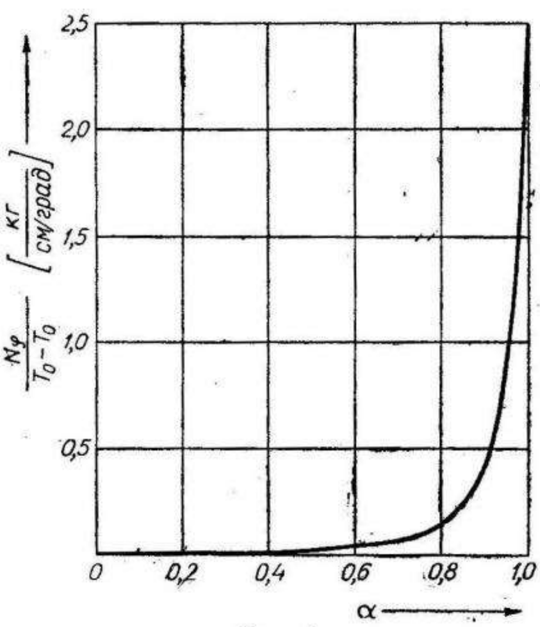


Рис. 3.

$$M_\varphi = \frac{D_2}{l}\left\{C_1\left[\frac{2\nu\sqrt{b}}{x} H_2(x) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha} F_2(x)\right] + C_2\left[\frac{2\nu\sqrt{b}}{x} H_1(x) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\alpha} F_1(x)\right] + (T_o - T_c)\frac{k}{b}\left[\nu g\alpha\, I_o(\alpha g) + I_1(\alpha g)\right]\right\}. \tag{27}$$

Сталі C_1 і C_2 визначаються з граничних умов

$$C_1 = (T_o - T_c)\frac{k}{b} \times$$

$$\times \frac{\frac{1}{\sqrt{b}}\left[2g I_0(g) + (g^2 - 1) I_1(g)\right] \cdot \left[\sqrt[4]{b}\, H_1(x_0) + \nu F_1(x_0)\right] - F_2(x_0)\left[g I_0(g) + \nu I_1(g)\right]}{F_1(x_0)\left[\sqrt[4]{b}\, H_1(x_0) + \nu F_1(x_0)\right] + F_2(x_0)\left[\sqrt[4]{b}\, H_2(x_0) + \nu F_2(x_0)\right]} \tag{28}$$

і

$$C_2 = (T_o - T_c)\frac{k}{b} \times$$

$$\times \frac{F_1(x_0)\left[g I_0(g) + \nu I_1(g)\right] + \frac{1}{\sqrt{b}}\left[2g I_0(g) + (g^2 - 1) I_1(g)\right] \cdot \left[\sqrt[4]{b}\, H_2(x_0) + \nu F_2(x_0)\right]}{F_1(x_0)\left[\sqrt[4]{b}\, H_1(x_0) + \nu F_1(x_0)\right] + F_2(x_0)\left[\sqrt[4]{b}\, H_2(x_0) + \nu F_2(x_0)\right]}. \tag{29}$$

Зауважимо, що при $\omega = \frac{\pi}{2}$ з даної задачі одержимо розв'язок аналогічної задачі для пластинки.

На рис. 3 наведено графік розподілу зусиль N_φ.

Для підрахунків були взяті параметри та фізико-механічні характеристики конічної частини кінескопа, для якого прийнято $\lambda = 40$ *ккал/м год/град*, $h = 0{,}005 \frac{1}{см}$.

Прийнятий температурний режим оболонки відповідає станові, який встановлюється в конічній частині кінескопа при зварюванні скляного екрана з металевою частиною.

Як видно з графіка, максимального значення зусилля N_φ набирають біля краю оболонки. Зусиллями N_α, Q і згинаючими моментами M_α і M_φ можна нехтувати, порівнюючи із зусиллям N_φ. Якщо ізолювати поверхні взятої конічної оболонки від зовнішнього середовища, тобто припустити, що $h = 0$, то одержимо нульові зусилля і моменти. При збільшенні тепловіддачі h з поверхень оболонки зусилля N_φ на границі її зростають.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. М., 1949.
2. Коваленко А. Д. Пластинки и оболочки в роторах турбомашин. Изд. АН УССР, 1955.
3. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, 1947.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, 1952.
6. Подстригач Я. С. Температурне поле в тонких оболонках. ДАН УРСР, № 5, 1958.
7. Подстригач Я. С. Теплопроводность тонкостенных элементов. Промежуточный технический отчет ИМА УССР, 1957.
8. Stern M. Analysis of thermal stresses in conical shells. I. Aeronaut Sci., 1955, 22, № 17.

М. М. ГОРБАЧ

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРА РИСА—БОХНЕРА

а) $KB^{(\alpha)}$ — клас функцій двох змінних сумовних по всій площині

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|\, dxdy < \infty \tag{1}$$

і таких, що середнє

$$f_{x,y}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + t\cos\Theta,\ y + t\sin\Theta)\, d\Theta$$

задовольняє умову

$$f_{x,y}(t) \in KLip\alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ по } t.$$

Розглянемо оператор Риса—Бохнера [7]:

$$S_R^{(\delta)}(f;\, x, y) = \iint_{\nu \leqslant R} K_\delta\left(\frac{\nu}{R}\right) a(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,\ \nu^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

де

$$a(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} f(t, z)\, e^{-i(\alpha t + \beta z)} dt dz,$$

а

$$K_\delta(t) = \begin{cases} (1 - t^2)^\delta, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1, \ \left(\delta \geqslant \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

як метод наближення функцій $f(x, y) \in KB^{(\alpha)}$.

При цих умовах [7]

$$S_R^{(\delta)}(f;\ x, y) = 2^\delta\, \Gamma(\delta + 1)\, R \int_0^{\infty} f_{x \cdot y}(t)\, \frac{I_{\delta+1}(Rt)}{(Rt)^\delta}, \tag{2}$$

де $I_p(t)$ — функція Бесселя першого роду порядку p.

б) $L_p\, v$ — клас функцій $f(x)$ обмеженої варіації на всій осі, сумовних в p-й степені на ній $(1 \leqslant p \leqslant 2)$.

В першій частині роботи вивчається величина

$$E_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)=\sup_{f\in KB^{(\alpha)}}|f(x,y)-S_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)|.$$

Аналогічні задачі для сум Фур'є розглянуті в роботі Чен Минь-де і Чен Юн-хе (РЖМ, 1958, реф. № 247).

В другій частині роботи дається асимптотична оцінка для

$$\|f-\sigma_R(f)\|_{L_p}\ (1<p\leqslant 2),\quad f\in L_p v,$$

де

$$\sigma_R(f)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty f(x+t)\,\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}\,d(Rt).$$

При цьому використовується метод виділення особливостей, розроблений С. М. Нікольським [6]. Аналогічні результати для інтегралів Фур'є одержані в роботі В. Й. Гукевич [1].

Лема I. *Має місце рівність*

$$2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\int_0^\infty \frac{I_{\delta+1}(x)}{x^{\delta}}\,dx=1,\quad \delta\geqslant\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Доведення. При $\delta>\frac{1}{2}$ лема доведена С. Бохнером [7]. Нехай $\delta=\frac{1}{2}$. Тоді, оскільки $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, досить довести, що

$$\int_0^\infty \frac{I_{\frac{3}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Тому що [4]

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+\frac{1}{2}}\,\frac{d^n}{(xdx)^n}\,\frac{\sin x}{x}, \tag{4}$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,I_{\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\sin x}{x}.$$

Звідси

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,I_{\frac{3}{2}}(x)\,dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty d\,\frac{\sin x}{x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

чим закінчується доведення леми.

Величина $E_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)$ не залежить від x і y.

Нехай $f_{0,0}(t)-f(0,\ 0)=\bar{f}(t)$, тоді $\bar{f}(0)=0$, звідси, враховуючи (2) і (3),

$$E_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)=\sup_{f\in KB_0^{(\alpha)}}|\bar{S}_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)|=E_R^{(\delta)}(KB^{(\alpha)}), \tag{5}$$

де $\bar{S}_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)=S_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)-f(0,\ 0)$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $K=1$.

$$\bar{S}_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)=2^\delta\Gamma(\delta+1)R^{1-\delta}\int\limits_0^\infty \bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^\delta}\,dt=$$

$$=2^\delta\Gamma(\delta+1)R^{1-\delta}\left[\int\limits_0^{\lambda(R)}\bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^\delta}\,dt+\int\limits_{\lambda(R)}^\infty \bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^\delta}\,dt\right], \qquad (6)$$

де $\lambda(R)=O\left(\frac{1}{R}\right)$.

Тому що $I_p(t)=O\ (t^p)$ при $t\to 0$, то

$$\left|\int\limits_0^{\lambda(R)}\bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^\delta}\,dt\right|\leqslant CR^{\delta+1}\int\limits_0^{\lambda(R)} t^{\alpha+1}\,dt=O\left(\frac{1}{R^{1+\alpha-\delta}}\right). \qquad (7)$$

Для оцінки другого доданку рівності (6) використаємо асимптотичне зображення функції Бесселя

$$I_p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left(x-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{x^{\frac{1}{2}}}+O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right),\ (x\to\infty).$$

Одержимо

$$\int\limits_{\lambda(R)}^\infty \bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^\delta}\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{\lambda(R)}^\infty \bar{f}(t)\frac{\cos\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}\cdot t^\delta}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\lambda(R)}^\infty \bar{f}(t)\,\frac{1}{t^\delta}\,O\left[\frac{1}{(Rt)^{\frac{3}{2}}}\right]dt. \qquad (8)$$

Але при $\delta+\frac{1}{2}-\alpha>0$

$$\left|\int\limits_{\lambda(R)}^\infty \frac{\bar{f}(t)}{t^\delta}\,O\left[\frac{1}{(Rt)^{\frac{3}{2}}}\right]dt\right|\leqslant\frac{C}{R^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\lambda(R)}^\infty t^{\alpha-\delta-\frac{3}{2}}\,dt=O\left(\frac{1}{R^{1+\alpha-\delta}}\right). \qquad (9)$$

Враховуючи (7), (8), (9), із (6) одержимо

$$S_R^{(\delta)}(f;\ 0{,}0)=2^\delta\Gamma(\delta+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,R^{\frac{1}{2}-\delta}\int\limits_{\lambda(R)}^\infty \bar{f}(t)\ \frac{\cos\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt+O\left(\frac{1}{R^\alpha}\right). \qquad (10)$$

Нехай γ і m, де $0\leqslant\gamma<\pi$, m — ціле невід'ємне число, такі, що

$$\cos\left(Rt=\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^m\sin(Rt-\gamma), \qquad (11)$$

а

$$t_\mu=\frac{\gamma+\mu\pi}{R},\ h=\frac{\pi}{R}.$$

Тоді для $\nu = 1, 2, \ldots$ маємо

$$\int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_\nu} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = (-1)^{\nu-1}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sin Ru}{(t_\nu - u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\,du; \tag{12}$$

$$\int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = (-1)^{\nu}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sin Ru}{(t_\nu + u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\,du.$$

Ясно, що для

$$d_\mu = \left|\int\limits_{t_\mu}^{t_{\mu+\frac{1}{2}}} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt\right| \quad \left(\mu = \frac{1}{2},\ 1, \frac{3}{2}, \cdots\right) \tag{13}$$

мають місце нерівності

$$d_{\frac{1}{2}} > d_1 > d_{\frac{3}{2}} > \cdots, \quad \text{причому} \lim_{\mu\to\infty} d_\mu = 0.$$

Нехай для $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\Delta_\nu = \int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = (-1)^{\nu-1}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \left[\frac{1}{(t_\nu - u)^{\frac{1}{2}+\delta}} - \frac{1}{(t_\nu + u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\right] \sin Ru\,du. \tag{14}$$

Тому що $\dfrac{1}{(t_\nu - u)^{\frac{1}{2}+\delta}} - \dfrac{1}{(t_\nu + u)^{\frac{1}{2}+\delta}}$ спадає із збільшенням ν, то

$$|\Delta_1| > |\Delta_2| > \ldots \text{ і } \sin\Delta_\nu = (-1)^{\nu-1}, \tag{15}$$

причому із (12), (13), (14) випливає, що

$$|\Delta_\nu| = |d_{\nu-\frac{1}{2}} - d_\nu'. \tag{16}$$

Таким чином, при $\lambda(R) = t_{\frac{1}{2}}$ маємо

$$\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{\infty} f(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \overline{f}(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{t_{\nu}-\frac{1}{2}}^{t_{\nu}+\frac{1}{2}}\varphi_{\nu}(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt+\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{f}(t_{\nu})\Delta_{\nu},$$

де $\varphi_{\nu}(t)=\overline{f}(t)-\overline{f}(t_{\nu})$, причому $\varphi_{\nu}(t)\in Lip\,\alpha$.

Застосовуючи перетворення Абеля до другого доданка, одержимо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{f}(t_{\nu})\Delta_{\nu}=f(t_1)\Sigma_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}[\overline{f}(t_{\nu+1})-\overline{f}(t_{\nu})](\Sigma_{\nu+1}),$$

де

$$\Sigma_{\nu}=\Delta_{\nu}+\Delta_{\nu+1}+\cdots.$$

Враховуючи (15) і те, що $\overline{f}(0)=0$, $|\Sigma_{\nu}|<|\Delta_{\nu}|$, одержимо

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{f}(t_{\nu})\Delta_{\nu}\right|\leqslant 0\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right)\left|\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i\right|+h^{\alpha}\sum_{\nu=1}^{\infty}|\Sigma_{\nu+1}|\leqslant$$

$$\leqslant(d_{\frac{1}{2}}-d_1)\,0\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right)+h^{\alpha}d_{\frac{3}{2}}.$$

Тому що

$$d_{\mu}\leqslant\int\limits_{t_{\mu}}^{t_{\mu}+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\delta}\left[\dfrac{1}{\left(t_{\mu}+\frac{1}{2}\right)^{\delta-\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{(t_{\mu})^{\delta-\frac{1}{2}}}\right], & \delta>\dfrac{1}{2};\\[2ex] \ln\left(1+\dfrac{\pi}{\gamma+\mu\pi}\right), & \delta=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

то $d_{\mu}=0\left(\dfrac{1}{R^{\frac{1}{2}-\delta}}\right)$, тому

$$\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{\infty}\overline{f}(t)\frac{\sin\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\varkappa-\frac{\pi}{4}\right)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt=$$

$$=(-1)^m\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{t_{\nu}-\frac{1}{2}}^{t_{\nu}+\frac{1}{2}}\varphi_{\nu}(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt+0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_{\nu}(t_{\nu}-u)-\varphi_{\nu}(t_{\nu}+u)]\left[\frac{1}{(t_{\nu}-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}+\right.$$

$$+\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg]\sin Rudu+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_\nu(t_\nu-u)+$$

$$+\varphi_\nu(t_\nu+u)]\left[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}-\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\right]\sin Rudu+0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right).$$

Тому що

$$\Bigg|\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\int_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_\nu(t_\nu-u)+\varphi_\nu(t_\nu+u)]\Bigg[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}-$$

$$-\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg|\sin Rudu=0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right),$$

то

$$\int_{t_{\frac{1}{2}}}^{\infty}\bar{f}(t)\frac{\sin\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}dt=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_\nu(t_\nu-u)-\varphi_\nu(t_\nu+u)]\Bigg[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}+$$

$$+\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg]\sin Rudu+0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{2}+\alpha-\delta}}\right). \qquad (17)$$

Нехай $\delta>\frac{1}{2}$, тоді

$$\Bigg|\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\int_0^{\frac{h}{2}}[(\varphi_\nu(t_\nu-u)-\varphi_\nu(t_\nu+u)]\Bigg[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}+$$

$$+\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg]\sin Rudu=0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right). \qquad (18)$$

Звідси, враховуючи (5), (10), (17), випливає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо δ і α такі числа, які задовольняють нерівності* $\delta>\frac{1}{2}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, *то*

$$E_R^{(\delta)}(KB^{(\alpha)})=0\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right)\quad (R\to\infty),$$

причому права частина цієї рівності не залежить від x і y.

Теорема 2. *Якщо* $\delta=\frac{1}{2}$ *і* $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, *то має місце асимптотична рівність*

$$E_R^{(\frac{1}{2})}(KB^{(\alpha)})=\frac{K2^{\alpha+1}}{\pi}\,\frac{\ln R}{R^\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u^\alpha\sin u\,du+0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right).$$

Доведення. а) Нехай $0\leqslant\alpha<1$, тоді із (10) і враховуючи (17), одержимо

$$S_R^{(\frac{1}{2})}(f;\,0{,}0)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_\nu(t_\nu-u)-\varphi_\nu(t_\nu+u)]\frac{t_\nu}{t_\nu^2-u^2}\sin Ru\,du+0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right),$$

звідки

$$|S_R^{(\frac{1}{2})}(f;\,0{,}0)|\leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\alpha)}\frac{R}{\pi}\sum_{\nu=1}^{[R^2]}\frac{1}{\nu}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}u^\alpha\sin Ru\,du+0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right)=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}\,\frac{\ln R}{R^\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u^\alpha\sin u\,du+0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right). \tag{19}$$

Розглянемо функцію двох змінних, задану в полярних координатах:

$$f_R(t,\,\Theta)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant t_0,\quad t\,[R^2]\leqslant t<\infty;\\ (-1)^{m+\nu}2^{\alpha+1}\pi\psi(\Theta)(t-t_\nu)^\alpha, & t_\nu\leqslant t\leqslant t_{\nu+\frac{1}{2}};\\ (-1)^{m+\nu}2^{\alpha+1}\pi\psi(\Theta)(t_{\nu+1}-t)^\alpha, & t_{\nu+\frac{1}{2}}\leqslant t\leqslant t_{\nu+1};\\ (\nu=0,\,1,2,\,\ldots,\,[R^2]-1), & \end{cases}$$

причому $\psi(\Theta)$ така, що $\int\limits_0^{2\pi}\psi(\Theta)\,d\Theta=1$.

Функція $f_R(t,\,\Theta)$ належить до нашого класу, причому для неї нерівність (19) перетворюється в рівність.

б) Нехай $\alpha=1$. З (1) одержимо

$$\lim_{t\to\infty}\overline{f}(t)=0,$$

тому

$$\int\limits_{\lambda(R)}^{\infty}\overline{f}(t)\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}\,d(Rt)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{R}\int\limits_{\lambda(R)}^{\infty}\overline{f}'(t)\frac{\sin Rt}{t}\,dt+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Таким чином, ми звели задачу до випадку $\alpha=0$.

Через $KB_{(r)}^{(\alpha)}$ позначимо клас функцій, які задовольняють умову (1) і мають r-у ($r=0,1$) похідну

$$\overline{f}^{(r)}(t)\in KLip\alpha,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

Т е о р е м а 3. *Для класу функцій* $KB_{(r)}^{(\alpha)}$ *має місце асимптотична рівність*

$$E_R^{\left(\frac{1}{2}\right)}(KB_{(r)}^{(\alpha)})=\frac{K2^{\alpha+1}}{\pi}\,\frac{\ln R}{R^{r+\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u^{\alpha}\sin u\,du+0\left(\frac{1}{R^{r+\alpha}}\right).$$

Аналогічні результати мають місце і для функцій n змінних, якщо розглядати $\delta\geqslant\frac{n-1}{2}$.

З а у в а ж е н н я. Позначимо через $KW^{(\alpha)}$ клас функцій $f(x)$, заданих на $(0,\infty)$, для яких виконуються умови:

$$\int\limits_0^{\infty}x\,|f(x)|\,dx<\infty,\ f(x)\in KLip\,\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\ (0<x<\infty).$$

Будемо наближати функції цього класу за допомогою інтегральних операторів

$$S_R^{(\delta)}(f)=2^{\delta}\,\Gamma(\delta+1)\,R\int\limits_0^{\infty}f(t+x)\,\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{(Rt)^{\delta}}\,dt.$$

В и с н о в о к. Для класу функцій $KW^{(\alpha)}$ має місце асимптотична рівність

$$\sup_{f\in KW^{(\alpha)}}\ \sup_{0\leqslant x<\infty}|f(x)-S_R^{(\delta)}(f)|=\begin{cases}0\left(\dfrac{1}{R^{\alpha}}\right), & \delta>\dfrac{1}{2};\\[2ex] \dfrac{K2^{\alpha+1}}{\pi}\,\dfrac{\ln R}{R}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u^{\alpha}\sin u\,du+ & \\[2ex] +0\left(\dfrac{1}{R^{\alpha}}\right), & \delta=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Якщо $f(x)$ має всюди на $(0,\infty)$ похідну $f'(x)\in K\,Lip\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, то цей результат можна відповідним чином посилити.

Л е м а II. *Якщо* $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ $(p>1)$, *то*

$$\|\sigma_R(f)\|_{L_p}\leqslant C_p\|f\|, \tag{20}$$

де C_p — *константа, яка залежить лише від p, але не від* $f(x)$.

Д о в е д е н н я. Ця лема є безпосереднім наслідком нерівності Риса [2].

Дійсно,

$$\sigma_R(f)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty f(x+t)\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}d(Rt)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_x^\infty f(u)\frac{I_{\frac{3}{2}}[R(u-x)]}{[R(u-x)]^{\frac{1}{2}}}d(Ru)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_x^\infty f(u)\,[R(u-x)]^{\frac{1}{2}}I_{\frac{3}{2}}[R(u-x)]\,\frac{du}{u-x}\,.$$

Нехай

$$\varphi(u)=\begin{cases}\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}[R(u-x)]^{\frac{1}{2}}I_{\frac{3}{2}}[R(u-x)], & u\in(x,\infty);\\ 0, & u\bar{\in}(x,\infty),\end{cases}$$

тоді

$$\sigma_R(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\,\varphi(u)}{u-x}du.$$

Функція $f(u)\cdot\varphi(u)\in L_p\,(-\infty,\infty)$, тому що $f(u)\in L_p\,(-\infty,\infty)$, а функція $\varphi(u)$ обмежена на $(-\infty,\infty)$, тому, згідно з нерівністю Риса, маємо

$$\|\sigma_R(f)\|_{L_p}\leqslant C_p^1\|f\cdot\varphi\|\leqslant C_p\|f\|L_p,$$

що й треба було довести.

Лема III. *Якщо* $f\in L_p v$ $(p\leqslant 2)$, *то*

$$\|f(x)-\sigma_R(f)\|_{L_p}\leqslant C_p\omega_p\left(\frac{1}{R},f\right), \tag{21}$$

де ω_p — *інтегральний модуль неперервності, тобто*

$$\omega_p\left(\frac{1}{R},f\right)=\sup_{0<h<\frac{1}{R}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

і стала C_p *залежить лише від* p.

Доведення. Для доведення леми III зауважимо, що коли функція $\varphi(x)$ є ціла експоненціального типу степеня σ класу L_p $(p\leqslant 2)$, то має місце узагальнена теорема Вінера—Палей [3]:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\lambda(u)\,du,$$

де $\lambda(u)\in L_2(-\sigma,\sigma)$.

З другого боку, якщо $\sigma\leqslant R$, то

$$\sigma_R(\varphi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iu(x+t)}\lambda(u)\,du\right]\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}d(Rt)=$$

$$= \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iux} \lambda(u) \psi(u)\, du,$$

де

$$\psi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\infty} (e^{iut} - 1) \frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}\, d(Rt).$$

Розглянемо $\psi(u)$. Інтегруючи по частинах, одержимо

$$\varphi(u) = \frac{iu}{R} \int_{0}^{\infty} e^{iut} \frac{\sin Rt}{t}\, dt.$$

Таким чином,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iux} \lambda(u) \psi(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iux} \lambda(u) \left\{ \frac{iu}{R} \int_{0}^{\infty} e^{iut} \frac{\sin Rt}{t}\, dt \right\} du =$$

$$= \frac{i}{R} \int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iu(x+t)} u\lambda(u)\, du \right\} \frac{\sin Rt}{t}\, dt = \frac{i}{R} \int_{0}^{\infty} \psi_1(x+t) \frac{\sin Rt}{t}\, dt.$$

Звідси, оскільки $u\lambda(u) \in L_2\ (-\sigma, \sigma)$, то $\psi_1(x) \in L_p$, тому згідно з нерівністю Риса

$$\| \varphi_1(x) \|_{L_p} = \frac{1}{R} \left\| \int_{0}^{\infty} \psi_1(x+t) \frac{\sin Rt}{t}\, dt \right\|_{L_p} \leqslant \frac{C_p^1}{R} \| \psi_1(x) \|_{L_p} = \frac{C_p}{R},$$

де C_p — константа, яка не залежить від R.

Таким чином,

$$\sigma_R(\varphi) = \varphi(x) + \frac{\varphi_1(x)}{R}, \tag{22}$$

де

$$\varphi_1(x) \in L_p(-\infty, \infty).$$

Тотожність має місце для будь-якої функції експоненціального типу степеня $\sigma \leqslant R$ класу L_p $(p \leqslant 2)$.

Нехай $\varphi(x)$ — функція найкращого наближення $f(x) \in L_p v\ (p \leqslant 2)$, тоді

$$\| f(x) - \sigma_R(f) \|_{L_p} \leqslant \| f(x) - \varphi(x) \|_{L_p} + \| \sigma_R(f - \varphi) \|_{L_p} + \frac{C_p'}{R} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + C_p) E_R^{(p)}(f) + \frac{C_p'}{R} \leqslant C_p \omega_p \left(\frac{1}{R}, f \right),$$

що й треба було довести.

Теорема 4. *Якщо $f \in L_p v$ $(1 < p \leqslant 2)$, то справедлива нерівність*

$$\| f(x) - \sigma_R(f) \|_{L_p} \leqslant \frac{C v^{\frac{1}{p}} \omega \left(\frac{1}{R}, f \right)^{\frac{1}{q}}}{R^{\frac{1}{p}}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right), \tag{23}$$

де C — константа, яка не залежить від f і R, v — повна варіація функції f на всій осі і $\omega\left(\frac{1}{R}, f\right) = \sup\limits_{x} \sup\limits_{|h|<\frac{1}{R}} |f(x+h) - f(x)|$.

Доведення цієї теореми проводиться так, як в [6] (теорема Стечкіна).

Теорема 5. *Якщо $f \in v$ (обмеженої варіації), то*

$$|f(x) - \sigma_R(f)| \leqslant C \underset{-\infty<x<\infty}{\operatorname{var}} f(x),$$

де C — константа, яка не залежить від R і $f(x)$.

Доведення. Інтегруючи по частинах $\sigma_R(f)$, одержимо:

$$\sigma_R(f) = f(x) + \int\limits_0^\infty \frac{\sin Rt}{R} df(x+t).$$

Нехай

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{\sin Ru}{R}, & u \geqslant 0; \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

тоді

$$|f(x) - \sigma_R(f)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) df(x+t) \right|.$$

Враховуючи, що функція $\varphi(u)$ обмежена на $(-\infty, \infty)$, ми одержимо твердження теореми.

Лема IV. *Нехай*

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \overline{\in} [0,1], \end{cases}$$

тоді

$$\|\varphi(x) - \sigma_R(\varphi)\|_{L_p} = \frac{C(p)}{R^{\frac{1}{p}}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}}\right) (p > 1),$$

де

$$C(p) = \left(\int\limits_0^\infty \left| \frac{\sin u}{u} \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Тому що

$$\sigma_R(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty f(x+t) \frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}} d(Rt) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_x^\infty f(t) \frac{I_{\frac{3}{2}}[R(t-x)]}{[R(t-x)^{\frac{1}{2}}} d(Rt)$$

і

$$\int \frac{I_{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x} + c,$$

то

$$\varphi(x) - \sigma_R(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in (-\infty, 0); \\ \dfrac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \displaystyle\int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Нехай

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in (-\infty, 0); \\ -\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

тоді

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^p\,dx = \int_{\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx \leqslant \int_{-\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-1} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx + \int_{-1}^{0} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx = \sum_{i=1}^{4} I^i{}_1; \tag{24}$$

$$I_1^1 = \frac{1}{R^p} \int_{-\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{(1-x)} \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int_0 \frac{dx}{(x+1)^p} = \frac{C_1(p)}{R^p}; \tag{25}$$

$$I_1^2 = \int_{-}^{-1} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{C_2(p)}{R^p}; \tag{26}$$

$$I_1^3 = \frac{1}{R^p} \int_{-1}^{0} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{t-x}\,dt \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int_0^1 \left(\ln \frac{1+x}{x} \right)^p dx = \frac{C_3(p)}{R^p}, \tag{27}$$

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{x+1}{x}\right)^p dx < \infty.$$

Дійсно, нехай $\ln \frac{x+1}{x} = y$, тоді

$$x = \frac{1}{e^y - 1}, \quad dx = -\frac{e^y dy}{(e^y-1)^2},$$

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{x+1}{x}\right)^p dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{y^p e^y\, dy}{(e^y-1)^2} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{y^p}{e^y - 1}\, dy + \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{y^p\, dy}{(e^y-1)^2} < \infty.$$

$$I_1^4 = \frac{1}{R^p} \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{t-x}\, dt \right|^p dx = \frac{1}{R^{p+1}} \int_0^R \left| \int_0^u \frac{\sin z}{z}\, dz \right|^p du.$$

Тому що всі інтеграли $\int\limits_0^u \frac{\sin z}{z}\, dz$ рівномірно обмежені, то

$$I_1^4 \leqslant \frac{C_4(p)}{R^p}. \tag{28}$$

Таким чином, враховуючи (25), (26), (27) і (28), із (24) одержимо

$$\| \psi(x) \|_{L_p} \leqslant \frac{C}{R}, \tag{29}$$

де C — константа, яка залежить лише від p.

Нехай $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \sigma_R(\varphi)$, тоді, враховуючи (29), одержимо

$$\| \varphi_1(x) \|_{L_p} - \| \psi(x) \|_{L_p} \leqslant \| \varphi_1(x) - \psi(x) \|_{L_p} = \left(\int_0^1 \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

тому

$$\| \varphi(x) - \sigma_R(\varphi) \|_{L_p} = \left(\int_0^1 \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}} \right).$$

Але, тому що

$$\int_0^1 \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx = \frac{1}{R} \int_0^R \left| \frac{\sin z}{z} \right|^p dz = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin z}{z} \right|^p dz + 0\left(\frac{1}{R} \right),$$

то

$$\| \varphi(x) - \sigma_R(\varphi) \|_{L_p} = \frac{\left(\int\limits_0^{\infty} \left| \frac{\sin z}{z} \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}}{R^{\frac{1}{p}}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}} \right),$$

що й треба було довести.

Лема V. *Нехай* $\varphi(x)$, *як в лемі (IV); тоді*

$$\left\{ \int\limits_{|x-1|>\delta} |\varphi(x) - \sigma_R(\varphi)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{C}{R},$$

де стала C залежить лише від δ *і* p.

Доведення. Аналогічно тому, як це робилося в лемі (IV), одержимо

$$\int\limits_{|x-1|>\delta} |\varphi(x) - \sigma_R(\varphi)|^p\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx = I_1 + I_2.$$

Враховуючи (25), (26) і (27), одержимо

$$I_1 \leqslant \frac{C(p)}{R^p}. \tag{30}$$

Далі

$$I_2 = \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx + \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx. \tag{31}$$

Але

$$\int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int\limits_{0}^{1-\delta} \frac{dx}{(1-x)^p} = \frac{C_1(p_1\delta)}{R^p}; \tag{32}$$

$$\int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx \leqslant \int\limits_{0}^{1} \left| \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx, \tag{33}$$

тому, враховуючи (30), (31), (32), (33) і (28), ми одержимо твердження леми.

Лема VI. *Нехай* $1 < p \leqslant \infty$; $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ *і*

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi(x + 1 - x_k),$$

тоді

$$\|\psi(x) - \sigma_k(\psi)\|_{L_p} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} |\sigma_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} C(p)}{R^{\frac{1}{p}}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}} \right),$$

де $C(p)$ — *константа та ж, що і в лемі IV.*

Доведення проводиться аналогічно доведенню відповідної леми в [6].

Т е о р е м а 6. *Нехай* $f(x)$ — *функція класу* L_p $(1 < p \leqslant 2)$ *і* $x_1, x_2, \ldots$ *точки, де* $f(x)$ *має розрив із стрибками* $\sigma_k = f(x_k+0) - f(x_k - 0)$. *Тоді має місце асимптотична рівність*

$$\|f(x) - \sigma_R(f)\|_{L_p} \approx \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} C(p)}{R^{\frac{1}{p}}} \quad (R \to \infty), \tag{34}$$

де

$$C(p) = \left(\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin z}{z}\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Д о в е д е н н я. Візьмемо $\Sigma > 0$ і підберемо m настільки великим, щоб

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |\sigma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \tag{35}$$

та зобразимо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \psi(x) + h(x),$$

де

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \varphi(x + 1 - x_k).$$

Функція $h(x)$ має коливання в будь-якій точці дійсної осі не більше від ε. Беручи до уваги, що $h \in L_p v$, легко довести існування такого $\delta > 0$, для якого

$$\omega_p(h, \delta) < 2\varepsilon.$$

В силу теореми 1 одержимо

$$\| h(x) - \sigma_R(h) \|_{L_p} \leqslant \frac{C_1 \varepsilon^{\frac{1}{q}}}{R^{\frac{1}{p}}} \quad \left(R > \frac{1}{\delta}\right).$$

Звідси, беручи до уваги лему VI і нерівність (35), одержимо рівність (34).

ЛІТЕРАТУРА

1. Г у к е в и ч В. И. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций (тезисы докладов). Л., 1959.
2. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.
3. И б р а г и м о в И. И. Изв. АН СССР, с. м., т. 23, 1959.
4. К у з ь м и н Р. О. Бесселевы функции, изд. 2, М., 1935.
5. Н и к о л ь с к и й С. М. Труды матем. института им. В. А. Стеклова, М., 1945.
6. Н и к о л ь с к и й С. М. Изв. АН СССР, с. м., т. 13, 1949.
7. B o c h n e r S. Trans. Am. Math. Soc. 40, 1936.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

И. М. КОВАЛЬЧИК

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ ВИНЕРА

Преобразования кратных винеровских интегралов при параллельном переносе и общем линейном преобразовании изучались автором [1].

В данной заметке некоторые результаты Камерона и Фейгена [2] о нелинейном преобразовании однократного интеграла по мере Винера переносятся на случай многократного интеграла Винера. Будем придерживаться обозначений и терминологии, принятой в статье [1], где, в частности, даётся также и определение кратного интеграла Винера.

Для дальнейших целей введём несколько понятий.

Определение 1. Функционал $A(x, t)$, определённый на $S\times[0, 1]$, где S — выпуклое подмножество пространства C (состоящего из действительных непрерывных функций $x(t)$ $[0\leqslant t\leqslant 1]$, удовлетворяющих условие $x(0)=0$), будем называть функционалом с гладкой вариацией, если его первая вариация

$$\delta A(x,\ y,\ t)\equiv\frac{\partial}{\partial h}A(x+hy,\ t)|_{h=0} \tag{1}$$

существует для всех $(x, t, y)\in S\times[0, 1]\times C$ и представима в виде

$$\delta A(x,\ y,\ t)=\int\limits_0^1 K(x,\ t,\ s)\cdot y(s)ds, \tag{2}$$

где $K(x, t, s)$ — непрерывная функция по $(x, t, s)\in S\times[0, 1]^2$.

Функционал $A(x, t, s)$ назовём функционалом с полугладкой вариацией, когда представление (2) имеет место для $K(x, t, s)$ вида:

$$K(x,\ t,\ s)=\begin{cases} K^1(x,\ t,\ s) & \text{при } 0\leqslant t<s\leqslant 1,\\ K^2(x,\ t,\ s) & \text{при } 0\leqslant s<t\leqslant 1,\\ \dfrac{K^1(x,\ s,\ s)+K^2(x,\ s,\ s)}{2} & \text{при } 0\leqslant s=t\leqslant 1,\end{cases} \tag{3}$$

где $K^1(x, t, s)$ и $K^2(x, t, s)$ непрерывны по $(x, t, s)\in S\times[0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1]$ и $(x, t, s)\in S\times[0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1]$ соответственно.

При этом в обоих случаях $K(x, t, s)$ будем называть ядром вариации $A(x, t)$.

Определение 2. Пусть $F(x, t)$ — функционал, определённый для всех x и t из $S\times[0, 1]$ и интегрируемый по t при всех x (где S — открытое подмножество C). Пусть x_ε — нижнее ε-усреднение x:

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} x(s)\,ds \quad (x(t) = 0 \text{ при } t < 0)$$

и пусть $F_\varepsilon(x, t)$ — верхнее ε-усреднение функции $F(x_\varepsilon, t)$:

$$F_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t}^{t+\varepsilon} F(x_\varepsilon, s)\,ds,$$

где $F(x, s) = \text{const}$ при $s \in (1, +\infty)$ и фиксированном x.

Определим теперь главное функциональное значение интеграла Стильтьеса от F по $x(t)$ как следующий предел (если он существует и конечен):

$$\int\limits_0^1 F(x, t)\,d^*x(t) = \lim_{\varepsilon \to +0}\int\limits_0^1 F_\varepsilon(x, t)\,dx(t).$$

Наиболее общие теоремы о нелинейном преобразовании интеграла Винера даны в работе Камерона и Фейгена (например, теорема 4).

Имеет место, в частности, такое утверждение [2]: пусть M — измеримое по Винеру подмножество C; предположим, что функционал $A(x, t)$ по крайней мере для одной окрестности U каждой точки $x \in M$ является функционалом с полугладкой вариацией в $U \times [0, 1]$, ядро которой есть $K(x, t, s)$. При некоторых предположениях относительно A (см. теорему 4 из [2]), если преобразование T

$$y(t) = x(t) + A(x, t) \tag{4}$$

отображает M та TM взаимооднозначно, то TM измеримо по Винеру, и, кроме того, если для некоторого измеримого по Винеру на TM функционала $F(y)$ существует одна из сторон равенства

$$\int\limits_{TM} F(y)\,d_W y = \int\limits_{M} F[x + A(x,t)] \cdot |D(x)| \times$$

$$\times \exp\left\{-2\int\limits_0^1 \frac{\partial A(x, t)}{\partial t}\,d^*x(t) - \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial A(x, t)}{\partial t}\right]^2 dt\right\} d_W x, \tag{5}$$

то существует и другая, и это равенство справедливо; здесь $D(x)$ обозначает определитель Фредгольма:

$$D(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\int\limits_0^1 \overset{(\nu)}{\cdots}\int\limits_0^1 \begin{vmatrix} K(x, s_1, s_1) \cdots K(x, s_1, s_\nu) \\ \cdots\cdots\cdots \\ K(x, s_\nu, s_1) \cdots K(x, s_\nu, s_\nu) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_\nu. \tag{6}$$

Мы будем изучать поведение кратного интеграла Винера

$$\int\limits_E f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,d_W y_1\,d_W y_2 \cdots d_W y_n \tag{7}$$

$$(E \subseteq \underbrace{C \times \ldots \times C}_{n})$$

при нелинейном преобразовании, которое задаётся системой интегральных уравнений:

$$y_k(t) = x_k(t) + \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 F_{kl}(x_l, t, s)\, ds \equiv x_k + \sum_{l=1}^{n} A_{kl}(x_l, t) \tag{8}$$

$$(k = 1, 2, \ldots n).$$

Систему n уравнений (8) можно свести к одному нелинейному интегральному уравнению, но только аргумент будет изменяться уже на сегменте $[0, n]$.

Действительно, предположим, что

$$x(t) = x_k(t - k + 1),\ k - 1 < t \leqslant k;$$

$$y(t) = y_k(t - k + 1),\ k - 1 < t \leqslant k;$$

$$F(x, t, s) = \begin{cases} F_{11}(x_1, t, s) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ F_{12}(x_2, t, s-1) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 1 < s \leqslant 2; \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_{1n}(x_n, t, s - n + 1) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1,\ n - 1 < s \leqslant n; \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_{n1}(x_1, t - n + 1, s) \text{ при } n - 1 < t \leqslant n,\ 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_{nn}(x_n, t - n + 1, s - n + 1) \text{ при } n - 1 < t \leqslant n,\ n - 1 < \\ < s \leqslant n. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда вместо системы (8) получим одно интегральное уравнение

$$y(t) = x(t) + \int_0^n F(x, t, s)\, ds \equiv x(t) + A(x, t) \tag{10}$$

$$[0 \leqslant t \leqslant n].$$

Если же обозначить ядра вариаций функционалов A_{kl} через K_{kl} и ядро вариации функционала A через K, то

$$\delta A(x, t, s) = \int_0^n K(x, t, s)\, y(s)\, ds = \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 K_{kl}(x_k, t, s)\, y_l(s)\, ds.$$

Сформулируем теперь основную теорему работы.

Т е о р е м а. *Пусть* $E \subseteq \underbrace{C \times \ldots \times C}_{n}$ — *множество, измеримое по Винеру, и пусть* TE — *отображение* E *при преобразовании* (8), *где* $x_k \in E$, $y_k \in TE$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $x_i(1) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

Предположим, что:

1) функционалы $A_{kl}(x_l, t)$ по крайней мере для одной выпуклой окрестности U каждой точки $x_k \in E$ являются функционалами с гладкой вариацией при $k \neq l$ и с полугладкой вариацией при $k = l$ на множестве $E \times [0, 1]$;

2) функционал $A(x, t)$ удовлетворяет все условия теоремы Камерона—Фейгена.

Пусть $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — функционал, измеримый по Винеру на множестве TE.

Тогда имеет место равенство

$$\int_{TE} f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, d_W y_1\, d_W y_2 \ldots d_W y_n =$$

$$= \int_E f\Big(x_1 + \sum_{l=1}^{n} A_{1l};\ x_2 + \sum_{l=1}^{n} A_{2l};\ \ldots;\ x_n + \sum_{l=1}^{n} A_{nl}\Big) \times \tag{11}$$

$$\times |D(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \exp\Big\{-2 \sum_{k,l=1}^{n} \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_{kl}(x_l, t, s)\, ds\Big] d^* x_k(t) -$$

$$- \sum_{k,l=1}^{n} \int_0^1 \Big[\frac{d}{dt} \int_0^1 F_{kl}(x_l, t, s)\, ds\Big]^2 dt\Big\}\, d_W x_1\, d_W x_2 \ldots d_W x_n,$$

где

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu = 1}^{n} \int_0^1 \overset{(\nu)}{\cdots} \int_0^1 \begin{vmatrix} K_{l_1 l_1}(x_{l_1}, s_1, s_1) \ldots K_{l_1 l_\nu}(x_{l_1}, s_1, s_\nu) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_{l_\nu l_1}(x_{l_\nu}, s_\nu, s_1) \ldots K_{l_\nu l_\nu}(x_{l_\nu}, s_\nu, s_\nu) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_\nu,$$

и из существования одной части равенства (11) следует существование другой.

Метод доказательства тот же, что и в статье [1]. А именно, указанным раньше методом сводим n-кратный интеграл Винера (7) к однократному и подвергаем его преобразованию (10), использовав формулу (5) теоремы Камерона—Фейгена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковальчик И. М. Некоторые преобразования кратных интегралов Винера. Укр. матем. журнал № 1, 1960.

2. Cameron R. H., Fagen R. E. Non-linear transformations of Volterra type in Wiener space Trans. Amer. Math. Soc., № 3, 1953.

И. И. ЧУЛЫК

О ФИЛЬТРАЦИИ КВАНТОВАННЫХ ШУМОВ

Задача о сглаживании стационарных случайных процессов [4], имеющая важное практическое применение, приводит к решению так называемого уравнения Винера—Хопфа. А именно, если линейная динамическая система находится под воздействием управляющего сигнала $m(t)$, являющегося стационарным в смысле Хинчена случайным процессом, и шума $n(t)$, то величина на выходе выражается формулой

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau.$$

Пусть подлежит воспроизведению случайный сигнал $h(t)$.

Считая известными корреляционные функции

$$R_{\varphi}(\tau)=M[\varphi(t+\tau)\varphi(t)],$$
$$R_{h\varphi}(t)=M[h(t+\tau)\varphi(t)],$$

можно поставить задачу о нахождении передаточной функции $k(t)$ $(k(t)=0,\ t<0)$ системы из условия минимума среднеквадратической ошибки

$$\overline{\varepsilon}^{2}=M[h(t)-x(t)]^{2}.$$

Тогда функция $k(t)$ определяется уравнением Винера—Хопфа:

$$R_{h\varphi}(\tau)-\int_{0}^{\infty}K_{\varphi}(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau,\ \tau>0, \tag{1}$$
$$k(t)=0,\ t<0.$$

Эффективное решение поставленной задачи возможно только при очень жестких ограничениях, накладываемых на спектральные плотности сигналов.

Используя введенное И. М. Гельфандом [2] понятие обобщенного стационарного случайного процесса, можно поставить аналогичную задачу о сглаживании обобщенных стационарных случайных процессов, в частности так называемых квантованных шумов. Тогда в уравнении (1) функции $R_{h\varphi}$, R_{φ}, $k(t)$ будут обобщенными функциями, а свертки следует понимать в смысле теории обобщенных функций.

Сведя уравнение (1) к системе парных интегральных уравнений [5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}k(t)R_{1}(x-t)\,dt+\lambda_{1}k(x)=g_{1}(x)\quad -\infty<x<0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) R_2(x-t)\,dt + \lambda_2 k(x) = g_2(x) \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

где

$$R_1,\ R_2,\ g_1(x),\ g_2(x) \text{ —} \tag{3}$$

известные функции, а λ_1, λ_2 — вещественные числа, можно решить поставленную задачу, решив соответствующую системе (2) задачу Гильберта [1, 3]. Это же на основании теоремы Н. Н. Боголюбова — О. С. Парасюка об аналитическом продолжении обобщенных функций будет иметь место, когда функции (3) являются обобщенными и интегрируемыми в некоторых классах $C(q, r, 1)$, а функции R_1, R_2 удовлетворяют условия, необходимые для существования сверток

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) R_i(x-t)\,dt \quad (i=1,\ 2).$$

Обобщенная задача Гильберта в нашем случае будет формулироваться следующим образом. Если существует функция

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{ixt}\,dt,$$

удовлетворяющая условие (1), то существует также функция $H(z)$, голоморфная при $y>0$, $y<0$ и имеющая в смысле слабой сходимости пределы H_+, H_-:

$$\lim_{Imz\to 0,\ Imz>0} H(z) = H_+(x),$$

$$\lim_{Imz\to 0,\ Imz<0} H(z) = H_-(x),$$

причем

$$H_+(x) - S_\varphi(x) H_-(x) = S_m(x) \tag{4}$$

и S_φ, S_m — обобщенные функции, интегрируемые в классе $C(q, r, 1)$.

Решение задачи (4) выражается через интегралы типа Коши от обобщенной функции. А именно, если $S(t)$ — обобщенная функция, интегрируемая в классе $C(q, r, 1)$, то величину

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(t)\,dt}{z-t}$$

понимаем как значения функционала $S(\varphi)$ на функции $\varphi = \frac{1}{z-t}$. Если $S(t)$ не интегрируема в классе $C(q, r, 1)$, то необходимо разделить ее на такой полином, чтобы функция $\frac{S(t)}{P(t)}$ была интегрируемой в этом классе. Тогда будет иметь смысл интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(t)\,dt}{P(t)(z-t)}.$$

Эффективное решение задачи Гильберта получено для обобщенных случайных стационарных сигналов со спектральными плотностями полиномиального роста, для квантованных шумов Найквиста [6] и других, имеющих важное практическое значение при анализе флюктуаций как статистического, так и чисто квантового характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С. Об аналитическом продолжении обобщенных функций. ДАН СССР, т. 109, № 4, 1956.

2. Гельфанд И. М. Обобщенные случайные процессы. ДАН СССР, т. 100, в. 5, 1954.

3. Парасюк О. С. О парных интегральных уравнениях в классе обобщенных функций. ДАН СССР, т. 110, № 6, 1956.

4. Солодовников В. В. Введение в статическую динамику систем автоматического управления. М., 1952.

5. Раппопорт И. М. О некоторых парных интегральных и интеграло-дифференциальных уравнениях. Сб. трудов Ин-та мат. АН УССР, № 12, 1949.

6. Файн В. М. Квантовые явления в радиодиапазоне. УФН, т. 64, в. 2, 1958.

О. І. БОБИК

ПРО СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглянемо систему

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n+k} p_{ij}(t)\,x_j \quad (i=1,\ \dots,\ n),$$

$$\mu_s\frac{dx_{n+s}}{dt}=\sum_{j=1}^{n+k} p_{ij}(t)\,x_j \quad (s=1,\ \dots,\ k), \tag{1}$$

де μ_s $(s=1,\dots,k)$ — малі параметри.

Нехай додержуються такі умови:

а) функції $p_{ij}(t)$ $(i,\ j=1,\dots,n+k)$ — неперервні та обмежені разом з похідними першого порядку;

б)
$$\Delta=\begin{vmatrix} p_{n+1,\ n+1}(t) & \dots & p_{n+1,\ n+k}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n+k,\ n+1}(t) & \dots & p_{n+k,\ n+1}(t)\end{vmatrix}\neq 0$$

при $t\geqslant t_0$.

Якщо $\mu_s=0$ $(s=1,\dots,k)$, то з системи (1) можна виключити $x_{n+1},\dots,x_{n+k}$. Одержимо

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j-\sum_{j=n+1}^{n+k} p_{ij}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{x_l A_l^{(j)}}{\Delta}\right) \tag{2}$$
$$(i=1,\ \dots,\ n),$$

де

$$A_l^{(j)}=\begin{vmatrix} p_{n+1,\ n+1} & \dots & p_{n+1,\ j-1} & p_{n+1,l} & p_{n+1,\ j+1} & \dots & p_{n+1,\ n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n+k,\ n+1} & \dots & p_{n+k,\ j-1} & p_{n+k,l} & p_{n+k,\ j+1} & \dots & p_{n+k,n+k}\end{vmatrix}$$
$$(j=n+1,\ \dots,\ n+k;\ l=1,\ \dots,\ n).$$

Систему (2) назвемо «виродженою».

Вияснимо умови, при яких з асимптотичної стійкості «виродженої» системи (2) випливає асимптотична стійкість системи (1). Для $s=1$ це питання розглянуте в роботі Б. С. Разумихіна [2].

Нехай для системи (2) знайдена функція Ляпунова n змінних у вигляді додатно визначеної квадратичної форми

$$V_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Розглянемо квадратичну форму $(n+k)$ змінних

$$V = V_0 + \mu_1 (2\alpha_{1,\,n+1} x_1 x_{n+1} + \ldots + 2\alpha_{n,\,n+1} x_n x_{n+1} + \alpha_{n+1,\,n+1} x^2_{n+1}) + \ldots$$
$$\ldots + \mu_k (2\alpha_{1,\,n+k} x_1 x_{n+k} + \ldots + 2\alpha_{n,\,n+k} x_n x_{n+k} + \alpha_{n+k,\,n+k} x^2_{n+k})$$

і вияснимо, чи можна коефіцієнти $\alpha_{i,\,n+s}$, $\alpha_{n+s,\,n+s}$ $(i = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k)$ вибрати так, щоб одержати квадратичну форму, яка буде функцією Ляпунова для системи (1).

Будемо позначати $\left(\frac{dV}{dt}\right)_\mu$, $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_\mu$ похідні квадратичних форм згідно з системою (1), $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0$ — згідно з системою (2).

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_\mu + \Bigg[2\mu_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_{i,n+1}}{dt} x_i x_{n+1} +$$
$$+ 2\mu_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\,n+1} x_{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{ij} x_j\right) + 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\,n+1} x_i \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{n+1,\,j}\, x_j\right) +$$
$$+ 2\alpha_{n+1,\,n+1} x_{n+1} \sum_{j=1}^{n+k} p_{n+1,\,j} x_j + \mu_1 \frac{d\alpha_{n+1,n+1}}{dt} x^2_{n+1}\Bigg] + \tag{3}$$
$$+ \ldots + \Bigg[2\mu_k \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_{i,\,n+k}}{dt} x_i x_{n+k} + 2\mu_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\,n+k} x_{n+k} \left(\sum_{j=1}^{n=k} p_{ij} x_j\right) +$$
$$+ 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\,n+k} x_i \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{n+k,\,j}\, x_j\right) + 2\alpha_{n+k,\,n+k} x_{n+k} \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{n+k,\,j}\, x_j\right) +$$
$$+ \mu_k \frac{d\alpha_{n+k,\,n+k}}{dt} x^2_{n+k}\Bigg].$$

Введемо замість $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ змінні $y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$.

$$y_{n+s} = \sum_{j=1}^{n+k} p_{n+s,\,j}\, x_j \tag{4}$$
$$(s = 1, \ldots, k).$$

Тоді $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_\mu$ можна визначити через $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0$:

$$\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + 2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{ij} \frac{A_y^{(j)}}{\Delta}\right), \tag{5}$$

де

$$A_y^{(j)} = \begin{vmatrix} p_{n+1,\, n+1} & \cdots & p_{n+1,\, j-1} & y_{n+1} & p_{n+1,\, j+1} & \cdots & p_{n+1,\, n+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n+k,\, n+1} & \cdots & p_{n+k,\, j-1} & y_{n+k} & p_{n+k,\, j+1} & \cdots & p_{n+k,\, n+k} \end{vmatrix}$$

$$(j = n+1, \ldots, n+k).$$

Користуючись рівностями (4) і (5) та позначеннями

$$U_s = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{d\alpha_{i,\, n+s}}{dt} x_j \frac{A_y^{(n+s)} - \sum\limits_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+s)}}{\Delta} +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\, n+1} \frac{A_y^{(n+s)} - \sum\limits_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+s)}}{\Delta} \Bigg(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j +$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{n+k} p_{ij} \frac{A_y^{(j)} - \sum\limits_{l=1}^{n} x_l A_l^{(j)}}{\Delta} \Bigg) + \frac{d\,\alpha_{n+s,\, n+s}}{dt} \left(\frac{A_y^{(n+s)} - \sum\limits_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+s)}}{\Delta} \right)^2,$$

$$(s = 1, \ldots, k),$$

після ряду перетворень можна (3) записати у такому вигляді:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + \mu_1 U_1 + \ldots + \mu_k U_k +$$

$$+ 2y_{n+1} \Bigg[\frac{1}{\Delta} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \Bigg(\sum_{l=n+1}^{n+k} p_{il} \Delta_{n+1,\, l} \Bigg) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\, n+1} x_i -$$

$$- \frac{\alpha_{n+1,\, n+1}}{\Delta} \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+1)} \Bigg] + \ldots + 2y_{n+k} \Bigg[\frac{1}{\Delta} \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \Bigg(\sum_{l=n+1}^{n+k} p_{il} \Delta_{n+k,\, l} \Bigg) + \tag{6}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\, n+1} x_i - \frac{\alpha_{n+k,\, n+k}}{\Delta} \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+k)} \Bigg] + 2\sum_{i,\, j=n+1}^{n+k} \frac{\alpha_{ii}}{\Delta} \Delta_{ji} y_i y_j$$

$$(s = 1, \ldots, k),$$

де $\Delta_{ji}\,(j, i = n+1, \ldots, n+k)$ — алгебричні доповнення до елементів p_{ji} визначника Δ.

Припускаючи, що квадратична форма V додатно визначена, а квадратична форма $\frac{dV}{dt}$ від'ємно визначена, одержуємо з умов знаковизначеності:

$$\mu_s \alpha_{n+s,\, n+s} > 0$$

$$(s = 1, \ldots, k) \tag{7}$$

і головні мінори визначника

$$
(-1)^k \left|
\begin{array}{l}
\alpha_{n+1,\,n+1}\dfrac{\Delta_{n+1,\,n+1}}{\Delta}\;\; \alpha_{n+1,\,n+1}\dfrac{\Delta_{n+2,\,n+1}}{\Delta} + \alpha_{n+2,\,n+2}\dfrac{\Delta_{n+1,\,n+2}}{\Delta}\;\ldots \\[2ex]
\ldots\,\alpha_{n+1,\,n+1}\dfrac{\Delta_{n+k,\,n+1}}{\Delta} + \alpha_{n+k,\,n+k}\dfrac{\Delta_{n+1,\,n+k}}{\Delta}\;\; \alpha_{n+1,\,n+1}\dfrac{\Delta_{n+2,\,n+1}}{\Delta} + \\[2ex]
+\alpha_{n+2,\,n+2}\dfrac{\Delta_{n+1,\,n+2}}{\Delta}\;\; \alpha_{n+2,\,n+2}\dfrac{\Delta_{n+2,\,n+2}}{\Delta}\;\ldots\;\alpha_{n+2,\,n+2}\dfrac{\Delta_{n+k,\,n+2}}{\Delta} + \\[2ex]
\qquad\qquad + \alpha_{n+k,\,n+k}\dfrac{\Delta_{n+2,\,n+k}}{\Delta} \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
+\alpha_{n+1,\,n+1} + \dfrac{\Delta_{n+k,\,n+k}}{\Delta} + \alpha_{n+k,\,n+k}\dfrac{\Delta_{n+1,\,n+k}}{\Delta}\,\alpha_{n+2,\,n+2}\dfrac{\Delta_{n+k,\,n+2}}{\Delta} + \\[2ex]
\qquad + \alpha_{n+k,\,n+k}\dfrac{\Delta_{n+2,\,n+k}}{\Delta}\;\ldots\;\alpha_{n+k,\,n+k}\dfrac{\Delta_{n+k,\,n+k}}{\Delta}
\end{array}
\right| \qquad (8)
$$

додатні.

Виберемо $\alpha_{n+s,\,n+s}$ $(s=1,...,k)$ так, щоб виконувалася умова (7) і головні мінори визначника (8) були додатні. Коефіцієнти $\alpha_{i,\,n+s}$ $(i = 1,...,n;\ s=1,...,k)$ визначимо рівностями

$$
\alpha_{i,\,n+s} = \frac{\alpha_{n+s,\,n+s}}{\Delta}\sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+1)} - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\Big(\sum_{l=n+1}^{n+k} p_{il}\Delta_{n+s,\,l}\Big). \qquad (9)
$$

Згідно з умовами а) і б) $\alpha_{i,\,n+s}$ є неперервними і обмеженими функціями часу.

Очевидно, що умова (7) і вимога, щоб головні мінори визначника (8) були додатні, є достатніми, щоб з асимптотичної стійкості системи (2) випливала асимптотична стійкість системи (1).

Дійсно, функція V додатно визначена, оскільки V_0 додатно визначена, μ_s $(s=1,...,k)$ досить малі і виконуються умови (7). В цьому легко переконатися, виписавши визначник форми. Підставивши (9) в (6), одержимо

$$
\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\mu} = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + \mu_1 U_1 + \ldots + \mu_k U_k + 2\sum_{i,\,j=n+1}^{n+k}\frac{\alpha_{ii}}{\Delta}\Delta_{ji}y_i y_j.
$$

Оскільки коефіцієнти $\gamma_{ij}^{(s)}$ квадратичних форм

$$
U_s = \sum_{i,\,j=1}^{n+k}\gamma_{ij}^{(s)} z_i z_j, \quad z_i = \begin{cases} x_i, \text{ якщо } 1 \leqslant i \leqslant n \\ y_i \text{ якщо } n+1 \leqslant i \leqslant n+k \end{cases}
$$

через неперервність і обмеженість коефіцієнтів p_{ij} $(i,j=1,...,n+k)$ та їх перших похідних є обмеженими функціями часу, то при досить малих μ_s $(s=1,...,k)$ квадратична форма $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\mu}$ від'ємно визначена, якщо від'ємно визначена квадратична форма

$$
\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + 2\sum_{i,\,j=1}^{n+k}\frac{\alpha_{ii}}{\Delta}\Delta_{ji}y_i y_j. \qquad (10)
$$

А квадратична форма (10) від'ємно визначена згідно з припущенням відносно V_0 і умовою, що головні мінори визначника (8) додатні. Таким чином, вірна така теорема.

Теорема. *Асимптотична стійкість системи (1) випливає з асимптотичної стійкості «виродженої» системи (2), якщо:*

1) $P_{ij}(t)$ — *неперервні та обмежені разом з похідними першого порядку,*

2) $\Delta \neq 0$ *при* $t \geqslant t_0$,

3) *можна вибрати такі* $\alpha_{n+s, n+s}$ $(s = 1,\ldots,k)$, *що* $\mu_s \alpha_{n+s, n+s} > 0$ і *головні мінори визначника (8) додатні.*

Як наслідок наведемо ознаку, коли умови теореми виконуються.

Наслідок. Якщо для системи (1) виконуються умови 1 і 2 теореми і, крім того,

а) $\Delta_{ii} > 0$ $(i = n+1,\ldots,n+k)$,

б) $\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = 0$ при $j = n+1,\ldots,n+k-2$, $i > j+1$,

в) $\Delta_{ij} \cdot \Delta_{ji} < 0$ при $j = n+1,\ldots,n+k-1$, $i = j+1$,

г) $\mu_3 \Delta < 0$ $(s = 1,\ldots,k)$,

то з асимптотичної стійкості системи (2) випливає асимптотична стійкість системи (1).

Дійсно, визначимо $\alpha_{n+s, n+s}$ $(s = 1,\ldots,k)$ із співвідношень

$$\alpha_{n+1, n+1}\Delta < 0, \quad \alpha_{n+s, n+s} = -\frac{\Delta_{n+s, n+s-1}}{\Delta_{n+s-1, n+s}}\alpha_{n+s-1, n+s-1}$$

$$(s = 2, \ldots, k).$$

Очевидно, що $\alpha_{n+s, n+s}\ \Delta < 0 (s = 1,\ldots,k)$, і для визначених таким способом $\alpha_{n+s, n+s}$ головні мінори визначника (8) додатні. Згідно з г) виконуються і умови (7).

ЛІТЕРАТУРА

1. Малкин М. Г. Теория устойчивости движения. М., 1952.

2. Разумыхин Б. С. Об устойчивости систем с малым множителем. ПММ, т. 21, в. 4, стор. 578—580.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

О. М. ШАБЛІЙ

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИЙ СТАН КРУГЛОЇ ПЛИТИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ КОНЦЕНТРИЧНИМ РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

Постановка задачі. Розглянемо круглу тонку пружну ізотропну плиту постійної товщини $2h$ з радіусом R, підкріплену концентричним кільцем на довільному радіусі R_1.

Плита жорстко закріплена на контурі $r = R$ і знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження по всій поверхні плити. Кільце будемо вважати тонким, тобто таким, деформації якого описуються рівняннями малих деформацій тонких криволінійних стержнів. Середня площина кільця співпадає з середньою площиною плити.

Потрібно: 1) визначити границю пружного опору плити, тобто знайти для кожного підкріплюючого кільця в залежності від його жорсткості та положення на радіусі відповідне максимальне значення навантаження, при якому появляється перша пластична зона на поверхні плити; 2) визначити пружно-пластичний стан плити. Тому що ми будемо оперувати тільки величиною жорсткості кільця, то вона може бути розшифрована як жорсткість пружного або пружно-пластичного кільця відповідних розмірів. Коефіцієнт Пуассона вважається рівний $\nu = 0{,}5$.

Вихідні формули рівняння і позначення. Для зручності позначимо: область всередині кільця D_1, зовні кільця — D, границю між ними — L_1, зовнішню границю — L. Індекс ($_1$) завжди буде відноситися до області D_1. Введемо такі відомі [1] позначення рівняння і формули, які мають місце в області D_1 і D:

$$x = \frac{r}{R}, \quad z = \frac{Z}{h}, \quad w = \frac{W}{h}, \quad b = \frac{R_1}{R} - \tag{1}$$

безрозмірні координати, прогин і радіус;

$$\alpha(x) = -\frac{2}{3}\frac{E}{\sigma_s}\left(\frac{h}{R}\right)^2\left(2\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx}\right),$$

$$\zeta(x) = -\frac{2}{3}\frac{E}{\sigma_s}\left(\frac{h}{R}\right)^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dw}{dx}\right) - \tag{2}$$

безрозмірні функції, які зв'язані співвідношенням

$$\frac{d\alpha}{dx} - 2\frac{d\zeta}{dx} = \frac{3(\alpha - \zeta)}{x}; \tag{3}$$

σ_s — умовна границя текучості матеріалу плити;

$$w = -\frac{1}{2}\frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2\int(2\zeta - \alpha)\,x\,dx + C, \tag{4}$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2(2\zeta - \alpha)\,x - \tag{5}$$

безрозмірний прогин і його похідна.

Напруження при пружних деформаціях визначаються за формулами:

$$\sigma_r = \sigma_s \alpha z, \quad \sigma_\theta = \sigma_s \zeta z. \tag{6}$$

Умовою пластичності візьмемо умову постійності найбільшого за модулем дотичного напруження:

$$\tau = \varkappa_* \tau_s, \tag{7}$$

де τ_s — умовна границя текучості для зсуву (в нашому випадку $\tau_s = {}^1/_2\,\sigma_s$), $\varkappa_* = \mathrm{sign}\gamma$ — кут зсуву, τ — найбільше головне дотичне напруження, яке визначається однією з формул:

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left|\sigma_\theta\right|; \quad \left|\tau_2\right| = \frac{1}{2}\left|\sigma_r\right|; \quad \tau_3 = \frac{1}{2}\left|\sigma_r - \sigma_\theta\right|. \tag{8}$$

Напруження в областях пружно-пластичних деформацій визначаються за формулами:

$$\sigma_r = \varkappa\frac{\alpha}{\zeta}\sigma_s; \quad \sigma_\theta = \varkappa\sigma_s, \quad \text{коли } |\tau_1| \geqslant \begin{cases}|\tau_2|,\\ |\tau_3|\end{cases} \tag{9}$$

$$\sigma_r = -\varkappa\sigma_s; \quad \sigma_\theta = -\varkappa\frac{\zeta}{\alpha}\sigma_s, \quad \text{коли } |\tau_2| \geqslant \begin{cases}|\tau_1|,\\ |\tau_3|\end{cases} \tag{10}$$

$$\sigma_r = -\varkappa\frac{\alpha}{\alpha-\zeta}\sigma_s; \quad \sigma_\theta = -\varkappa\frac{\zeta}{\alpha-\zeta}\sigma_s, \quad \text{коли } |\tau_3| \geqslant \begin{cases}|\tau_1|,\\ |\tau_2|\end{cases} \tag{11}$$

$$\varkappa = \mathrm{sign}\, z.$$

Рівняння рівноваги елементу пластинки в безрозмірних координатах має такий вигляд:

$$\frac{dM_r}{dx} + \frac{M_r - M_\theta}{x} = -RQ(x), \tag{12}$$

де $Q(x) = \frac{qR}{2}x$ — перерізуюча сила в області $D_1 + D$, тому що перерізуюча сила неперервна при переході через L_1.

Рівняння (11) можна переписати в такому вигляді:

а) для пружних деформацій:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\alpha - \zeta}{x} = -\frac{3}{2}Q_*; \quad Q_* = \frac{R}{\sigma_s h^2}Q(x); \tag{13}$$

б) для пружно-пластичних деформацій:

$$\frac{d\alpha}{dx}\Phi_1 + \frac{d\zeta}{dx}\Phi_2 = \frac{\Phi_3}{x} - Q_*, \tag{14}$$

де

$$\Phi_1 = \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{1}{3\zeta^2}\right); \quad \Phi_2 = -\frac{\alpha}{\zeta^2}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right); \quad \Phi_3 =$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha}{\zeta}\right)\left(1 - \frac{1}{3\zeta^2}\right), \quad \text{коли } |\tau_1| \geqslant \begin{cases}|\tau_2|,\\ |\tau_3|\end{cases} \tag{15}$$

$$\Phi_1 = -\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha^3}; \quad \Phi_2 = 0; \quad \Phi_3 = \left(\frac{\zeta}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{3\alpha^2} - 1\right), \text{ коли } |\tau_2| \geqslant \begin{cases} |\tau_1| \\ |\tau_2| \end{cases}, \tag{16}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{(\alpha-\zeta)^2}\left[\zeta - \frac{2\alpha+\zeta}{3(\alpha-\zeta)^2}\right]; \quad \Phi_2 = \frac{\alpha}{(\alpha-\zeta)^2}\left[\frac{1}{(\alpha-\zeta)^2} - 1\right];$$

$$\Phi_3 = 1 - \frac{1}{3(\alpha-\zeta)^2}, \quad \text{коли } |\tau_3| \geqslant \begin{cases} |\tau_1| \\ |\tau_2| \end{cases}. \tag{17}$$

Пружні деформації. Для визначення функцій $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ розв'язуємо систему диференціальних рівнянь (3)—(12). Враховуючи симетрію відносно центра плити, загальним розв'язком цієї системи буде:

в області D_1:

$$\alpha_1(x) = -\frac{21}{64}px^2 + \frac{C_1}{2};$$

$$\zeta_1(x) = -\frac{15}{64}px^2 + \frac{C_1}{2}; \tag{18}$$

в області D:

$$\alpha(x) = -\frac{21}{64}px^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{2};$$

$$\zeta(x) = -\frac{15}{64}px^2 - \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{2}; \quad p = \frac{qR^2}{\sigma_s h^2}. \tag{19}$$

Для визначення сталих C_1, C_2, C_3 маємо дві граничні умови на границі L і три умови спряження на границі L_1:

$$w = 0,$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{на } L\,(x=1),$$

$$w_1 = w,$$

$$\frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx},$$

$$\alpha - \alpha_1 = -\frac{3}{2}\,\frac{A}{\sigma_s h R_1^2 R}\,\frac{dw}{dx} \quad \text{на } L_1\,(x=b), \tag{20}$$

де $A = E_k I_k$ — жорсткість кільця на згин.

Сталі C_1, C_2, C_3 визначаються з другої, четвертої і п'ятої граничних умов. Останні дві умови служать для визначення двох сталих C при знаходженні прогинів за формулою (4) відповідно в області D_1 і D.

Після визначення сталих функції $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ мають вигляд:
в області D_1:

$$\alpha_1(x) = \frac{3p}{64}\left\{3b\,\frac{\Delta b(1-b^2)+2}{\Delta(1-b^2)+2b} - 7x^2\right\},$$

$$\zeta_1(x) = \frac{3p}{64}\left\{3b\,\frac{\Delta b(1-b^2)+2}{\Delta(1-b^2)+2b} - 5x^2\right\}; \tag{21}$$

в області D:

$$\alpha(x) = \frac{3p}{64}\left\{3\,\frac{\Delta(1-b^4)+2b}{\Delta(1-b^2)+2b} + \frac{b^2}{x^2}\,\frac{\Delta(1-b^2)}{\Delta(1-b^2)+2b} - 7x^2\right\},$$

$$\zeta(x)=\frac{3p}{64}\left\{3\,\frac{\Delta(1-b^4)+2b}{\Delta(1-b^2)+2b}-\frac{b^2}{x^2}\,\frac{\Delta(1-b^2)}{\Delta(1-b^2)+2b}-5x^2\right\}, \tag{22}$$

де $\Delta=\frac{9A}{8Eh^3R}$.

Границя пружного опору плити. Існують області зміни Δ і b, в яких відповідні величини $|\alpha(x)|$, $|\zeta(x)|$ чи $|\alpha(x)-\zeta(x)|$ мають максимальне значення. Після аналізу формул (21), (22) виявилося, що кожна з величин $|\alpha(x=1)|$, $|\zeta_1(x=0)|$, $|\alpha_1(x=b)|$ досягає свого максимального значення порівняно з усіма можливими значеннями всіх цих функцій і $|\zeta(x)-\alpha(x)|$ [при довільних x] відповідно в областях I, II та III, які визначаються такими нерівностями:

область I:

$$0<b<0.793,\ 0<\Delta<\frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)};$$

$$0{,}793<b<0.877,\ 0<\Delta<\frac{2b}{11b^2-7b^4-4};$$

$$0.877<b<1,\ 0<\Delta<\frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)};$$

область II:

$$0.793<b<0.877,\ \frac{2b}{11b^2-7b^4-4}<\Delta<\frac{2(6-7b^2)}{b(1-b^2)};$$

область III:

$$\sqrt{0{,}5}<b<0.793,\ \frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)}<\Delta<\infty;$$

$$0.793<b<0.877,\ \frac{2(6-7b^2)}{b(1-b^2)}<\Delta<\infty;$$

$$0.877<b<1,\ \frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)}<\Delta<\infty.$$

В області I значення $p=p_s$, при перевищенні якого виникають пластичні деформації, визначається з умови $\alpha(x=1)=-1$ і дорівнює:

$$p_{s1}=\frac{16}{3}\,\frac{\Delta(1-b^2)+2b}{\Delta(1-b^2)^2+2b}. \tag{23}$$

В області II з умови $\zeta_1(x=0)=1$ визначаємо p_s у вигляді:

$$p_{s2}=\frac{64}{9}\,\frac{\Delta(1-b^2)+2b}{\Delta(1-b^2)\,b^2+2b}. \tag{24}$$

В області III з умови $\alpha_1(x=b)=-1$ маємо

$$p_{s3}=\frac{32}{3}\,\frac{\Delta(1-b^2)+2b}{2\Delta b^2(1-b^2)+7b^3-3b}. \tag{25}$$

Значення p_{s1} і p_{s3} при $\Delta\to\infty$ асимптотично прямують до величин, які відповідно рівні:

$$p_{s1}(\Delta=\infty)=\frac{16}{3}\,\frac{1}{1-b^2}, \tag{26}$$

$$p_{s3}(\Delta = \infty) = \frac{16}{3}\,\frac{1}{b^2}, \qquad (27)$$

причому формула (26) вірна при $0 \leqslant b \leqslant \sqrt{0.5}$, а (27) при $\sqrt{0.5} \leqslant b < 1$. Звідси випливає, що максимальна границя пружного опору кільця дорівнює:

$$p_s = p_{s1}(\Delta = \infty,\ b = \sqrt{0.5}) = p_{s3}(\Delta = \infty,\ b = \sqrt{0.5}) = \frac{32}{3},$$

тобто вона в два рази більша від границі пружного опору жорстко закріпленої плити без підкріплюючого кільця $(\Delta = 0)$.

Оптимальне розміщення кільця на радіусі визначається з таких рівнянь:

$$0 \leqslant \Delta \leqslant 7{,}3,\quad \Delta b^4 - 3b^3 - 2\Delta b^2 + b + \Delta = 0, \qquad (28)$$

$$7{,}3 \leqslant \Delta \leqslant 11,\quad 7\Delta b^4 - 11\Delta b^2 + 2b + 4\Delta = 0, \qquad (29)$$

$$11 \leqslant \Delta < \infty,\quad 4\Delta b^4 - 7b^3 - 6\Delta b^2 + 7b + 2\Delta = 0. \qquad (30)$$

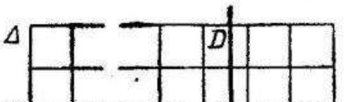


Рис. 1.

В прямокутній системі координат (Δ, b) ці рівняння будуть описувати деяку ламану криву $ABCD$ (рис. 1). Цю криву назвемо кривою оптимального розміщення. Для точок кривої $ABCD$ при значеннях $\Delta > 20$ підкріплююче кільце з достатньою для практики точністю (до 4%) можна вважати за абсолютно жорстке, тобто для них можна вважати, що

$$p_s = \frac{16}{3}\,\frac{1}{b^2}.$$

П р у ж н о - п л а с т и ч н и й н а п р у ж е н и й с т а н. При значеннях навантаження, коли $p > p_s$, для визначення $\alpha(x)$, $\zeta(x)$ потрібно розв'язувати пружно-пластичну задачу.

В областях пружно-пластичних деформацій $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ визначаються з системи рівнянь (3)—(14) при відповідних значеннях функцій Φ_1, Φ_2 і Φ_3.

Будемо розглядати пружно-пластичний напружений стан плити при значеннях (Δ, b), які лежать на кривій оптимального розміщення $ABCD$. Аналогічно це можна робити для всіх інших значень (Δ, b).

Коли (Δ, b) належать кривій AB, то $|\alpha(x = 1)|$ буде максимальним і з рівнянь (14), (3) одержимо

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left[\frac{3}{8}px^2 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\zeta}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{7}{3\alpha^2}\right)\right]\frac{\alpha^3}{x}. \qquad (31)$$

При значенні навантаження, коли $p > p_{s1}$, біля границі L появляється зона пружно-пластичних деформацій, яка поширюється на відрізку $\varrho_1 \leqslant x \leqslant 1$, і функції $\alpha(x)$, $\zeta(x)$ визначаються інтегруванням системи (3)—(31) при граничних умовах

$$\zeta = \zeta_{\varrho_1};\ 2\zeta(x = 1) = \alpha(x = 1). \qquad (32)$$

При $0 < x < \varrho_1$ плита буде в пружному стані і функції $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ визначатимуться за формулами (18), (19).

Після задоволення останніх двох умов (20) функції $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ мають такий вигляд:

при $0 \leqslant x \leqslant b$:

$$\alpha_1(x) = -\frac{21}{64}px^2 + \zeta_0;$$

$$\zeta_1(x) = -\frac{15}{64}px^2 + \zeta_0; \tag{33}$$

при $b \leqslant x \leqslant 1$:

$$\alpha(x) = -\frac{21}{64}px^2 + \frac{\Delta}{x^2}\left(\frac{b}{6}\zeta_0 - \frac{3pb^3}{128}\right) + \zeta_0\left(\frac{\Delta}{2b} + 1\right) - \frac{9p\Delta b}{128};$$

$$\zeta(x) = -\frac{15}{64}px^2 - \frac{\Delta}{x^2}\left(\frac{b}{6}\zeta_0 - \frac{3pb^3}{128}\right) + \zeta_0\left(\frac{\Delta}{2b} + 1\right) - \frac{9p\Delta b}{128}, \tag{34}$$

де $\zeta_0 = \zeta_1(x = 0) = \alpha_1(x = 0)$.

З умови $\alpha(x = \varrho) = -1$ одержимо рівняння для визначення ϱ_1 у вигляді:

$$\frac{21}{64}p\varrho_1^4 + \left\{\frac{9p\Delta b}{128} - \zeta_0\left(\frac{\Delta}{2b} + 1\right) - 1\right\}\varrho_1^2 - \Delta\left(\frac{b}{6}\zeta_0 - \frac{3pb^3}{128}\right) = 0. \tag{35}$$

Тому, що система рівнянь (3) — (31) нелінійна, інтегрування її будемо проводити наближеним методом. Процес підрахунків виглядатиме так.

Припустивши, що $p > p_s$, вибираємо значення ζ_0, а потім за формулою (35) визначаємо ϱ_1 і за (34) — $\zeta(x = \varrho_1)$.

В інтервалі $\varrho_1 < x < 1$ обчислення ведуться за формулами:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_n \delta x; \quad \zeta_{n+1} = \zeta_n + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)_n \delta x, \tag{36}$$

де α_n, ζ_n — значення цих функцій на початку n-го інтервалу.

Підбираємо ζ_0 так, щоб задовольнити другу з граничних умов (32). Збільшуючи навантаження, обчислення проводимо таким способом до появи другої пластичної зони, для якої теж потрібно розв'язувати пружно-пластичну задачу.

Змінюючи (Δ, b) по кривій BC, будемо мати випадок одночасної появи пластичних зон біля границі $L[\varrho_2 < x < 1]$ і в центрі плити $[0 < x < \varrho_3]$. В інтервалі $\varrho_2 < x < 1$ потрібно інтегрувати систему (3)—(31), а в $[0 < x < \varrho_3]$ друге рівняння заміниться таким:

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{2\left(1 - \frac{1}{3\zeta^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{\zeta}\right) + \frac{p}{2}x^2}{2\left(1 - \frac{1}{3}\zeta^2\right) - \frac{\alpha}{\zeta}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)} \cdot \frac{\zeta}{x}. \tag{37}$$

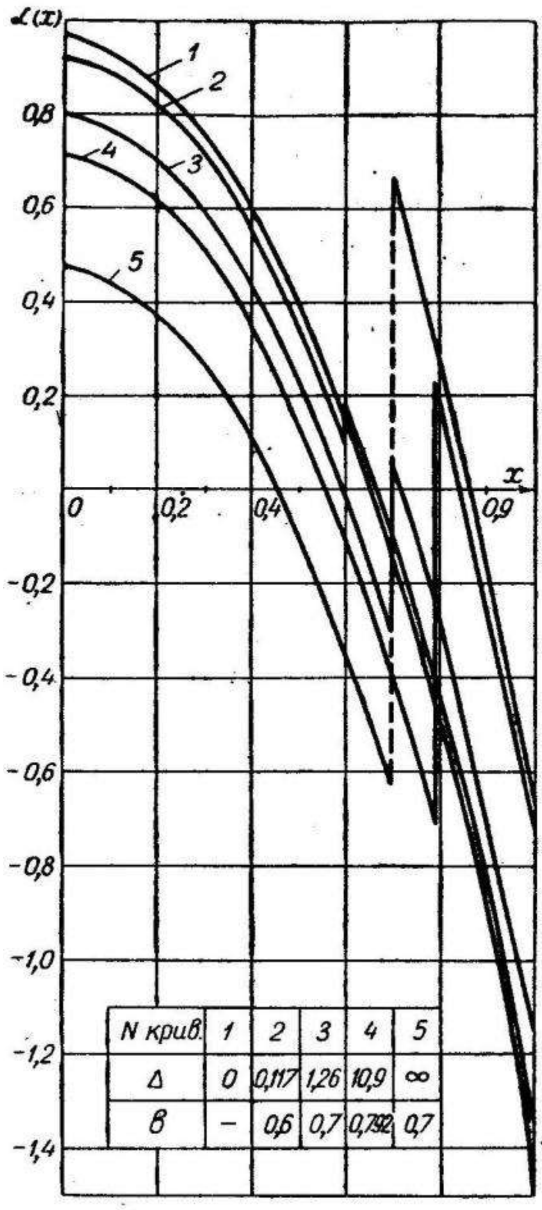
В центрі плити $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} = 0$. Обчислення проводяться в такій послідовності. Припустимо, що $p > p_s$. Вибираємо $\zeta_0 = \alpha_0$ і інтегруємо систему (3)—(37) за формулами (36) до значення $x = \varrho_3$, при якому $\zeta_1(x = \varrho_3) = 1$. В інтервалі $\varrho_3 < x < b$ $\alpha(x)$, $\zeta(x)$ визначаються за формулами (18), причому стала C_1 визначається з умови $\zeta_1 = \zeta\varrho_3$. При $b < x < \varrho_2$ $\alpha(x)$, $\zeta(x)$ визначаються за формулами (19), а сталі C_2 і C_3 — з останніх двох умов (20).

Значення ϱ_2 визначаємо з умови $\alpha(x=\varrho_2) = -1$, де $\alpha(x)$ береться з формул (19).

В інтервалі $\varrho_2 < x < 1$ інтегруємо систему (3)—(31), використовуючи формули (36), при граничних умовах $\zeta = \zeta_{\varrho_2}$, $2\zeta(x=1) = \alpha(x=1)$ ζ_0 підбираємо так, щоб задовольнити другу граничну умову.

Коли (Δ, b) знаходяться на кривій CD, пластичні зони появляються одночасно біля границі L і на внутрішній стороні L_1 $(x < b)$. При $0 < x < \varrho_4$ мають місце формули (33). Припустивши, що ζ_0, для визначення ϱ_4 будемо мати рівняння:

$$\frac{21}{64} p\varrho_4^2 - \zeta_0 - 1 = 0. \qquad (38)$$



N крив.	1	2	3	4	5
Δ	0	0,117	1,26	10,9	∞
в	—	0,6	0,7	0,792	0,7

Рис. 2.

Знайшовши $\zeta(x=\varrho_4)$, інтегруємо систему (3)—(31) в інтервалі $[\varrho_4 < x < b]$ за формулами (36) і знаходимо $\alpha_1(x=b)$, $\zeta_1(x=b)$. За формулою (5) визначаємо $\frac{dw_1}{dx}$ при $x=b$. Підставивши $\alpha_1(x=b)$ і $\frac{dw_1}{dx}$ $(x=b)$ в останні дві умови (20), одержимо два рівняння для визначення сталих C_2 і C_3, які входять у формули (19). Вони мають місце на інтервалі $[b < x < \varrho_5]$. Величину ϱ_5 визначаємо з умови $\alpha(x=\varrho_5) = -1$, де $\alpha(x=\varrho_5)$ визначається за першою з формул (19). В інтервалі $[\varrho_5 < x < 1]$ інтегруємо систему (3)—(31) при граничних умовах $\zeta = \zeta_{\varrho_5}$, $2\zeta(x=1) = \alpha(x=1)$. ζ_0 підбираємо так, щоб задовольнити другу граничну умову.

На рис. 2 наведені графіки функції $\alpha(x)$ в залежності від (Δ, b), які знаходяться на кривій $ABCD$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Григорьев А. С. Изгиб круглой плиты при линейном упрочнении материала. Инженерный сборник, т. 13, 1952.

2. Григорьев А. С. Изгиб кольцевых и круговых пластин переменной и постоянной толщины за пределом упругости. Инженерный сборник, т. 20, 1954.

3. Флейшман Н. П. Пружна рівновага плити з ребрами жорсткості змінної кривизни. Наукові записки Львівського ун-ту, т. 44, вип. 8, 1957.

Е. І. ЛУНЬ

ПРУЖНА ПІВПЛОЩИНА З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ЖОРСТКИМ КІЛЬЦЕМ

В роботі методом лінійного спряження розв'язується задача про напружений стан пружної півплощини, яка навантажена розподіленими зусиллями на прямолінійній границі і має круговий отвір, підкріплений абсолютно жорстким кільцем. Задача про підкріплення кругового отвору пружної півплощини пружним кільцем розв'язана І. Г. Арамановичем (1) методом Д. І. Шермана і І. О. Прусовим (4) методом лінійного спряження.

Нехай пружна невагома півплощина має круговий отвір одиничного радіуса з центром на віддалі h від границі півплощини, причому в отвір півплощини впаяно жорстке кільце (рис. 1). Границю півплощини і кругового отвору позначимо відповідно через L і L_1. Систему координат комплексної площини $z = x + iy$ виберемо так, як показано на рисунку. Знайдемо пружний стан півплощини, якщо на L, за винятком відрізка $(-a, +a)$, і на відрізку $(-a, +a)$ відповідно діють тиски q і $q + N$.

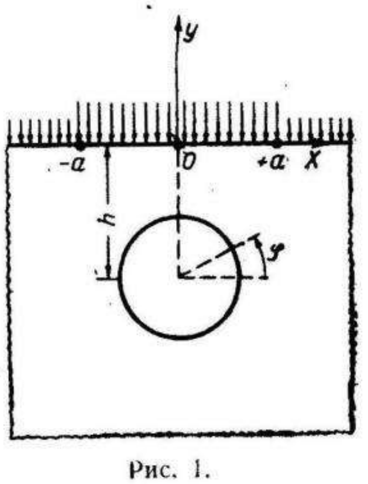


Рис. 1.

Нехай $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ — функції напружень Колосова—Мусхелішвілі, визначені в області півплощини при $y < 0$. Тоді на границі півплощини одержуємо таку граничну умову [4]:

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) \doteq \begin{cases} q \text{ на } L \text{ без } (-a, +a), \\ q + N \text{ на } (-a, +a). \end{cases} \quad (1)$$

Як і в роботі [4], рівняння (1) задовільнимо, припустивши, що

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2} q + \frac{N}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z+a} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (z + z_0)^{-k} \quad \text{при } y < 0, \quad (2)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2} q + \frac{N}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z+a} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^{-k} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} b_k (z+z_0)^{-k} \text{ при } y > 0, \tag{3}$$

де $z_0 = -ih$, a_k і b_k — невідомі сталі коефіцієнти.

Функцію $\Psi_1(z)$ при $y < 0$ знаходимо за формулою $\Psi_1(z) = -\Phi_1(z) - \overline{\Phi}_1(z) - z\Phi_1'(z)$, що, враховуючи (2) і (3), дає:

$$\Psi_1(z) = -\frac{Naz}{\pi i (z^2 - a^2)} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(a_k + z_0 a_{k-1}) - \overline{b}_k](z - z_0)^{-k} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(b_k - z_0 b_{k-1}) - \overline{a}_k](z + z_0)^{-k}. \tag{4}$$

Робимо заміну $z = \zeta + z_0$. Тоді з (2) і (4) одержимо:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta + z_0) = -\frac{1}{2} q + \frac{N}{2\pi i} \ln \frac{\zeta + z_0 - a}{\zeta + z_0 + a} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (\zeta + 2z_0)^{-k}, \tag{5}$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi_1(\zeta + z_0) + \overline{z}_0 \Phi_1'(\zeta + z_0) = -\frac{Na(\zeta + 2z_0)}{\pi i [(\zeta + z_0)^2 - a^2]} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(a_k + 2z_0 a_{k-1}) - \overline{b}_k]\zeta^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)b_k - \overline{a}_k](\zeta + 2z_0)^{-k}. \tag{6}$$

Розклавши в ряд по степенях ζ праві частини (5) і (6), для ζ за модулем, близьким до одиниці, одержуємо:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \zeta^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad (|\zeta| > 1), \tag{7}$$

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_k + B_k)\zeta^k + \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(a_k + 2z_0 a_{k-1}) - \overline{b}_k]\zeta^{-k}, \quad (|\zeta| > 1), \tag{8}$$

де

$$M_0 = -\frac{1}{2}\left(q + \frac{Na}{\pi}\right); \quad M_k = (-1)^{k+1} \frac{N}{2\pi i k}\left[\frac{1}{(z_0 - a)^k} - \frac{1}{(z_0 + a)^k}\right], \quad (k \geqslant 1),$$

$$T_k = (-1)^{k+1} \frac{N}{2\pi i}\left[\frac{z_0 + a}{(z_0 - a)^{k+1}} - \frac{z_0 - a}{(z_0 + a)^{k+1}}\right], \quad (k \geqslant 0), \tag{9}$$

$$A_k = (-1)^k \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (2z_0)^{-(k+n)} C_{n+k-1}^n b_n,$$

$$B_k = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^k (2z_0)^{-(k+n)} C_{n+k-1}^n [(n-1)b_n - \overline{a}_n], \tag{10}$$

α — кут між прямими, що проходять через центр колового отвору і точки $-a$ і $+a$ на прямолінійному контурі L.

Розповсюджуючи визначення функції $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta| < 1$ за формулою

$$\Phi(\zeta) = -\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta}\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2}\Psi\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

з (7) і (8) знаходимо:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(\overline{M}_k + \overline{A}_k)\zeta^{-k} - \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\overline{a}_k\zeta^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(\overline{a}_{k+2} - 2z_0\overline{a}_{k-1}) - b_{k+2}]\zeta^k +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}(\overline{T}_{k-2} + \overline{B}_{k-2})\zeta^{-k}, \quad (|\zeta| < 1). \tag{11}$$

На контурі колового отвору має місце така умова [2]:

$$\varkappa\Phi^-(\sigma) + \Phi^+(\sigma) = 0. \tag{12}$$

Підставивши в (12) вирази (7) і (11), одержимо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa(M_k + A_k)\sigma^k + \sum_{k=2}^{\infty}\varkappa a_k\sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}(\overline{M}_k + \overline{A}_k)(k-1)\sigma^{-k} -$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\overline{a}_k\sigma^k + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(\overline{a}_{k+2} - 2z_0\overline{a}_{k+1}) - b_{k+2}]\sigma^k +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}(\overline{T}_{k-2} + \overline{B}_{k-2})\sigma^{-k} = 0. \tag{13}$$

Прирівнюючи в (13) коефіцієнти при однакових степенях σ і враховуючи, що a_k, b_k, A_k, B_k, M_k і T_k дійсні при k парному і уявні при k непарному, одержимо такі дві безмежні системи рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa a_2 + M_2 + A_2 + T_0 + B_0 = 0,\\
&\varkappa a_3 - 2(M_3 + A_3) - T_1 - B_1 = 0,\\
&\varkappa a_4 + 3(M_4 + A_4) + T_2 + B_2 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varkappa a_k + (-1)^k[(k-1)(M_k + A_k) + T_{k-2} + B_{k-2}] = 0.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}&(\varkappa-1)(M_0+A_0)+a_2-b_2=0,\\&\varkappa(M_1+A_1)-2(a_3+2z_0a_2)-b_3=0,\\&\varkappa(M_2+A_2)-3a_2+3(a_4+2z_0a_3)-b_4=0,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\varkappa(M_k+A_k)-[(k+1)(a_k-a_{k+2}-2z_0a_{k+1})](-1)^k-b_{k+2}=0.\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\}$$

Розписуючи (10) і враховуючи наші попередні умови, одержуємо вирази для A_k і B_k через a_k і b_k:

$$\begin{aligned}&A_0=\frac{1}{4z_0^2}b_2+\frac{1}{8z_0^3}b_3+\frac{1}{16z_0^4}b_4+\dots,\\&A_1=-\frac{1}{4z_0^3}b_2-\frac{1}{16z_0^4}b_3-\frac{1}{8z_0^5}b_4-\frac{5}{64z_0^6}b_5-\dots,\\&A_2=\frac{3}{16z_0^4}b_2+\frac{3}{16z_0^5}b_3+\frac{5}{32z_0^6}b_4+\frac{1}{128z_0^7}b_5+\dots,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&B_0=\frac{1}{4z_0^2}(b_2-a_2)+\frac{1}{8z_0^3}(2b_3+a_3)+\frac{1}{16z_0^4}(3b_4-a_4)+\dots,\\&B_1=-\frac{1}{4z_0^3}(b_2-a_2)-\frac{3}{16z_0^4}(2b_3+a_3)-\frac{1}{8z_0^5}(3b_4-a_4)-\dots,\\&B_2=\frac{3}{16z_0^4}(b_2-a_2)+\frac{3}{16z_0^5}(2b_3+a_3)+\frac{5}{32z_0^6}(3b_4-a_4)+\dots,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{15}$$

Виразивши з (14) a_k і b_k через M_k, T_k, A_k, і B_k і підставивши їх в (15), одержимо системи рівнянь для визначення A_k і B_k. Знайшовши A_k і B_k, зможемо знайти коефіцієнти a_k і b_k функцій Φ і Ψ, а через них за відомими формулами [2] і напруження в будь-якій точці пружної півплощини.

В окремому випадку, якщо припустити, що $a=h=3$, $\varkappa=2$, для компонентів напружень на границі колового отвору одержимо:

φ	σ_r	σ_φ	$\tau_{r\varphi}$
$\frac{\pi}{2}$	$-1{,}372\,N-1{,}418\,q$	$-0{,}460\,N-0{,}473\,q$	0
$\frac{\pi}{4}$	$-0{,}780\,N-1{,}457\,q$	$-0{,}259\,N-0{,}485\,q$	$-0{,}351\,N+0{,}0086\,q$
0	$-0{,}260\,N-1{,}479\,q$	$-0{,}0853\,N-0{,}493\,q$	$+0{,}207\,N-0{,}0182\,q$
$-\frac{\pi}{4}$	$-0{,}664\,N-1{,}466\,q$	$-0{,}222\,N-0{,}489\,q$	$+0{,}471\,N-0{,}020\,q$
$-\frac{\pi}{2}$	$-0{,}960\,N-1{,}458\,q$	$-0{,}320\,N-0{,}485\,q$	0

З граничних умов задачі виходить, що на границі L в точці $\zeta=3i$ напруження $\sigma_r=-N-q$.

Обчисливши за допомогою функцій Φ і Ψ напруження σ_r в цій точці, одержимо:

$$\sigma_r = -0{,}964\, N - 0{,}991\, q.$$

Це вказує на достатню точність проведених підрахунків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арамaнович И. Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. ДАН СССР, т. 104, № 3, 1955.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4. М., 1954.
3. Мусхелишвили Н. И. Основные граничные задачи теории упругости для полуплоскости. Сообщения АН ГрузССР, т. 2, № 10, 1941.
4. Прусов І. О. Пружна півплощина з підкріпленим круговим отвором. Наукові записки Львівського ун-ту, серія мех.-мат, т. 44, в. 8, 1957.

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ, Я. М. КІЗИМА

ДО ПИТАННЯ ЗМІШАНОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Розглянемо змішану граничну задачу теорії пружності для ортотропної пластинки з круговим отвором.

Нехай безмежна ортотропна пластинка з круговим отвором радіуса R розтягується на безмежності у двох взаємно перпендикулярних напрямках зусиллями інтенсивністю Q і N.

На частині L_1 кругового отвору задані декартові компоненти вектора зміщення $u = f_1(t)$ і $v = f_2(t)$, а на останній частині краю L_2 — компоненти зовнішніх зусиль, які вважаємо рівними нулю.

Крім цього, вважається відомим головний вектор зовнішніх зусиль, прикладених до L_1.

Відомі функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ вважатимемо такими, що їх перші похідні $f_1'(t)$ і $f_2'(t)$ задовольняють на L_1 умову Гельдера.

В задачі потрібно визначити нормальні і дотичні напруження на L_1.

Розв'язок поставленої задачі для ізотропного випадку розглянуто в працях [2], [4], [5].

Загальний розв'язок цієї задачі для ортотропної пластинки у випадку відсутності напружень на безмежності дано в праці [1].

Нами розглядається узагальнення розв'язку задачі у випадку відмінності від нуля розтягуючих напружень на безмежності, а також деякі приклади, які являють самостійний інтерес.

Будемо додержуватись позначень праці [1]. На основі [1] розв'язок задачі виражається двома функціями:

$$W_3(\zeta) = \frac{X_3(\zeta)}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\alpha_1(\sigma)d\sigma}{X_3(\sigma)(\sigma-\zeta)} + X_3(\zeta)\left[C_1 + \frac{D_1}{\zeta - z_1} + \frac{E_1}{\zeta + z_1}\right],$$

$$W_4(\zeta) = \frac{X_4(\zeta)}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\beta_1(\sigma)d\sigma}{X_4(\sigma)(\sigma-\zeta)} + X_4(\zeta)\left[C_2 + \frac{D_2}{\zeta - z_2} + \frac{E_2}{\zeta + z_2}\right], \tag{1}$$

через які нормальні і дотичні напруження визначаються за формулами:

$$\sigma_r = \frac{S_1(\sigma)[W_4^+(\sigma) - W_4^-(\sigma)] - S_2(\sigma)[W_3^+(\sigma) - W_3^-(\sigma)]}{2\pi i\,[S_1(\sigma) - S_2(\sigma)]},$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{W_3^+(\sigma) - W_3^-(\sigma) - [W_4^+(\sigma) - W_4^-(\sigma)]}{2\pi i\,[S_1(\sigma) - S_2(\sigma)]}. \tag{2}$$

Функції $\alpha_1(\sigma)$ і $\beta_1(\sigma)$ можна записати у вигляді

$$\alpha_1(\sigma) = \alpha(\sigma) + \alpha_2(\sigma) \text{ і } \beta_1(\sigma) = \beta(\sigma) + \beta_2(\sigma),$$

де $\alpha(\sigma)$ і $\beta(\sigma)$ — функції, знайдені в [1], а

$$\alpha_2(\zeta) = \frac{2\pi i \sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3} + n_2)(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})(\sigma^2 - z_1^2)} \{ Q[\sigma^2(n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1}) +$$

$$+ (n_5 \sqrt{n_3} - n_4 \sqrt{n_1})] + N[-(n_6 \sqrt{n_1} +$$

$$+ n_7 \sqrt{n_3})\sigma^2 + (n_6 \sqrt{n_1} - n_7 \sqrt{n_3})]\},$$

$$\beta_2(\zeta) = \frac{2\pi i \sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3} - n_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})(\sigma^2 - z_2^2)} \{ Q[\sigma^2(n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3}) -$$

$$- (n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1})] + N[\sigma^2(n_7 \sqrt{n_3} - n_6 \sqrt{n_1}) + (n_6 \sqrt{n_1} + n_7 \sqrt{n_3})]\}.$$

При цьому $n_1 = a_{11}(\beta_1 + \beta_2)$, $n_2 = a_{12} + \frac{a_{22}}{\beta_1 \beta_2}$, $n_3 = a_{22} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2}$,

$$n_4 = \frac{a_{11}}{n_1} + 1, \quad n_5 = \frac{a_{11}}{n_1}; \quad n_6 = \frac{a_{22}}{n_3}, \quad n_7 = 1 + \frac{a_{22}}{n_3}.$$

Для визначення сталих D_1, E_1, D_2, E_2, $A_1 = \int\limits_{L_1} \sigma_r \frac{d\sigma}{\sigma}$ і $B_1 = \int\limits_{L_1} \tau_{r\varphi} \frac{d\sigma}{\sigma}$ маємо такі умови [1]:

$$D_1 = i \frac{z_1}{X_3(z_1)} \int\limits_{L_1} \tau_{r\varphi} \frac{d\sigma}{\sigma - z_1}, \quad D_2 = i \frac{z_2}{X_4(z_2)} \int\limits_{L_1} \tau_{r\varphi} \frac{d\sigma}{\sigma - z_2},$$

$$E_1 = -i \frac{z_1}{X_3(-z_1)} \int\limits_{L_1} \tau_{r\varphi} \frac{d\sigma}{\sigma + z_1}, \quad E_2 = -i \frac{z_2}{X_4(-z_2)} \int\limits_{L_1} \tau_{r\varphi} \frac{d\sigma}{\sigma + z_2}; \tag{3}$$

$$A_1 - iB_1 = X_3(0) \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\alpha_1(\sigma)\, d\sigma}{X_3(\sigma)\sigma} + C_1 + \frac{E_1 - D_1}{z_1} \right],$$

$$A_1 - iB_1 = X_4(0) \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\beta_1(\sigma)\, d\sigma}{X_4(\sigma)\sigma} + C_2 + \frac{E_2 - D_2}{z_2} \right]. \tag{4}$$

Спираючись на результати праці [1], розглянемо два приклади, які становлять самостійний практичний інтерес.

П р и к л а д 1. Нехай до дуги L_1 кругового отвору в ортотропній пластинці (рис. 1) прикладений жорсткий штамп, який має форму дуги отвору того ж радіуса, нерухомо зв'язаний з пружним тілом і вдавлюється нормальною силою P, прикладеною симетрично і направленою по осі ox. В цьому випадку маємо:

$$P_x = P, \ P_y = 0, \ Q = 0, \ N = 0, \ f_1'(\sigma) = 0, \ f_2'(\sigma) = 0,$$

$$C_1 = C_2 = i \frac{P}{R} \tag{5}$$

і внаслідок симетрії задачі

$$B_1 = \int\limits_{L_1} \tau_{r\varphi} \frac{d\sigma}{\sigma} = 0.$$

Враховуючи (5), одержимо:

$$\alpha_1(\sigma)=\frac{2\sqrt{n_1}}{(\sqrt{n_1 n_3}+n_2)(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})(\sigma^2-z_1^2)}\Big[-i(n_2+n_3)\frac{P}{R}\sigma+$$

$$+\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})A_1\Big],$$

$$\beta_1(\sigma)=\frac{2\sqrt{n_1}}{(\sqrt{n_1 n_3}-n_2)(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3})(\sigma^2-z_2^2)}\Big[i(n_2+n_3)\frac{P}{R}\sigma+$$

$$+\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})A_1\Big].$$

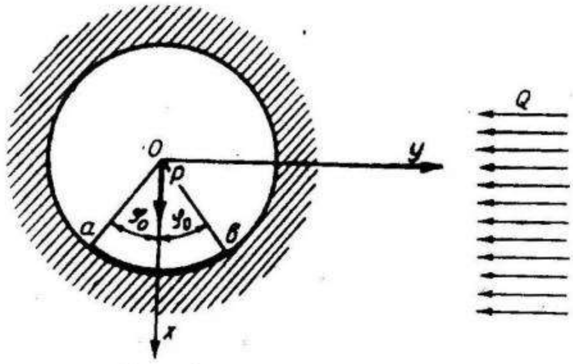


Рис. 1.

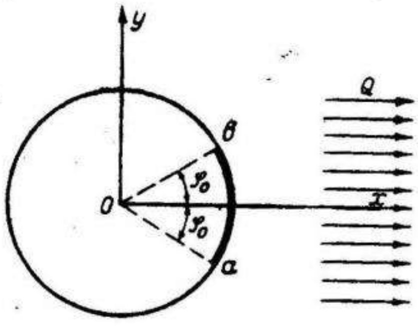


Рис. 2.

Обчислюючи інтеграли типу Коші в (1) і користуючись (2), отримуємо:

$$\sigma_r=-\frac{\sqrt{n_1 n_3}\,S_2(\sigma)X_3(\sigma)}{\pi i(\sqrt{n_1 n_3}-n_2)[S_1(\sigma)-S_2(\sigma)]}\Bigg\{\frac{1}{\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})}\frac{i}{2}\Bigg[\frac{1}{X_3(z_1)(\sigma-z_1)}\times$$

$$\times\left(\frac{n_2+n_3}{R}P+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}A_1\right)+\frac{1}{X_3(-z_1)(\sigma+z_1)}\left(\frac{n_2+n_3}{R}P-\right.$$

$$\left.-\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}A_1\right)+2(n_2+n_3)\frac{P}{R}\Bigg]+\left(i\frac{P}{R}+\frac{D_1}{\sigma-z_1}+\frac{E_1}{\sigma+z_1}\right)\Bigg\}+ \qquad (6)$$

$$+\frac{\sqrt{n_1 n_3}\,S_1(\sigma)X_4(\sigma)}{\pi i(\sqrt{n_1 n_3}+n_2)[S_1(\sigma)-S_2(\sigma)]}\Bigg\{\frac{1}{\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3})}\frac{i}{2}\Bigg[\frac{1}{X_4(z_2)(\sigma-z_2)}$$

$$\left(-\frac{n_2+n_3}{R}P+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}A_1\right)-\frac{1}{X_4(-z_2)(\sigma+z_2)}\left(\frac{n_2+n_3}{R}P+\right.$$

$$\left.+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}A_1\right)-2(n_2+n_3)\frac{P}{R}\Bigg]+\left(\frac{iP}{R}+\frac{D_2}{\sigma-z_2}+\frac{E_2}{\sigma+z_2}\right)\Bigg\};$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{\sqrt{n_1 n_3}\,X_3(\sigma)}{\pi i(\sqrt{n_1 n_3}-n_2)[S_1(\sigma)-S_2(\sigma)]}\Bigg\{\frac{1}{\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})}\times$$

$$\times\frac{i}{2}\Bigg[\frac{1}{X_3(z_1)(\sigma-z_1)}\left(\frac{n_2+n_3}{R}P+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}A_1\right)+$$

$$+\frac{1}{X_3(-z_1)(\sigma+z_1)}\left(\frac{n_2+n_3}{R}P-\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}A_1\right)+$$

$$+2(n_2+n_3)\frac{P}{R}\Bigg]+\left(i\frac{P}{R}+\frac{D_1}{\sigma-z_1}+\frac{E_1}{\sigma+z_1}\right)\Bigg\}- \qquad (7)$$

$$-\frac{\sqrt{n_1 n_3}\,X_4(\sigma)}{\pi i\left(\sqrt{n_1 n_3}+n_2\right)\left[S_1(\sigma)-S_2(\sigma)\right]}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_3}\left(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}\right)}\frac{i}{2}\left[\frac{1}{X_4(z_2)(\sigma-z_2)}\left(-\frac{n_2+n_3}{R}P+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}\,A_1\right)-\frac{1}{X_4(-z_2)(\sigma+z_2)}\left(\frac{n_2+n_3}{R}P+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}\cdot A_1\right)-2\left(n_2+n_3\right)\frac{P}{R}\right]+\left(i\frac{P}{R}+\frac{D_2}{\sigma-z_2}+\frac{E_2}{\sigma+z_2}\right)\right\}.$$

Підставивши $\tau_{r\varphi}$ з (7) в (3) і прирівнявши праві частини (4), знаходимо п'ять рівнянь для визначення п'яти невідомих D_1, E_1, D_2, E_2 і A_1. Результати обчислень не наводимо через їх громіздкість.

Наведемо остаточний результат для контактних напружень на L_1:

$$\sigma_r=-\frac{P(n_3-n_1)}{8\pi R\sqrt{n_3}\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\left\{\frac{\sqrt{n_1 n_3}+n_2}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}\cdot\right. \tag{8}$$

$$\cdot e^{\varphi_0\delta}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\right)+z_2^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{n_1 n_3}-n_2}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}e^{-\varphi_0\delta}\left[z_1^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\right)\right]\right\};$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{P(n_3-n_1)}{8\pi R\sqrt{n_3}\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\left\{\frac{\sqrt{n_1 n_3}+n_2}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}\cdot\right. \tag{9}$$

$$\cdot e^{\varphi_0\delta}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\right)+z_2^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{n_1 n_3}-n_2}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}e^{-\varphi_0\delta}\left[z_1^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\right)\right]\right\};$$

$$z_1=i\sqrt{\frac{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3}}};\quad z_2=i\sqrt{\frac{\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}};$$

$$\alpha=\delta\ln\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}};$$

$$\delta=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{n_1 n_3}-n_2}{\sqrt{n_1 n_3}+n_2},$$

а φ_0 вказано на рис. 1.

Приклад 2. Ортотропна пластинка з круговим отвором радіуса R рівномірно розтягується на безмежності паралельно осі ox зусиллями інтенсивністю Q. З дугою L_1 нерухомо спаяна жорстка накладка так, що ця дуга може зміщуватись лише як ціле (рис. 2).

Будемо розглядати тільки такі положення накладки, для яких дуга L_1 зміщується поступально. Розглянемо випадок, вказаний на рис. 2. В цьому випадку $P_x=P_y=0$, $N=0$, $C_1=C_2=0$, $f_1'(\sigma)=f_2'(\sigma)=0$ і $B_1=\int\limits_{L_1}\tau_{r\varphi}\frac{d\sigma}{\sigma}=0$ в силу симетрії. (10)

Враховуючи (10), маємо:

$$\alpha_1(\sigma) = \frac{2\sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3}+n_2)(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})(\sigma^2-z_1^2)}\Big\{\pi Q i\Big[\sigma^2(n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1})+$$
$$+(n_5\sqrt{n_3}-n_4\sqrt{n_1})\Big]+(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3})A_1\Big\},$$
$$\beta_1(\sigma) = \frac{2\sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3}-n_2)(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3})(\sigma^2-z_2^2)}\Big\{\pi Q i\Big[\sigma^2(n_4\sqrt{n_1}-n_5\sqrt{n_3})-$$
$$-(n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1})\Big]+(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})A_1\Big\}.$$

Як і в прикладі 1, на L_1 одержуємо:

$$\sigma_r = \frac{Q(n_3-n_1)}{8\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\Bigg\{\frac{n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}e^{\varphi_0\delta}\Big[z_2^2\cos\Big(\frac{\varphi}{2}-$$
$$-\alpha\Big)+C'_1 z_2^2\cos\Big(\frac{\varphi}{2}+\alpha\Big)+\cos\Big(\frac{5}{2}\varphi-\alpha\Big)+C'_1\cos\Big(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\Big)\Big]+$$
$$+\frac{n_4\sqrt{n_1}-n_5\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}\cdot e^{-\varphi_0\delta}\Big[z_1^2\cos\Big(\frac{\varphi}{2}+\alpha\Big)+F'_1 z_1^2\cos\Big(\frac{\varphi}{2}-\alpha\Big)+$$
$$+\cos\Big[\frac{5}{2}\varphi+\alpha\Big)+F_1^1\cos\Big(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\Big)\Big]\Bigg\}; \tag{11}$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{Q(n_3-n_1)}{8\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\Bigg\{\frac{n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}e^{\varphi_0\delta}\Big[z_2^2\sin\Big(\frac{\varphi}{2}-$$
$$-\alpha\Big)-C'_1 z_2^2\sin\Big(\frac{\varphi}{2}+\alpha\Big)-\sin\Big(\frac{5}{2}\varphi-\alpha\Big)-C'_1\sin\Big(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\Big)\Big]-$$
$$-\frac{n_4\sqrt{n_1}-n_5\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}\cdot e^{-\varphi_0\delta}\Big[-z_1^2\sin\Big(\frac{\varphi}{2}+\alpha\Big)+F'_1 z_1^2\sin\Big(\frac{\varphi}{2}-\alpha\Big)+$$
$$+\sin\Big(\frac{5}{2}\varphi+\alpha\Big)+F'_1\sin\Big(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\Big)\Big]\Bigg\}, \tag{12}$$

де $C_1' = -\cos\varphi_0 + 2\delta\sin\varphi_0$,
$F_1' = -(\cos\varphi_0 + 2\delta\sin\varphi_0)$,
а φ_0 вказано на рис. 2.

В границі формули (8), (9), (11) і (12) співпадають з відомими результатами праці Б. Л. Мінцберга [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Грилицький Д. В. Змішана гранична задача теорії пружності для ортотропного масиву з круговим вирізом. Прикладна механіка, вип. 4, 1957.
2. Карцивадзе И. Н. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сообщения АН ГрузССР, т. VII, № 8, 1946.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ГИТТЛ, 1957.
4. Минцберг Б. Л. Смешанная граничная задача теории упругости для плоскости с круговым отверстием. ПММ, т. 12, в. 4, 1948.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

В. М. ГНАТИКІВ

ПОЛОГА СФЕРИЧНА ОБОЛОНКА ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

Розглянемо пологу сферичну оболонку під дією нормальних до поверхні зосереджених сил при довільних крайових умовах.

Напружено-деформований стан пологих сферичних оболонок визначається функцією прогинів $w(\alpha, \beta)$ і функцією напружень $\varphi(\alpha, \beta)$, які задовольняють такі рівняння:

$$\Delta\Delta\varphi + \frac{Eh}{k^2R}\Delta w = 0,$$

$$\Delta\Delta w - \frac{1}{Dk^2R}\Delta\varphi = \frac{1}{Dk^4}P(\alpha, \beta), \tag{1}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$, $k^4 = \frac{Eh}{R^2D}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,

α, β — безрозмірні координати, зв'язані з розмірними x, y такими співвідношеннями: $\alpha = kx$, $\beta = ky$. Як показано в роботах [1] і [2], загальний розв'язок системи (1) можна подати в такому вигляді:

$$w(\alpha, \beta) = w^1(\alpha, \beta) + w^0(\alpha, \beta) + \frac{1}{Dk^2R}\Phi(\alpha, \beta),$$

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi^1(\alpha, \beta) + \varphi^0(\alpha, \beta) + \Psi(\alpha, \beta), \tag{2}$$

де $w^1(\alpha, \beta)$ — розв'язок однорідного рівняння

$$\Delta\Delta w^1 + w^1 = 0; \tag{3}$$

$w^0(\alpha, \beta)$ — частковий розв'язок неоднорідного рівняння

$$\Delta\Delta w^0 + w^0 = \frac{1}{Dk^4}P(\alpha, \beta); \tag{4}$$

$\Phi(\alpha, \beta)$ і $\Psi(\alpha, \beta)$ — гармонічні функції.

Функції $\varphi^1(\alpha, \beta)$ і $\varphi^0(\alpha, \beta)$ зв'язані із $w^1(\alpha, \beta)$ і $w^0(\alpha, \beta)$ такими формулами:

$$\varphi^1 = \frac{Eh}{k^2R}\Delta w^1,$$

$$\Delta\varphi^0 = -\frac{Eh}{k^2R}w^0. \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (3) будемо шукати в полярній системі координат у вигляді ряду

$$w^1 = \sum_0^\infty w_n(r)\cos n\Theta. \tag{6}$$

Підставивши (6) в (3), одержуємо для функції $w_n(r)$ рівняння, розв'язками якого є функції Бесселя і Ганкеля першого роду, n-го порядку. Тоді розв'язок (6) набере такої форми:

$$w^1 = \sum_0^\infty [A_n u_n(r) + B_n v_n(r) + C_n f_n(r) + D_n g_n(r)]\cos n\Theta, \tag{7}$$

де A_n, B_n, C_n, D_n — сталі коефіцієнти.

$$u_n(r) = \operatorname{Re} j_n(r\sqrt{i}),\ v_n(r) = Im\, j_n(r\sqrt{i}),$$

$$f_n(r) = \operatorname{Re} H_n^{(1)}(r\sqrt{i}),\ g_n(r) = Im\, H_n^{(1)}(r\sqrt{i}).$$

Часткові розв'язки неоднорідного рівняння (4) для різних видів несиметричних навантажень одержані в роботі [1]. У випадку дії на оболонку одної зосередженої сили цей розв'язок одержаний у формі:

$$w^0 = \frac{P}{4k^2D} F_3(\rho), \tag{8}$$

де $F_3(\varrho)$ — дійсна частина функції Ганкеля нульового порядку, аргументу $\varrho\sqrt{i}$, ϱ — віддаль від точки прикладання сили P.

Використовуючи теорему додавання циліндричних функцій нульового порядку, частковий розв'язок (8) можна зобразити в такому вигляді:

при $r \leqslant r_0$:

$$w^0(r, \Theta) = \frac{P}{2k^2D} {\sum_0^\infty}' [f_n(r_0) u_n(r) - g_n(r_0) v_n(r)]\cos n\Theta;$$

при $r \geqslant r_0$:

$$w^0(r, \Theta) = \frac{P}{2k^2D} {\sum_0^\infty}' [u_n(r_0) f_n(r) - v_n(r_0) g_n(r)]\cos n\Theta, \tag{9}$$

де r_0 — віддаль точки прикладання сили P від початку координат. Знак $'$ при сумах означає, що перший доданок необхідно взяти з половинним коефіцієнтом.

Гармонічні функції Φ і Ψ теж можна подати у формі ряду

$$\Phi = a_0 + b_0 \ln r + \sum_1^\infty (a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\Theta, \tag{10}$$

$$\Psi = c_0 + d_0 \ln r + \sum_1^\infty (c_n r^n + d_n r^{-n})\cos n\Theta.$$

Підставивши (7) і (9) в (5), одержуємо такі вирази для φ^0 і φ^1:

$$\varphi^1(r, \Theta) = \frac{Eh}{k^2R} \sum_0^\infty [A_n v_n(r) - B_n u_n(r) + C_n g_n(r) - D_n f_n(r)]\cos n\Theta; \tag{11}$$

при $r \leqslant r_0$:

$$\varphi^0(r, \Theta) = \frac{RP}{2} \sum_0^{\infty}{}' [f_n(r_0) v_n(r) + g_n(r_0) u_n(r)] \cos n\Theta;$$

при $r \geqslant r_0$: (12)

$$\varphi^0(r, \Theta) = \frac{RP}{2} \sum_0^{\infty}{}' [u_n(r_0) g_n(r) + v_n(r_0) f_n(r)] \cos n\Theta.$$

Якщо на оболонку діє $N+1$ — сили, які розміщені по колу радіуса r_0 і на рівній віддалі одна від одної, то функція прогинів $w(r, \Theta)$ і функція напружень $\varphi(r, \Theta)$ наберуть такого вигляду:

при $r \leqslant r_0$:

$$w(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(r) + B_n v_n(r) + C_n f_n(r) + D_n g_n(r)] \cos n\Theta + \frac{1}{Dk^2 R} [a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\Theta] + \frac{P}{2k^2 D} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty}{}' [f_n(r_0) u_n(r) - g_n(r_0) v_n(r)] \cos n(m\gamma - \Theta); \quad (13)$$

$$\varphi(r, \Theta) = \frac{Eh}{k^2 R} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n v_n(r) - B_n u_n(r) + C_n g_n(r) - D_n f_n(r)] \cos n\Theta + [c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{-n}) \cos n\Theta] + \frac{RP}{2} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty}{}' [f_n(r_0) v_n(r) + g_n(r_0) u_n(r)] \cos n(m\gamma - \Theta);$$

при $r \geqslant r_0$:

$$w(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(r) + B_n v_n(r) + C_n f_n(r) + D_n g_n(r)] \cos n\Theta + \frac{1}{Dk^2 R} \sum_{m=0}^{N} [a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\Theta] + \frac{P}{2k^2 D} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty}{}' [u_n(r_0) f_n(r) -$$

$$-v_n(r_0)\,g_n(r)]\cos n(m\gamma-\Theta);$$

$$\varphi(r,\Theta)=\frac{Eh}{k^2R}\sum_{n=0}^{\infty}[A_n v_n(r)-B_n u_n(r)+C_n g_n(r)-$$

$$-D_n f_n(r)]\cos n\Theta+[c_0+d_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n r^n+$$

$$+d_n r^{-n})\cos n\Theta+\frac{RP}{2}\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}{}'[u_n(r_0)\,g_n(r)+$$

$$+v_n(r_0)\,f_n(r)]\cos n(m\gamma-\Theta),$$

де $\gamma=\frac{2\pi}{N+1}$.

Якщо розв'язується крайова задача суцільної пологої сферичної оболонки під дією вказаного вище навантаження, то із обмеженості зусиль, моментів і переміщень у вершині оболонки (при $r=0$) випливає, що

$$C_n=D_n=b_n=d_n=0.$$

Всі інші сталі коефіцієнти визначаються із крайових умов.

Одержані вище розв'язки можна використати при розв'язуванні задач пологих сферичних оболонок з концентричним отвором у вершині оболонки. В цьому випадку всі сталі коефіцієнти визначаються із крайових умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гнатыкив В. Н. Частные решения уравнений пологих сферических оболочек под действием некоторых частичных нагрузок. Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1960.

2. Reissner E. On the determination of stresses and displacements for unsymmetrical deformations of shallow spherical shells. J. Math. and Phys., № 1, 1959.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Є. М. ПАРАСЮК

ПРО ОДИН МЕТОД ПРИВЕДЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ПЛОСКОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА

Як відомо, одним із шляхів розв'язування плоских задач теорії пружності є приведення цих задач до інтегральних рівнянь типу Фредгольма.

В літературі відомо багато методів приведення плоских задач теорії пружності до інтегральних рівнянь. Цими питаннями займались Корн, Міхлін, Шерман, Мусхелішвілі та ін.

В цій роботі подається ще один метод приведення плоских задач теорії пружності до інтегральних рівнянь типу Фредгольма, що базується на новому методі приведення граничних задач для систем диференціальних рівнянь еліптичного типу до регулярних інтегральних рівнянь, розроблений проф. Я. Б. Лопатинським. Зокрема наводиться перша основна задача плоскої теорії пружності до системи інтегральних рівнянь типу Фредгольма.

Перша основна задача розглядається як границя другої основної задачі плоскої теорії пружності при

$$\varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3_\mu} = 1,$$

де λ і μ — сталі Ламе.

Як відомо, перша основна задача плоскої теорії пружності для області D, обмеженої контуром S в матричній формі, формулюється так: Треба знайти розв'язок системи

$$(1 - \varkappa)\Delta U + 2\varkappa\partial\partial' U = 0, \tag{1}$$

неперервно диференційований в $D \boxed{U} S$ і 2 рази неперервно диференційований в D, що задовольняє граничні умови

$$(1 - \varkappa)[\nu_1\partial_1 + \nu_2\partial_2) E + \partial\nu'] U + (3\varkappa - 1)\nu\,\partial' U|_S = F, \tag{2}$$

де

$$U_{(x)} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, x = (x_1, x_2) \in D,$$

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\partial' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

E — одинична матриця, $F = F(y)$ — неперервна і обмежена вектор-функція на S, а $\nu' = (\nu_1, \nu_2)$ — орт внутрішньої нормалі до S.

Граничні умови (2), як відомо, виражають задання напружень на границі S плоского тіла D.

Для другої основної задачі плоскої теорії пружності на границі S задається сама функція зміщень $U(x)$, тобто

$$U(x)|_S = F_1(y), \quad (y \boxed{\in} S). \tag{3}$$

Як відомо з робіт академіка Мусхелішвілі, загальним розв'язком системи (1) є

$$2\mu\, U = 2\mu\,(u_1 + iu_2) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\varphi(x) - x\overline{\varphi'(x)} - \overline{\psi(x)}, \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — аналітичні функції в області D комплексного змінного $x = x_1 + ix_2$. Тоді гранична умова (3) для другої основної задачі набере такого вигляду:

$$\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\varphi(y) - y\overline{\varphi'(y)} - \overline{\psi(y)} = 2\mu(g_1 + ig_2) \quad (\text{на } S), \tag{5}$$

а для першої основної задачі граничну умову (2) можна записати:

$$\varphi(y) + y\overline{\varphi'(y)} + \overline{\psi(y)} = f_1 + if_2 + \text{const} \quad (\text{на } S). \tag{6}$$

Нетрудно помітити, що при $\varkappa = 1$ умова (5) набирає вигляду (6), тобто вигляду граничних умов першої основної задачі. Для цього треба в (5) замість функції $\varphi(x)$ взяти $i\varphi(x)$, а замість $\psi(x)$ — $i\psi(x)$.

Отже, перша основна задача може бути представлена як границя другої основної задачі при $\varkappa = 1$. А для другої основної задачі плоскої теорії пружності Е. Імшенецькою побудоване ядро:

$$G^{(\nu(z))}(x - z) = \frac{(x - z_1\nu)}{\pi}\left\{\frac{1 - \varkappa}{|x - z|^2} + \frac{2\varkappa}{|x - z|^4}(x - z)(x - z)'\right\}, \tag{7}$$

за допомогою якого розв'язок другої основної задачі представляється так:

$$U(x) = \int\limits_S G^{(\nu(z))}(x - z)\mu(z)\,dz\,S, \quad (x \in D, \ z \in S), \tag{8}$$

де введено позначення

$$(x - z) = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \end{pmatrix},$$

а $\mu(z)$ — невідома вектор-функція на S.

Природно вважати розв'язком першої основної задачі функцію (8), де

$$G^{(\nu(z))}(x - z) = \frac{2}{\pi}\frac{(x - z_1\nu)}{|x - z|^4}(x - z)(x - z)^1. \tag{9}$$

Очевидно, ядро (9) при переході через границю S терпить розрив, але інтеграл (8) збігається.

Доведемо формулу стрибка для інтеграла (8) при наближенні точки x до границі S із середини і ззовні області D.

Лема 1.

$$\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,d_y S = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \,\overline{\in}\, D \cup S, \\ 2E, & \quad " \quad x \in D,\ y \in S. \end{cases} \tag{10}$$

Доведення. Зобразимо ядро $G^{(\nu)}(x-y)$ у вигляді

$$G^{(\nu)}(x-y) = \sum_{k=1}^{2} \nu_k G_k^{(\nu)}(x-y),$$

де

$$G_k^{(\nu)}(x-y) = \frac{2}{\pi}\frac{(x_k-y_k)}{|x-y|^4}(x-y)(x-y)' \quad (k=1,2).$$

Легко перевірити, що

$$\frac{\partial G_1^{(\nu)}(x-y)}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2^{(\nu)}(x-y)}{\partial x_2} = 0.$$

Звідси в силу формули Остроградського випливає перша з рівностей (10). Для доведення другої рівності (10) досить провести обчислення інтеграла (8), припустивши, що границя S є коло з центром в точці x радіуса $|x-y|$. Одержимо:

$$\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,d_y S = \frac{2}{\pi}\int\limits_S \frac{(x-y,\nu)}{|x-y|^4}(x-y)(x-y)'d_y S =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_S \frac{(x-y)(x-y)'}{|x-y|^3}\,d_y S. \tag{11}$$

Коли S — коло з центром в точці x, то члени матриці $\frac{(x-y)(x-y)'}{|x-y|^3}$, які рівні $\frac{(x_k-y_k)(x_i-y_i)}{|x-y|^3}$ $(i \neq k)$, при інтегруванні дадуть нуль, і залишається обчислити інтеграл від діагональних елементів.

Маємо:

$$\int\limits_S \frac{(x_k-y_k)^2}{|x-y|^3}\,d_y S = \frac{1}{2}\int\limits_S \frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{|x-y|^3}\,d_y S = \frac{1}{2}\int\limits_S \frac{d_y S}{|x-y|} = \pi.$$

Підставивши цю формулу в (11), одержимо другу з рівностей (10).

Лема 2. *Пряме значення інтеграла (8) рівне E.*

$$\int\limits_S G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_y S = E, \quad y_0 \in S.$$

Доведення. З точки y_0 (рис. 1) описуємо коло Σ_ε радіуса ε. Це коло відрізує від контура S частину S_ε. Частину кола, що знаходиться всередині D, позначимо через Σ_ε^+, а зовні D — Σ_ε^-. Проводимо в точці y_0 дотичну до S, яка розсікає коло на два півкола: σ_ε^+, що відповідає внутрішній нормалі до S, і σ_ε^-, що відповідає зовнішній нормалі до S.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS-\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS\right\}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS-\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS\right\}=0. \tag{12}$$

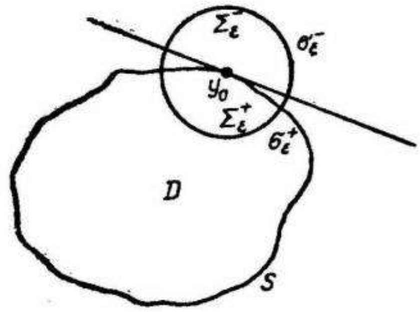


Рис. 1.

Дійсно, різниця, що стоїть у фігурних дужках, може бути записана як інтеграл від тієї ж підінтегральної функції по деякій дузі, що лежить на колі, довжина якої прямує до 0 при $\varepsilon\to 0$.

Зауважимо, що

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon^+} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=\int\limits_{\sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS. \tag{13}$$

Це випливає з того, що

$$G^{(\nu)}(y_1,\ y_2)=G^{(\nu)}(-y_1,\ -y_2).$$

Із (12) і (13) випливає:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^+} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS\right\}=0, \tag{14}$$

де в першому інтегралі розглядається внутрішня нормаль до кола Σ_ε, Далі маємо:

$$\int\limits_{S-S_\varepsilon} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=2E,$$

$$\int\limits_{S-S_\varepsilon} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^-} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=0. \tag{15}$$

Зауважимо, що при інтегруванні по Σ_ε^- мається на увазі внутрішня нормаль до кола, а по Σ_ε^+ — зовнішня нормаль до кола.

Із рівності (15), враховуючи (14), одержимо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S-S_\varepsilon} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=\int\limits_{S} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=E.$$

Л е м а 3. *Для будь-якої вектор-функції $\mu(y)$, неперервної на контурі S, інтеграл (8) зазнає розриву вздовж S, що визначається формулами:*

$$U^+(y_0)=U(y_0)+\mu(x_0), \tag{16}$$
$$U^-(y_0)=U(y_0)-\mu(y_0),\ y_0\in S,$$

де $U^+(y)$ — граничне значення $U(x)$ при $x\to y_0$ із середини D,
$U^-(y)$ — граничне значення $U(x)$ при $x\to y_0$ ззовні D.

Доведення. Перепишемо інтеграл (8) так:

$$U(x)=\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,[\mu(y)-\mu(y_0)]\,d_yS+$$

$$+\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,\mu(y_0)\,d_yS. \qquad (17)$$

Оскільки $\mu(y)$ — неперервна на S і контур S такий, що має місце оцінка на S:

$$|\nu(y_0)-\nu(y)|<K|y_0-y|^{\alpha},\ \alpha<1,$$

то оцінка для $G^{(\nu)}(x-y)$ буде порядку $\frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}$ і перший інтеграл у формулі (17) неперервний у точці $y_0\in S$.

Перейдемо в (17) до границі при $x\to y_0$. Одержимо:

$$U^+(y_0)=U(y_0)+\mu(y_0),\ \text{коли}\ x\to y_0\ \text{із середини}\ D,$$

$$U^-(y_0)=U(y_0)-\mu(y_0),\ \text{коли}\ x\to y_0\ \text{ззовні}\ D.$$

Використовуючи ці формули і переходячи в (8) до границі при $x\to y$, де $y\in S$, для першої основної задачі одержуємо таку систему інтегральних рівнянь Фредгольма II роду:

$$\mu(y)+\int\limits_S G^{(\nu)}(y-z)\,\mu(z)\,d_zS=f(y) \qquad (18)$$

для внутрішньої задачі і

$$-\mu(y)+\int\limits_S G^{(\nu)}(y-z)\,\mu(z)\,d_zS=f(y) \qquad (19)$$

для зовнішньої задачі, де $f(y)$ — задача неперервна і обмежена функція на S.

Доведемо одне твердження. Всяку функцію виду

$$U(x)=\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,\mu(y)\,d_yS,\ x\in D,\ y\in S \qquad (20)$$

можна зобразити так:

$$U(x)=\varphi(x)-x\overline{\varphi'(x)}-\overline{\psi(x)}, \qquad (21)$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — аналітичні функції в області D.

Це означає, що будь-який розв'язок інтегрального рівняння (18) дає розв'язок першої основної задачі плоскої теорії пружності.

Доведення. Помножимо рівність (20) на рядок $(1, i)$. Враховуючи, що оскільки $\nu=\nu_1+i\nu_2$, $\tau=\nu_2-i\nu_1$, то

$$\tau=-i\nu,\ \text{і}\ \tau d_\nu S=dy,$$

$$\bar\tau=i\bar\nu \qquad \bar\tau d_yS=d\bar y,$$

одержимо:

$$U(x)=\frac{x}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\overline{\mu(y)}}{(\bar x-\bar y)^2}\,d\bar y-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{y\,\overline{\mu(y)}}{(\bar x-\bar y)^2}\,d\bar y+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\mu(y)}{\bar x-\bar y}\,d\bar y-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\overline{\mu(y)}}{\bar{x}-\bar{y}}\,dy-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\mu(y)}{x-y}\,dy. \tag{22}$$

Взявши

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\mu(y)}{y-x}\,dy,$$

$$\overline{\psi(x)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{y\overline{\mu(y)}}{(\bar{x}-\bar{y})^2}\,d\bar{y}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\mu(y)}{\bar{x}-\bar{y}}\,d\bar{y}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\overline{\mu(y)}}{\bar{x}-\bar{y}}\,dy,$$

із формули (22) одержимо функцію виду (21).

ЛІТЕРАТУРА

1. Имшенецкая Е. Ф. Кандидатская диссертация. Львов, 1953.
2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, 2 изд. М.—Л., 1947.
3. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. матем. журнал, т. 5, № 2, 1953.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 4 изд. М., 1954.

К. С. КОСТЕНКО

СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ІНВАРІАНТНА ВІДНОСНО НЕЕВКЛІДОВОЇ ГРУПИ РУХУ

Нехай

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + \lambda u = 0 —$$

система чотирьох диференціальних рівнянь другого порядку, де $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ матричний диференціальний оператор, $u(x)$ — стовпчик невідомих функцій і λ — довільний дійсний параметр. Нехай, крім того, областю зміни аргументів системи є сфера радіуса R з центром в початку координат.

Точку $y_1(0,0,0,R)$ перетворенням, матриця якого

$$T_x = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & x_3 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

можна перевести в будь-яку точку сфери $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Це перетворення будемо записувати так:

$$x = T_x y_1. \tag{2}$$

Матриця перетворення T_x ортогональна і оборотна. Надалі матрицю перетворення будемо називати просто перетворенням.

Нехай тепер φ — будь-яке перетворення, що переводить якусь точку y сфери в будь-яку іншу точку x цієї ж сфери, тобто

$$x = \varphi y. \tag{3}$$

Очевидно, T_x є частковий випадок перетворення φ, а тому

$$\varphi y_1 = T_x y_1,$$

звідки

$$y_1 = T_x^{-1} \varphi y_1. \tag{4}$$

Із останнього випливає, що перетворення $T_x^{-1}\varphi$ залишає нерухомою вісь ox_4. Таким чином, перетворення (4) є обертання навколо осі ox_4. Позначимо його через

$$P = T_x^{-1} \varphi,$$

звідки

$$\varphi = T_x P.$$

Обертання навколо осі ox_4 можна здійснити за допомогою трьох таких перетворень:

$$P_1=\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2=\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система диференціальних рівнянь називається інваріантною відносно перетворення φ, якщо

$$G\sum_{k\,l=1}^{4} A_{\kappa l}(y)\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial x_j}{\partial y_l}G^{-1}=A_{ij}(x),$$

$$G\sum_{k=1}^{4} A_{\kappa}(y)\frac{\partial x_i}{\partial y_k}G^{-1}=A_i(x),$$

$$GA_0(y)\,G^{-1}=A_0(x).$$

Якщо система буде інваріантною відносно перетворення φ, то вона повинна бути інваріантною і відносно його часткового випадку T_x, а тому як для перетворення T_x, так і для перетворення $T_x\,P$, коефіцієнти системи повинні бути тотожними.

Виходячи з цього, умови інваріантності для матриць коефіцієнтів при других похідних системи відносно перетворення φ на сфері радіуса R можна записати у вигляді

$$T_x\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}^{(y)}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial x_l}{\partial y}T_x^{-1}\equiv T_xP\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(y)\frac{\partial x_k}{\partial y_l}\frac{\partial x_l}{\partial y_i}P^{-1}T_x^{-1},$$

звідки

$$\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(y)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial x_l}{\partial y_j}\equiv P\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(y)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial x_l}{\partial y_i}P^{-1}, \qquad (5)$$

де $A_{ij}(y)$ — матриці коефіцієнтів при других похідних системи.

Умови (5) можна записати окремо для матриць P_1, P_2 і P_3. Тому що ці умови є тотожні, то вони, зокрема, мають місце і для $y_1(0,0,0,R)$. В цій точці і знаходимо матриці коефіцієнтів A_{ij}. Співвідношення (5) диференціюємо по φ_i і припускаємо, що $\varphi_i=0$. Використовуючи (5), знаходимо конкретний вигляд матриць A_{ij}.

Матриці коефіцієнтів при перших похідних системи і вільні члени знаходять аналогічно з використанням умов інваріантності для них, подібних (5).

Маючи зв'язок між матрицями коефіцієнтів системи в точках y і x:

$$T_x \sum_{k,l=1}^{4} A_{kl}(y) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} T_x^{-1} = A_{ij}(x),$$

$$T_x \sum_{k=1}^{4} A_k(y) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} T_x^{-1} = A_i(x),$$

$$T_x A_0(y) T_x^{-1} = A_0(x),$$

знаходимо їх конкретний вигляд у будь-якій точці x. При знаходженні матриць коефіцієнтів системи враховувалась також умова ортогональності системи до вектора $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Одержану систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими, інваріантну відносно обертання в чотиривимірному просторі і ортогональну до вектора $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$, перераховуємо в сферичній системі координат. Тому що для сфери R — стала, незалежними змінними залишуються α_1, α_2, α_3. При цьому використовуємо зв'язок між координатами точки в декартовій і сферичній системах координат:

$$x_1 = R \cos \alpha_1,$$

$$x_2 = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

$$x_3 = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3,$$

$$x_4 = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3.$$

Вимога, щоб система була ортогональною до вектора $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$, тотожня вимозі, щоб розв'язок цієї системи був ортогональним до x, тобто розв'язок повинен бути ортогональним до радіуса сфери (знаходитись в дотичній площині до сфери). Звідси стовпчик розв'язків виглядає так:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Після підрахунків одержуємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими, яка буде інваріантною відносно обертань на сфері. А тому що обертання на сфері утворюють групу руху в неевклідовому просторі, одержимо систему рівнянь, інваріантну відносно неевклідової групи руху:

$$\sum_{i,j=1}^{3} A'_{ij} \frac{\partial v}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^{3} A'_i \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} + A'_0 v = 0,$$

$$A'_{11} = \begin{pmatrix} a_{11}^{11}(R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{11}(R) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{11}(R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
A'_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a^{12}_{12}(R) & 0 & 0 \\ \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
A'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{12}_{12}(R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
A'_{22} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^{11}_{11}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
A'_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
A'_{33} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a^{11}_{11}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Б. В. КОВАЛЬЧУК

НАБЛИЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ, ВИЗНАЧЕНИХ ПОЛІГАРМОНІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

Нехай $\Lambda^{(r)} H_{\omega_1, \omega_2}$ — клас функцій $f(x,y)$ періоду 2π по x і y, що мають узагальнену похідну (за Соболєвим) $2r$-го порядку:

$$\varphi(x,y) = \Delta^r f = \Delta(\Delta^{r-1} f) \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

для якої виконується співвідношення

$$|\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)| \leqslant \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|), \tag{1}$$

де ω_1 і ω_2 — задані модулі неперервності.

Позначимо через

$$E_{m,n}(\Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}; x,y) = \sup_{f \in \Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}} |f(x,y) - S_{m,n}(f;x,y)| \tag{2}$$

верхню грань відхилень $f(x,y)$ від їх сум Фур'є $S_{m,n}(f;x,y)$, поширену на ввесь клас $\Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}$.

Треба довести таку теорему.

Теорема. *Для $r \geqslant 1$ (r — ціле) має місце асимптотична рівність*

$$E_{m,n}(\Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}; x, y) =$$

$$= \Theta_{m,n} \frac{8}{\pi^4} \frac{\ln m \ln n}{(m^2+n^2)^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{m}\right),\ \omega_2\left(\frac{2v}{n}\right)\right\} \sin u \sin v \, du \, dv +$$

$$+ O\left[\left(\ln m + \ln n\right)\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{2r}} + \frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{2r}}\right)\right], \tag{3}$$

де $\Theta_{m,n} = 1$, якщо ω_1 і ω_2 — випуклі функції, а в загальному випадку

$$\frac{1}{2} \leqslant \Theta_{m,n} \leqslant 1.$$

Доведення. Оскільки верхня грань (2) не залежить від x і y, то при її знаходженні можна припустити, що $x = y = 0$. Крім цього, шукана верхня грань не зміниться, якщо її поширити на більш вузький клас $H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}$ функцій φ, які належать до класу H_{ω_1,ω_2} і задовольняють умову $\varphi(0,0)=0$.

Далі, для даного класу функцій можна одержати інтегральне зображення [2]:

$$f(x, y)=\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{(r)}\lambda_{k,l}}{\pi^2(k^2+l^2)^r}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+u, y+v)\cos ku\cos lv\,du\,dv,$$

де штрих при сумі означає, що пропущений член $k=l=0$,

$$\lambda_{k,l}=\begin{cases}1 \text{ при } k\geqslant 1,\ l\geqslant 1,\\ \frac{1}{2} \text{ при } k=0,\ l\geqslant 1;\ k\geqslant 1;\ l=0.\end{cases}$$

Тепер не важко знайти, що

$$E_{m,n}=\sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}}\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u, v)\sum_{0}^{m}\sum_{0}^{n}D_{k,l}(u, v)\,du\,dv\right|, \tag{4}$$

де

$$D_{k,l}(u, v)=\left(\sum_{k+1}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}+\sum_{0}^{k}\sum_{l+1}^{\infty}\right)\frac{\lambda_{ij}}{(i^2+j^2)^r}\cos iu\cos jv.$$

Звідси, спираючись на результати [3], [4], [5], після ряду оцінок приходимо до рівності

$$E_{m,n}=\sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}}\left|\frac{1}{(m^2+n^2)^r\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u,v)D_k(u)D_l(v)\,du\,dv\right|+$$

$$+O\left[(\ln m+\ln n)\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{2r}}+\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{2r}}\right)\right], \tag{5}$$

де $D_k(u)$ — ядро Діріхле.

Але на основі теореми П. Т. Бугайця [1] маємо:

$$\sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}}\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u, v)D_k(u)D_l(v)\,du\,dv\right|=$$

$$=\Theta_{m,n}\frac{8\ln m\ln n}{\pi^4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{m}\right), \omega_2\left(\frac{2v}{n}\right)\right\}\sin u\sin v\,du\,dv+$$

$$+O\left[(\ln m+\ln n)\left(\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$

Цим завершується доведення теореми.

Зауважимо, що рівність (3) є асимптотичною при $m,n \to \infty$, якщо $C_1 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant C_2$, де C_1 і C_2 — додатні константи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугаец П. Т. ДАН СССР, 79, № 4, 1951.
2. Бугров Я. С. Успехи матем. наук, XIII, вып. 2, № 2, 1958.
3. Ковальчук Б. В. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций. Тезисы докладов. Л., 1959.
4. Никольский С. М. ДАН СССР, 52, № 3, 1946.
5. Трофимов В. Н. Успехи матем. наук, XV, вып. 5 (95), 1960.

А. М. КУЗЕМКО, С. П. ГАВЕЛЯ

ПРУЖНА РІВНОВАГА ТОНКОЇ ОБОЛОНКИ З ПРЯМОКУТНИМ КОНТУРОМ ПРИ ШАРНІРНОМУ ЗАКРІПЛЕННІ КРАЮ

Запропонований в [2] спосіб розв'язування граничних задач теорії тонких пологих оболонок за допомогою регулярних інтегральних рівнянь виявляється застосовним і до певних класів непологих оболонок. В результаті виникає можливість дати оцінку деяким загальновживаним припущенням, які робляться у випадку пологості. Нижче такі оцінки будуються для конкретної задачі про пружну рівновагу оболонки з розгортуваною серединною поверхнею. При цьому функції Гріна відповідних допоміжних задач для прямокутної області визначаються безпосередньо в явному вигляді, що дозволяє звести задачу до одного розв'язуючого регулярного інтегрального рівняння.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Як відомо [1], диференціальні рівняння загальної технічної моментної теорії тонких оболонок мають такий вигляд:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}(1-\sigma)\frac{1}{B}\frac{\partial\chi}{\partial x_2}+(1-\sigma)\left(Ku_1-\frac{K_2}{A}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1,$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial\Theta}{\partial x_2}-(1-\sigma)\frac{1}{A}\frac{\partial\chi}{\partial x_1}+(1-\sigma)\left(Ku_2-\frac{K_1}{B}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2, \qquad (1)$$

$$-(k_1+k_2)\Theta+\frac{1-\sigma}{AB}\Big[2ABKw+\frac{\partial}{\partial x_1}(Bk_2u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(Ak_1u_2)-$$

$$-\frac{h^2}{12}\nabla^2(k_1^2+k_2^2)w-\frac{h^2}{12}\nabla^2\nabla^2 w=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_3.$$

Тут Θ та χ визначаються формулами

$$\Theta=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(Bu_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(Au_2)\right]+(k_1+k_2)w;$$

$$\chi=\frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(Bu_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(Au_1)\right].$$

Через ∇^2 позначено оператор

$$\nabla^2=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right],$$

u_1, u_2, w — компоненти вектора зміщень, k_1, k_2 — головні кривини, h — товщина, σ — коефіцієнт Пуассона, E — модуль Юнга, X_1, X_2, X_3 —

складові зовнішнього навантаження оболонки. Величини $A = A(x)$; $B = B(x)$ являють собою коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні $ds^2 = A^2 dx_1^2 + B^2 dx_2^2$, $K = k, k_2$ — її гауссова кривина (поверхня вважається віднесеною до її ліній кривини).

У випадку розгортуваності серединної поверхні, очевидно,

$$A = B = \text{const};\ K = k_1 = 0;\ k_2 = k \neq 0. \tag{2}$$

Тоді система (1) набирає вигляду

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u_1 + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + Ak\sigma\frac{\partial w}{\partial x_1} + A\frac{\partial k}{\partial x_1}w = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1;$$

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u_2 + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + Ak\frac{\partial w}{\partial x_2} + A\frac{\partial k}{\partial x_2}w = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2; \tag{3}$$

$$\Delta\Delta w + A^2\left(k^2\Delta w + 2\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{12k^4}{h^2}A^2 + \Delta k^2\right)A^2 w +$$

$$+ \frac{12k}{h^2}A^3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - 12A^3\frac{1-\sigma}{h^2}\frac{\partial}{\partial x_1}(ku_1) = \frac{12A^4(1-\sigma^2)}{Eh^3}X_3.$$

Δ означає тут оператор Лапласа.

Далі будуть розглядатись умови шарнірного закріплення контура

$$u_1|_s = u_2|_s = 0, \tag{4}$$

$$w|_s = \Delta w|_s = 0, \tag{5}$$

де Ω — область $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$, S — її контур.

Нехай

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\right),\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},\quad \varkappa = \frac{1+\sigma}{3-\sigma},\ \Delta w = w^*.$$

В цих позначеннях задачі

$$(1-\varkappa)\Delta u(x) + 2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{6}$$

$$u(y) = 0 \qquad (y \in S) \tag{7}$$

та

$$\Delta w - w^* = \varphi_1(x) \qquad (x \in \Omega)$$

$$\Delta w^* = \varphi_2(x) \tag{8}$$

$$w(y) = w^*(y) = 0 \qquad (y \in S) \tag{9}$$

домовимось називати першою та другою допоміжними задачами відповідно.

ПОБУДОЕА ФУНКЦІЙ ГРІНА ДОПОМІЖНИХ ЗАДАЧ

Фундаментальна матриця системи (7), як наведено в [4], може бути взята у вигляді

$$\omega(x, \xi) = \frac{1-\varkappa^2}{\pi}\left\{I \ln r - \varkappa \frac{(x-\xi)(x-\xi)^*}{r^2}\right\}, \tag{10}$$

де $r = |x - \xi|$, $(x-\xi) = \begin{pmatrix} x_1 - \xi_1 \\ x_2 - \xi_2 \end{pmatrix}$, $(x-\xi)^* = (x_1 - \xi_1, \ x_2 - \xi_2)$.

Нехай

$$\omega^*(x, \xi) = \frac{1-\varkappa^2}{\pi}\left\{I \ln \bar{r} - \varkappa \frac{(x-\xi)(x-\xi)^*}{\bar{r}^2}\right\},$$

де

$$\bar{r} = \sqrt{|x-\xi|^2 + x_1 x_2 (a - x_1)(b - x_2)}.$$

Матриця Гріна $H(x, \xi)$ задач (6), (8) може бути зображена тоді у вигляді

$$H(x, \xi) = \omega(x, \xi) - \omega^*(x, \xi) + \omega^{**}(x, \xi), \tag{11}$$

де $\omega^{**}(x, \xi)$ визначається умовами

$$(1-\varkappa)\Delta_x \omega^{**}(x, \xi) + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega^{**}(x, \xi) =$$

$$= (1-\varkappa)\Delta_x \omega^*(x, \xi) + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega^*(x, \xi), \tag{12}$$

$$\omega^{**}(y, \xi) = 0. \tag{13}$$

В роботі [4] доведено, що розв'язок задач (12), (13) може бути знайдений у вигляді необмежено диференційовного по x в області Ω при $\varkappa < 1$ ряду

$$\omega^{**}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varkappa^k \omega_k(x, \xi), \tag{14}$$

коефіцієнти якого послідовно визначаються умовами

$$\Delta_x \omega_0(x, \xi) = F(x, \xi); \quad \Delta_x \omega_k(x, \xi) = \Delta_x \omega_{k-1}(x, \xi) - 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega_{k-1}(x, \xi); \tag{15}$$

$$\omega_0(y, \xi) = 0; \qquad \omega_k(y, \xi) = 0; \qquad (x, \xi \in \Omega, y \in S),$$

де $F(x, \xi) = (1-\varkappa)\Delta_x \omega^*(x, \xi) + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega^*(x, \xi)$ — матриця необмежено-диференційовних по x при довільному $\xi \in \Omega$ функцій $F_{ij}(x, \xi) (i, j = 1,2)$. З цих властивостей функцій $F_{ij}(x, \xi)$ випливає ефективність збіжності (при $\xi \in \Omega$) рядів

$$F_{ij}(x, \xi) = \sum_{m, n}^{\infty} f_{ij}^{mn}(\xi) \sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{b}, \tag{16}$$

де

$$f_{ij}^{m.n}(\xi) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F_{ij}(x, \xi) \sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{b}. \tag{17}$$

Шукаючи, далі, розв'язки задач (15) у вигляді

$$\omega_{k;i,j}(x,\xi)=\sum_{m,n}^{\infty}\alpha_{k;i,j}^{m,n}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \tag{18}$$

одержуємо такі вирази коефіцієнтів:

$$\alpha_{o;i,j}^{m,n}=\frac{4abf_{i,j}^{m,n}(\xi)}{\pi^2(b^2m^2+a^2n^2)}, \tag{19}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{k;i,j}^{m,n}=\frac{4abf_{k;i,j}^{m,n}(\xi)}{\pi^2(b^2m^2+a^2n^2)},$$

де

$$f_{k;1,1}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)\alpha_{k-1;1,1}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n-q^2)}\alpha_{k-1;2,1}^{p,q}(\xi),$$

$$f_{k;2,2}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{n^2}{b^2}-\frac{m^2}{a^2}\right)\alpha_{k-1;2,2}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}\alpha_{k-1,1,2}^{p,q}(\xi),$$

$$f_{k;1,2}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)\alpha_{k-1;1,2}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}\alpha_{k-1;2,2}^{p,q}(\xi),$$

$$f_{k;2,1}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{n^2}{b^2}-\frac{m^2}{a^2}\right)\alpha_{k-1;2,1}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}\alpha_{k-1;1,1}^{p,q}(\xi).$$

В сумі $\sum\limits_{p,q}^{\infty}$ індекс p (або q) набирає лише парних значень, якщо m (або відповідно n) непарне, і навпаки.

З формул (17) та (19) легко бачити, що визначені таким чином ряди (18) принаймні двічі неперервно диференційовні. З цього та властивостей ряду (14) випливає принаймні двічі неперервна диференційовність ряду

$$\omega^{**}(x,\xi)=\sum_{m,n}^{\infty}\omega_{m,n}^{**}(\xi)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \tag{20}$$

де

$$\omega_{m,n}^{**}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa^k\alpha_k^{m,n}(\xi),\quad \alpha_k^{m,n}(\xi)=\begin{pmatrix}\alpha_{k;1,1}^{m,n}(\xi) & \alpha_{k;1,2}^{m,n}(\xi)\\ \alpha_{k;2,1}^{m,n}(\xi) & \alpha_{k;2,2}^{m,n}(\xi)\end{pmatrix}.$$

Слід зауважити, що коефіцієнти $\omega_{m,n}^{**}(\xi)$ в (20) можуть бути одержані безпосередньо з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка утворюється в результаті підставлення виразу (20) в рівняння (12), якщо при цьому взяти до уваги, що

$$\cos\frac{m\pi x_1}{a}=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{l=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{l}{l^2-m^2}\sin\frac{l\pi x_1}{a} & \text{при } m \text{ парному},\\[2ex] \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{l=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{l}{l^2-m^2}\sin\frac{l\pi x_1}{a} & \text{при } m \text{ непарному}.\end{cases}$$

Результати роботи [4] переконують, отже, в можливості знаходження розв'язку одержуваної таким чином системи методом послідовних наближень.

Побудована таким способом функція Гріна $H(x, \xi)$ дає, очевидно, розв'язання задачі про плоску деформацію жорстко затиснутої прямокутної пластинки під дією навантаження $f(x)$ у вигляді

$$u(x)=\iint\limits_{\Omega} H(x, \xi)f(\xi)\,d_\xi\Omega,$$

де $u(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix}$ — вектор зміщень, $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$.

Функція Гріна $\Gamma(x, \xi)$ другої допоміжної задачі (8), (9) може бути визначена виразом

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}I\ln\frac{\bar{r}}{r}+\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\\ 0 & \omega_{22}\end{pmatrix}, \tag{21}$$

де $\omega_{ik}(x, \xi)$ задовольняють умови

$$\Delta\omega_{11}(x, \xi)=-\Delta\ln\bar{r}, \qquad \Delta\omega_{22}(x, \xi)=-\Delta\ln\bar{r},$$

$$\Delta\omega_{12}(x, \xi)=\omega_{22}(x, \xi)+\ln\frac{\bar{r}}{r}, \qquad (x, \xi\in\Omega),$$

$$\omega_{11}(y, \xi)=\omega_{12}(y, \xi)=\omega_{22}(y, \xi)=0, \qquad (y\in S).$$

Шукаючи $\omega_{ij}(x, \xi)$ у вигляді

$$\omega_{ij}(x, \xi)=\sum_{k,l}^{\infty}\omega_{ij}^{k,l}(\xi)\sin\frac{k\pi x_1}{a}\sin\frac{l\pi x_2}{b}, \tag{22}$$

одержуємо

$$\omega_{ij}^{k,l}(x, \xi)=\frac{4ab\beta_{ij}^{k,l}(\xi)}{\pi^2(k^2b^2+l^2a^2)}, \tag{23}$$

де

$$\beta_{22}^{k,l}(\xi)=\beta_{11}^{k,l}(\xi)=-\frac{q}{ab}\int_0^a\int_0^b\Delta\ln\bar{r}\sin\frac{k\pi x_1}{a}\sin\frac{l\pi x_2}{b}\,dx_1\,dx_2, \tag{24}$$

$$\beta_{1,2}^{k,l}(\xi)=-\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b\ln\frac{\bar{r}}{r}\sin\frac{k\pi x_1}{a}\sin\frac{l\pi x_2}{b}\,dx_1\,dx_2+\frac{4ab\beta_{22}^{k,l}(\xi)}{\pi^2(k^2b^2+l^2a^2)}. \tag{25}$$

З виразів (24), (25) випливає допустимість почленного диференціювання рядів (22).

Визначена виразом (21) функція Гріна $\Gamma(x, \xi)$ дає розв'язання задачі про згин жорстко затиснутої прямокутної пластинки під дією навантаження $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ у вигляді

$$w(x) = \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d_\xi\Omega.$$

РОЗВ'ЯЗУЮЧЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Розв'язок задач (3), (4), (5) будемо шукати у вигляді

$$u_1(x) = \iint\limits_{\Omega} g_{11}(x, \xi)\,\mu_1(\xi)\,d_\xi\Omega + \iint\limits_{\Omega} g_{12}(x, \xi)\,\mu_2(\xi)\,d_\xi\Omega;$$

$$u_2(x) = \iint\limits_{\Omega} g_{21}(x, \xi)\,\mu_1(\xi)\,d_\xi\Omega + \iint\limits_{\Omega} g_{22}(x, \xi)\,\mu_2(\xi)\,d_\xi\Omega; \qquad (26)$$

$$w(x) = \iint\limits_{\Omega} \gamma_{11}(x, \xi)\,\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega + \iint\limits_{\Omega} \gamma_{12}(x, \xi)\,\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega; \qquad (27)$$

$$w^*(x) = \iint\limits_{\Omega} \gamma_{22}(x, \xi)\,\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega,$$

де $g_{ij}(x, \xi)$ та $\gamma_{ij}(x, \xi)$ — елементи матриць Гріна першої та другої допоміжної задач відповідно.

Підстановка потенціалів (26) та (27) в систему

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u_1 + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + Ak\sigma\frac{\partial w}{\partial x_1} + A\frac{\partial k}{\partial x_1}w = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1;$$

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u_2 + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + Ak\frac{\partial w}{\partial x_2} + A\frac{\partial k}{\partial x_2}w = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2;$$

$$\Delta w^* + A^2\left(k^2 w^* + 2\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{12k^4}{h^2}A^2 + \Delta k^2\right)A^2 w +$$

$$+ A^3\frac{12k}{h^2}\left(\sigma\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - 12A^3\frac{1-\sigma}{h^2}\frac{\partial k}{\partial x_1}u_1 = \frac{12A^4(1-\sigma^2)}{Eh^3}X_3;$$

$$\Delta w - w^* = 0$$

дає послідовно

$$\mu_1(x) = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1(x) - A\iint\limits_{\Omega}\left\{k\sigma\frac{\partial\gamma_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial k}{\partial x_1}\gamma_1(x_1, \xi)\right\}\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega - A\iint\limits_{\Omega}\left\{k\sigma\frac{\partial\gamma_{12}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial k}{\partial x_1}\gamma_{12}(x, \xi)\right\}\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega; \qquad (28)$$

$$\mu_2(x) = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2(x) - A\iint\limits_{\Omega}\left\{k\frac{\partial\gamma_{11}(x, \xi)}{\partial x_2} + \frac{\partial k}{\partial x_2}\gamma_{11}(x, \xi)\right\}\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega -$$

$$- A\iint\limits_{\Omega}\left\{k\frac{\partial\gamma_{12}(x, \xi)}{\partial x_2} + \frac{\partial k}{\partial x_2}\gamma_{12}(x, \xi)\right\}\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega;$$

$$u_i(x) = P_i(x) - \iint\limits_{\Omega} K_{i1}(x, \xi)\, \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega - \iint\limits_{\Omega} k_{i2}(x, \xi)\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega, \tag{29}$$

де

$$P_i(x) = -A^2 \frac{1-\sigma^2}{Eh} \iint\limits_{\Omega} [g_{i1}(x, \xi) X_1(\xi) + g_{i2}(x, \xi) X_2(\xi)]\, d_\xi \Omega,$$

$$K_{ij}(x, \xi) = A \iint\limits_{\Omega} \partial_{i1}(x, \xi) \left[\sigma \frac{\partial k(\zeta)\gamma_{1j}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial k(\zeta)\gamma_{1j}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_1}\right] d_\zeta \Omega +$$

$$+ A \iint\limits_{\Omega} g_{i2}(x, \zeta) \left[(\sigma + 1) \frac{\partial k(\zeta)\gamma_{1j}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_1} + \sigma k(\zeta) \frac{\partial \gamma_{2j}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_2}\right] d_\zeta \Omega,$$

$$\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sigma \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \iint\limits_{\Omega} \left[\sigma \frac{\partial K_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{21}(x, \xi)}{\partial x_2}\right] \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} \left[\sigma \frac{\partial K_{12}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{22}(x, \xi)}{\partial x_2}\right] \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$\nu_1(x) = \iint\limits_{\Omega} \gamma_{22}(x, \xi)\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$\nu_2(x) + \iint\limits_{\Omega} \Big\{ 2A^2 \frac{\partial k^2}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + 2A^2 \frac{\partial k}{\partial x_2} \frac{\partial \gamma_{11}(x, \xi)}{\partial x_2} +$$

$$+ \left(\frac{12k^4}{h^2} A^2 + \Delta k^2\right) A^2 \gamma_{11}(x, \xi) - \frac{12 A^3 k}{h^2} \left(\sigma \frac{\partial K_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{x K_{21}(x, \xi)}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ \frac{12(1-\sigma)}{h^2} A^3 K_{11}(x, \xi) \Big\} \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega + \iint\limits_{\Omega} \Big\{ A^2 k^2 \gamma_{22}(x, \xi) + \tag{30}$$

$$+ 2A^2 \frac{\partial k^2}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_{12}(x, \xi)}{\partial x_1} + 2A^2 \frac{\partial k}{\partial x_2} \frac{\partial \gamma_{12}(x, \xi)}{\partial x_2} + \frac{12A^4 k^4}{h^2} \gamma_{12}(x, \xi) +$$

$$+ A^2 \Delta k^2 \gamma_{12}(x, \xi) - \frac{12 A^3 k}{h^2} \left(\sigma \frac{\partial K_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{21}(x, \xi)}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ \frac{12A^3(1-\sigma)}{h^2} K_{12}(x, \xi) \Big\} \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega + \frac{12}{h^2} A^3 \left(k\sigma \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + k \frac{\partial P_2}{\partial x_2} +\right.$$

$$\left. + (1-\sigma) \frac{\partial k}{\partial x_1} P_1(x)\right) = \frac{12 A^4 (1-\sigma^2)}{Eh^3} X_3.$$

Звідси одержуємо таке розв'язуюче рівняння:

$$\nu_2(x) + \iint\limits_{\Omega} [M(x, \xi) + m(x, \xi)]\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega =$$

$$= \frac{12}{Eh^3} A^4 (1-\sigma^2) X_3 - \frac{12}{h^3} A^3 Q, \tag{31}$$

де

$$M(x, \xi) = \left(\frac{12 A^2 k^4}{h^2} + \Delta k^2\right) A^2 \gamma_{11}(x, \xi) +$$

$$+\frac{12K}{h^2}A^3\left(\sigma\frac{\partial K_{12}(x,\xi)}{\partial x_1}+\frac{\partial K_{22}(x,\xi)}{\partial x_2}+\frac{1-\sigma}{k}K_{12}(x,\xi)\right)+$$

$$+\iint_\Omega\left\{\left(\frac{12k^4}{h^2}A^2+\Delta k^2\right)A^2\gamma_{11}(x,\zeta)-\frac{12A^3}{h^2}\left(k\sigma\frac{\partial K_{11}(x,\zeta)}{\partial x_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+k\frac{\partial K_{21}(x,\zeta)}{\partial x_2}+(1-\sigma)K_{11}(x,\zeta)\right)\right\}\gamma_{22}(\zeta,\xi)\,d_\zeta\Omega;$$

$$m(x,\xi)=A^2k^2\gamma_{22}(x,\xi)+2A^2\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_{12}(x,\xi)}{\partial x_1}+2A^2\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial\gamma_{12}(x,\xi)}{\partial x_2}+$$

$$+\iint_\Omega 2A^2\left\{\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\gamma_{11}(x,\zeta)}{\partial x_2}+\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial\gamma_{11}(x,\zeta)}{\partial x_2}\right\}\gamma_{22}(\zeta,\xi)\,d_\xi\Omega;$$

$$Q=k\sigma\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+k\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+(1-\sigma)\frac{\partial k}{\partial x_1}P_1(x).$$

З цих виразів легко переконатись в регулярності одержаного рівняння (31).

ОЦІНКИ ДЕЯКИХ ПРИПУЩЕНЬ

У випадку пологості розглядуваної оболонки в системі (3) часто нехтують членами

$$A^2\left(k^2\Delta w+2\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1}+2\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\tag{32}$$

(див., наприклад, [1], стор. 317). Розв'язуюче рівняння (31) дозволяє ефективно оцінити абсолютні похибки δu_1, δu_2, δw, компонент вектора зміщень, які вносить це нехтування. А саме, використовуючи результати, наведені в [3] на стор. 158 (які, очевидно, залишаються справедливими і для двовимірного випадку), маємо:

$$\delta\nu_2(x)<q,$$

де $\delta\nu_2(x)$ — абсолютна похибка величини $\nu_2(x)$,

$$q=\frac{Nm^*(1+B)^2}{1-m^*(1+B)},$$

$$N>\frac{12A^3(1-\sigma^2)}{Eh^3}|z|,\cdot\ m^*>\iint_\Omega|m(x,\xi)|\,d_\xi\Omega,$$

$$B>\iint_\Omega R(x,\xi)\,d_\xi\Omega,\ z=AX_3-EQ,$$

$R(x,\ \xi)$ — резольвента рівняння (31).

З (29), (30) та (27) тоді одержимо:

$$\delta u_1<qQ_1,\ \delta u_2=qQ_2,\ \delta w<qQ_3,$$

де

$$Q_1>\iint_\Omega\left|\iint_\Omega K_{11}(x,\zeta)\gamma_{22}(\zeta,\xi)\,d_\zeta\Omega+K_{12}(x,\xi)\right|d_\xi\Omega,$$

$$Q_2 > \iint_{\Omega} \left| \iint_{\Omega} K_{21}(x, \zeta)\, \gamma_{22}(\zeta, \xi)\, d_\zeta \Omega + K_{22}(x, \xi) \right| d_\xi \Omega,$$

$$Q_3 > \iint_{\Omega} \left| \iint_{\Omega} \gamma_{11}(x, \zeta)\, \gamma_{22}(\zeta, \xi)\, d_\zeta \Omega + \gamma_{12}(x, \xi) \right| d_\xi \Omega.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, 1949.
2. Гавеля С. П., Кузeмко А. М. Збірник праць аспірантів мех.-мат. факультету Львів. університету. Вид. Львів. ун-ту, 1961.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, 1952.
4. Лопатинский Я. Б. Теоретическая и прикладная математика, в. I. Львов, 1958.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Л. М. ЗОРІЙ

ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Проблема стійкості рівноваги є за своїм характером динамічною і вимагає дослідження малих коливань. У консервативних системах ця динамічна задача замінюється статичною — визначаються умови існування форми рівноваги, близької до досліджуваної. Однак реальні системи внаслідок наявності сил тертя та пружних недосконалостей завжди мають деякі властивості неконсервативних систем. Розповсюдженим неконсервативним навантаженням є гідростатичний тиск.

Аналіз умов стійкості рівноваги найпростішої неконсервативної системи, наведений у цій статті, показує, що мале тертя може істотно змінювати границю області стійкості. Отже, статичний підхід до задач стійкості реальних систем вимагає обгрунтування. Нижче доводиться законність застосування статичного й енергетичного методів до задач стійкості рівноваги пружних систем, коли відсутні зовнішні неконсервативні навантаження. Для кругової арки під гідростатичним тиском обгрунтовується статичний метод знаходження критичного навантаження.

СИСТЕМА З ДВОМА СТЕПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Розглянемо найпростішу модель пружної системи — «подвійний маятник» [8] (рис. 1). У шарнірах O і A введені пружні в'язі з жорсткістю c, що перешкоджають стержням OA і AB відхилятися від вертикалі, та сили тертя, пропорційні швидкості, з коефіцієнтами пропорціональності b_1 і b_2. В точках A і B зосереджені маси $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ і сили $G_1 = 2G$, $G_2 = G$. Припускається, що $OA = AB = l$. До вільного кінця прикладена сила P, яка при русі змінює свій напрям так, що $\varphi = \eta\varphi_2$, де η — деякий параметр. Для порівняння величин неконсервативної сили P і сил ваги введений параметр $\varkappa$ за допомогою співвідношення $P = \varkappa G$.

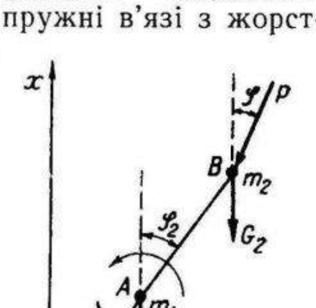


Рис. 1.

Силу P називатимемо слабо неконсервативною, якщо вона при деформації змінює свій напрям незначно або є малою в порівнянні із зовнішніми консервативними силами.

Будемо досліджувати стійкість рівноваги, коли система займає вертикальне положення. Приймаючи за узагальнені координати кути φ_1 і φ_2, складемо рівняння малих коливань навколо вказаного положення рівноваги ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). Кінетичну енергію системи T можна записати у вигляді

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j, \tag{1}$$

де $a_{11} = 3ml^2$, $a_{12} = a_{22} = ml^2$, а потенціальну енергію П так:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}\varphi_i\varphi_j, \tag{2}$$

де $c_{11} = 2c - 3Gl$, $c_{12} = -c$, $c_{22} = c - Gl$.

Обчислюючи елементарну роботу сили P і сил тертя, одержимо узагальнені сили (неконсервативні):

$$Q_1 = Pl(\varphi_1 - \eta\varphi_2) - 2b_1\dot{\varphi}_1 + b_2\dot{\varphi}_2;$$

$$Q_2 = Pl\varphi_2(1 - \eta) + b_1\dot{\varphi}_1 - b_2\dot{\varphi}_2. \tag{3}$$

За допомогою рівнянь Лагранжа другого роду напишемо рівняння малих коливань системи навколо прямолінійної форми рівноваги $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$:

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + 2b_1\dot{\varphi}_1 - b_2\dot{\varphi}_2 + (c_{11} - Pl)\varphi_1 + (c_{12} + Pl\eta)\varphi_2 = 0;$$

$$a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 - b_1\dot{\varphi}_1 + b_2\dot{\varphi}_2 + c_{12}\varphi_1 + [c_{22} - Pl(1 - \eta)]\varphi_2 = 0. \tag{4}$$

Характеристичне рівняння одержаної системи рівнянь можна записати у вигляді

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \tag{5}$$

причому коефіцієнти останнього виражаються відповідно через коефіцієнти системи (4).

Згідно з відомою теоремою Ляпунова стан рівноваги асимптотично стійкий, якщо всі корені рівняння (5) мають від'ємні дійсні частини. Для цього необхідно і досить виконання нерівностей [2]:

$$p_2 > 0;\ \ p_4 > 0;\ \ p_3(p_1p_2 - p_0p_3) - p_4p_1^2 > 0. \tag{6}$$

Введемо параметр α, що визначається так:

$$\alpha = b_2 / b_1. \tag{7}$$

Область стійкості рівноваги будуємо для $\eta = 1$. При цьому вважатимемо b_1 і b_2 малими величинами одного і того ж порядку малості (α — кінцеве), а членами з b_1^2 нехтуватимемо. Тоді умови (6) можна переписати в такому вигляді:

$$7c - 2Pl - 6Gl > 0;$$

$$3G^2l^2 + Gl(Pl - 5c) + c^2 > 0;$$

$$2P^2(1 - \alpha)(4 + 3\alpha) - P\left[(11 - 7\alpha - 32\alpha^2)\frac{c}{l} - G(7 - 8\alpha - 20\alpha^2)\right] -$$

$$- G^2(1 + 6\alpha + 6\alpha^2) + G\frac{c}{l}(7 + 21\alpha + 16\alpha^2) - \frac{c^2}{l^2}(10 + 21\alpha + 10\alpha^2) < 0. \tag{8}$$

Зауважимо, що навантаження, яке визначається умовою $p_4 = 0$, можна знайти статичним методом; тому позначатимемо його $P_к^{ст}$. Із перших двох нерівностей (8) одержуємо, що для стійкості рівноваги повинно бути:

$$P < P'; \ P > P_k^{cm} \text{ при } G > 0, \ P < P_k^{cm} \text{ при } G < 0, \tag{9}$$

де $P' = -3G + \frac{7}{2}\frac{c}{l}$; $P_k^{cm} = -3G + 5\frac{c}{l} - \frac{1}{G}\frac{c^2}{l^2}$. (10)

Тому що третя з нерівностей (8) при $\alpha = 1$ перетворюється з квадратної відносно P в лінійну, маємо два випадки. При $\alpha = 1$ одержуємо

$$P < P_*, \tag{11}$$

де

$$P_* = 13G^2 - 44G\frac{c}{l} + 41\frac{c^2}{l^2} \Big| 28\frac{c}{l} - 21G. \tag{12}$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то P повинно задовольняти умову

$$P_1 < P < P_2, \tag{13}$$

де

$$P_{1,2} = \frac{(11 - 7\alpha - 32\alpha^2)\frac{c}{l} - G(7 - 8\alpha - 20\alpha^2) \mp \sqrt{f_1 G^2 - 2f_2 G\frac{c}{l} + f_3\frac{c^2}{l^2}}}{4(1-\alpha)(4+3\alpha)} \tag{14}$$

і

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 81 + 72\alpha - 96\alpha^2 + 128\alpha^3 + 256\alpha^4; \\ f_2(\alpha) &= 189 + 171\alpha - 300\alpha^2 + 80\alpha^3 + 448\alpha^4; \\ f_3(\alpha) &= 441 + 438\alpha - 743\alpha^2 - 136\alpha^3 + 784\alpha^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Нерівності (9), (11) і (13) визначають область стійкості рівноваги для довільного $\alpha > 0$. На рис. 2 наведені області стійкості для таких значень α: 0,5; 1; 1,5. Крім цього, нанесено граничні прямі:

а) при $\alpha = 0$

$$P_1 = -G + 2\frac{c}{l}; \quad P_2 = \frac{1}{8}G - \frac{5}{8}\frac{c}{l};$$

б) при $\alpha \to +\infty$

$$P_1 = -3G + 5\frac{c}{l}; \quad P_2 = -\frac{1}{3}G + \frac{1}{3}\frac{c}{l}. \tag{16}$$

Для порівняння побудована також крива

$$P_k = -2G + \frac{7}{2}\frac{c}{l} \mp \sqrt{2\frac{c^2}{l^2} - 3\frac{c}{l}G + G^2} \tag{17}$$

з роботи [8], одержана при припущенні, що тертя відсутнє ($b_1 = b_2 = b = 0$).

Із аналізу рис. 2 випливають такі особливості задачі стійкості рівноваги неконсервативної системи з двома степенями вільності:

1) при безмежно малих коефіцієнтах тертя область стійкості, як правило, істотно залежить від їх відношення;

2) в даній задачі можна вказати переміщення, на яких нестійкість рівноваги має місце при від'ємно-означеній роботі всіх сил, прикладених до системи;

3) мале тертя не змінює області стійкості, коли сила P досить мала.

Перша і третя особливості очевидні. Друга стає наочною, коли помітити таке: робота всіх сил без врахування розсіювання на довільному малому переміщенні при умові, що φ_1 і φ_2 змінюються монотонно, може бути записана у вигляді:

$$A = -\frac{1}{2}\left[(c_{11} - Pl)\,\varphi_1^2 + (2c_{12} + Pl)\,\varphi_1\varphi_2 + c_{22}\varphi_2^2\right]. \tag{18}$$

Нехай, наприклад, $G = -\frac{c}{l}$, $P = 2\frac{c}{l}$. Не важко переконатися, що тоді форма (18) є від'ємно-означеною, а рівновага системи — нестійкою.

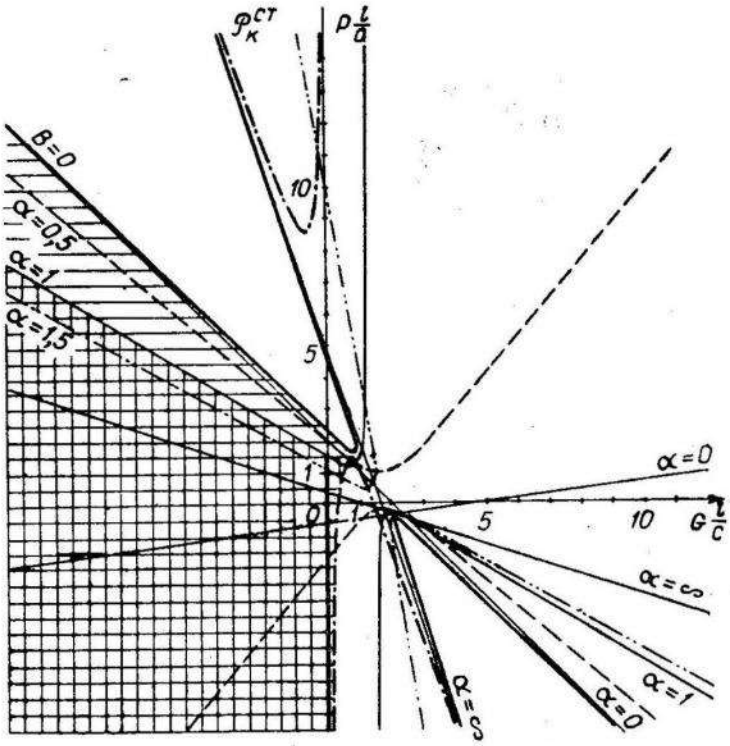


Рис. 2.

Покажемо, що при слабо неконсервативній силі P задачу стійкості рівноваги системи (рис. 1) можна розв'язувати статичним методом.

Введемо дисипативну функцію

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\,\dot{\varphi}_i\,\dot{\varphi}_j, \tag{19}$$

де $b_{11} = 2b_1$; $b_{12} = -\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$; $b_{22} = b_2$.

При цьому система рівнянь (4) може бути записана так:

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + b_{11}\dot{\varphi}_1 + b_{12}\dot{\varphi}_2 + g_{12}\dot{\varphi}_2 + (c_{11} - Pl)\,\varphi_1 + (c_{12} + Pl\eta)\,\varphi_2 = 0;$$

$$a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + b_{12}\dot{\varphi}_1 + b_{22}\dot{\varphi}_2 - g_{12}\dot{\varphi}_1 + c_{12}\,\varphi_1 + [c_{22} - Pl(1-\eta)]\,\varphi_2 + 0, \tag{20}$$

де $g_{12} = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$.

Щоб одержати більш прості умови стійкості, перейдемо за допомогою неособливого лінійного перетворення до нових змінних Θ_1 і Θ_2: $\varphi_1 = \beta_1\Theta_1 + \beta_2\Theta_2$, $\varphi_2 = \Theta_1 + \Theta_2$, вибравши β_1 і β_2 так, щоб у нових координатах кінетична енергія (1) і дисипативна функція (19) були зведені до суми квадратів:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} A_i\dot{\Theta}^2{}_i;\quad F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} B_i\dot{\Theta}^2{}_i. \tag{21}$$

Відомо [4], що при цьому β_1 і β_2 визначаються як корені квадратного рівняння

$$\beta^2-v\beta+u=0, \tag{22}$$

де

$$v=\frac{b_{11}a_{22}-b_{22}a_{11}}{a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}},\quad u=\frac{b_{22}a_{12}-b_{12}a_{22}}{a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}}, \tag{23}$$

і тоді

$$A_i=a_{11}\beta^2{}_i+2a_{12}\beta_i+a_{22},$$
$$B_i=b_{11}\beta^2{}_i+2b_{12}\beta_i+b_{22}\quad (i=1,2). \tag{24}$$

З фізичного змісту задачі випливає, що корені рівняння (22) завжди дійсні. Потенціальна енергія (2) в нових координатах має вигляд

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} C_{ij}\Theta_i\Theta_i, \tag{25}$$

причому

$$C_{ii}=c_{11}\beta^2{}_i+2c_{12}\beta_i+c_{22},$$
$$C_{12}=c_{11}u+c_{12}v+c_{22} \tag{26}$$
$$(i=1,\ 2),$$

а узагальнені сили без дисипативних членів можна записати так:

$$Q_1{}^*=-Pl(m_{11}\Theta_1+m_{12}\Theta_2)-G_{12}\Theta_2,$$
$$Q_2{}^*=-Pl(m_{21}\Theta_1+m_{22}\Theta_2)+G_{12}\Theta_1, \tag{27}$$

де

$$m_{ij}=\eta(\beta_i+1)-(\beta_i\beta_j+1) \tag{28}$$
$$(i,\ j=1,\ 2),$$
$$G_{12}=g_{12}(\beta_1-\beta_2). \tag{29}$$

За допомогою рівнянь Лагранжа одержимо рівняння першого наближення в нових координатах:

$$A_1\ddot{\Theta}_1+B_1\dot{\Theta}_1+G_{12}\dot{\Theta}_2+(C_{11}+m_{11}Pl)\Theta_1+(C_{12}+m_{12}Pl)\Theta_2=0,$$
$$A_2\ddot{\Theta}_2+B_2\dot{\Theta}_2-G_{12}\dot{\Theta}_1+(C_{12}+m_{21}Pl)\Theta_1+(C_{22}+m_{22}Pl)\Theta_2=0. \tag{30}$$

Припустимо, що

$$D_{ii}=C_{ii}+m_{ii}Pl\quad (i=1,2), \tag{31}$$
$$D_{12}=C_{12}+\frac{1}{2}\Big(m_{12}+m_{21}\Big)Pl;\quad E_{12}=\frac{1}{2}(m_{12}-m_{21})Pl.$$

Після цього система рівнянь (30) матиме вигляд:

$$A_1\ddot{\Theta}_1+B_1\dot{\Theta}_1+G_{12}\dot{\Theta}_2+D_{11}\Theta_1+D_{12}\Theta_2+E_{12}\Theta_2=0,$$

$$A_2\ddot{\Theta}_2 + B_2\dot{\Theta}_2 - G_{12}\dot{\Theta}_1 + D_{12}\Theta_1 + D_{22}\Theta_2 - E_{12}\Theta_1 = 0. \tag{32}$$

Характеристичне рівняння останньої системи таке:

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \tag{33}$$

де

$$\begin{aligned} &p_0 = A_1A_2, \quad p_1 = A_1B_2 + A_2B_1, \\ &p_2 = A_1D_{22} + A_2D_{11} + B_1B_2 + G_{12}^2, \\ &p_3 = B_1D_{22} + B_2D_{11} + 2G_{12}E_{12}, \\ &p_4 = D_{11}D_{22} - D_{12}^2 + E_{12}^2 . \end{aligned} \tag{34}$$

Приймаючи тертя малим настільки, що у виразі для p_2 можна нехтувати двома останніми членами, одержуємо необхідні і достатні умови (6), щоб усі корені рівняння (33) мали від'ємні дійсні частини:

$$\begin{gathered} A_1D_{22} + A_2D_{11} > 0; \; D_{11}D_{22} - D_{12}^2 + E_{12}^2 > 0, \\ B_1B_2(A_1D_{22} - A_2D_{11})^2 + (A_1B_2 + A_2B_1)^2(D_{12}^2 - E_{12}^2) + \\ + 2E_{12}G_{12}[A_1^2B_2D_{22} + A_2^2B_1D_{11} - A_1A_2(B_1D_{22} + B_2D_{11} - 2G_{12}E_{12})] > 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $b_1 = b_2$. Тоді із (20) випливає, що $g_{12} = 0$; отже, зникає коефіцієнт G_{12} (29), тобто відсутні гіроскопічні сили. При цьому остання з нерівностей (35) значно спрощується.

Нехай параметри системи такі, що виконується умова

$$E_{12}^2 < D_{12}^2. \tag{36}$$

Очевидно, при цьому третя з нерівностей (35) задовольняється.

Оскільки стан рівноваги, що досліджується, є стійким при досить малих зовнішніх силах, то втрата стійкості може настати при збільшенні навантаження тільки внаслідок порушення другої із нерівностей (35); це означає, що система поводиться так само, як при відсутності неконсервативності, тобто стає нестійкою після проходження стану байдужої рівноваги.

Покажемо, що останній висновок має місце також при наявності гіроскопічних сил, які задовольняють деяку додаткову умову. Системі (32) рівнозначна така система рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} &\frac{d\Theta_1}{dt} = \Theta_3; \quad \frac{d\Theta_2}{dt} = \Theta_4; \\ &\frac{d\Theta_3}{dt} = -\frac{D_{11}}{A_1}\Theta_1 - \frac{D_{12} + E_{12}}{A_1}\Theta_2 - \frac{B_1}{A_1}\Theta_3 - \frac{G_1}{A_1}\Theta_4; \\ &\frac{d\Theta_4}{dt} = -\frac{D_{12} - E_{12}}{A_2}\Theta_1 - \frac{D_{22}}{A_2}\Theta_2 + \frac{G_{12}}{A_2}\Theta_3 - \frac{B_2}{A_2}\Theta_4. \end{aligned} \tag{37}$$

Достатні умови стійкості можна одержати за допомогою прямого методу Ляпунова. За функцію V приймемо квадратичну форму

$$V = \frac{1}{2}(\alpha_{11}\Theta_1^2 + 2\alpha_{12}\Theta_1\Theta_2 + \alpha_{22}\Theta_2^2 + \alpha_{33}\Theta_3^2 + \alpha_{44}\Theta_4^2), \tag{38}$$

де $\alpha_{11} = D_{11}(D_{12} - E_{12})$; $\alpha_{22} = D_{22}(D_{12} + E_{12})$; $\alpha_{33} = A_1(D_{12} - E_{12})$; (39)

$$\alpha_{44} = A_2(D_{12} + E_{12}); \quad \alpha_{12} = D_{12}^2 - E_{12}^2 .$$

Похідна функції V по часу має вигляд

$$V' = -[B_1(D_{12} - E_{12})\Theta_3^2 - 2G_{12}E_{12}\Theta_3\Theta_4 + B_2(D_{12} + E_{12})\Theta_4^2]. \quad (40)$$

Умови додатньої означеності функції V при $D_{12} > 0$ можна записати так:

$$D_{11} > 0;\ D_{11}D_{22} - D_{12}^2 + E_{12}^2 > 0. \quad (41)$$

V' є знакосталою функцією знака протилежного V, якщо

$$B_1B_2(D_{12}^2 - E_{12}^2) - G_{12}^2E_{12}^2 > 0, \quad (42)$$

і може ставати нулем тільки на множині $\Theta_3^2 + \Theta_4^2 = 0$. Тому що перетин останньої з множиною $V = \text{const} > 0$ не містить траєкторій системи, то нульовий розв'язок системи (37) асимптотично стійкий в цілому [1]. Звідси випливає, що стан рівноваги $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ стійкий.

Можна переконатися, що при $D_{12} < 0$ доведення аналогічне; функція V є тоді від'ємно-означеною, а V' — знакосталою додатною. Зауважимо, що умови (41) рівнозначні першим двом із (35). Отже, якщо виконується (36), а гіроскопічні сили задовольняють (42), то довільні дисипативні члени не порушують стійкості (нестійкості) і границею між положеннями стійкої та нестійкої рівноваги є стан байдужої рівноваги.

Відмітимо, що умови (36) і (42) виконуються завжди, якщо один із параметрів η, $\varkappa$ досить малий, тобто сила P слабо неконсервативна.

Розглянемо випадок, коли

$$E_{12}^2 > D_{12}^2. \quad (43)$$

Нехай втрата стійкості настає внаслідок порушення останньої з умов (35) та $b_1 = b_2 = b$. Покажемо, що при цьому нехтування тертям завжди приводить до помилки у визначенні критичної сили.

При $b \to 0$ коефіцієнти рівняння (22) такі:

$$v = -\frac{2a_{22} - a_{11}}{a_{11} + 2a_{12}}; \quad u = -\frac{a_{12} + a_{22}}{a_{11} + 2a_{12}}. \quad (44)$$

Характеристичне рівняння (33) має тоді вигляд

$$p_0\lambda^4 + p_2^*\lambda^2 + p_4 = 0, \quad (45)$$

де $p_2^* = A_1D_{22} + A_2D_{11}$, а p_0 і p_4 визначаються згідно з (34).

Стійкість рівноваги можлива при виконанні нерівностей

$$p_4 > 0;\ p_2^* > 0;\ \Delta > 0, \quad (46)$$

де дискримінант рівняння (45)

$$\Delta = (A_1D_{22} - A_2D_{11})^2 + 4A_1A_2(D_{12}^2 - E_{12}^2), \quad (47)$$

бо при цьому корені характеристичного рівняння є чисто уявними.

Перші дві умови (46) співпадають з першими двома (35). Згідно з припущенням нестійкість настає внаслідок порушення останньої з умов (35), яка в даному випадку при $b \to 0$ переходить у таку:

$$(A_1D_{22} - A_2D_{11})^2 + (A_1^2\gamma + 2A_1A_2 + A_2^2\gamma^{-1})(D_{12}^2 - E_{12}^2) > 0, \quad (48)$$

де

$$\gamma = \frac{2\beta_2^2 - 2\beta_2 + 1}{2\beta_1^2 - 2\beta_1 + 1}. \quad (49)$$

Порівняння умов (47) і (48) дає нерівність

$$A_1^2\gamma^2 - 2A_1A_2\gamma + A_2^2 \geqslant 0, \quad (50)$$

яка має місце при довільному γ і стає рівністю тільки для

$$\gamma = A_2 / A_1. \tag{51}$$

Зауважимо, що рівність нулеві виразу (51) означає, що сумнівна область співпадає з областю стійкості. Нам залишилося показати, що це неможливо. Порівнюючи (49) і (51), одержуємо:

$$A_1(2\beta_2^2 - 2\beta_2 + 1) - A_2(2\beta_1^2 - 2\beta_1 + 1) = 0. \tag{52}$$

Підставивши сюди значення A_i (24), після елементарних перетворень бачимо, що ліва частина останнього виразу завжди додатна.

Отже, якщо втрата стійкості має коливний характер, то мале тертя обов'язково треба враховувати; нехтування тертям у цьому випадку приведе до істотної помилки при визначенні критичної сили (завжди в бік перебільшення останньої). При цьому, природно, статичний і енергетичний методи незастосовні до розв'язання задачі стійкості рівноваги даної системи.

ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ РЕАЛЬНИХ СИСТЕМ ПРИ МАЛІЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОСТІ

Рівняння збуреного руху деякої голономної системи навколо положення рівноваги $q_1 = \ldots = q_k = 0$ можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \Gamma_i = \varepsilon_i f_i(q_1, \ldots, q_k) \tag{53}$$

$$(i = 1, \ldots, k),$$

де T — кінетична енергія; Π — потенціальна енергія; F — функція розсіювання, причому дисипація повна; Γ_i — гіроскопічні сили; ε_i — довільно малі сталі величини; f_i — деякі неперервні функції узагальнених координат, які в околі нуля допускають зображення

$$f_i(q_1, \ldots, q_k) = \sum_{j=1}^{k} d_{ij} q_{ij} + f_i'(q_1, \ldots, q_k) \tag{54}$$

$$(i = 1, \ldots, k).$$

Тут d_{ij} — сталі, а f_i' — сукупність членів порядку малості, вищого від першого. Припускається [7], що останні задовольняють умови

$$|f_i'(q_1, \ldots, q_k)| < \zeta\{|q_1| + \ldots + |q_k|\}$$

$$(i = 1, \ldots, k), \tag{55}$$

де ζ — досить мала стала, і є такими, що рівняння (53) для кожної сукупності достатньо малих початкових значень узагальнених координат і швидкостей допускають єдиний розв'язок. Праві частини в (53) є узагальненими силами, які внаслідок малості ε_i називаються слабо неконсервативними.

За допомогою прямого методу Ляпунова можна довести такі узагальнення відомих теорем Томсона і Тета.

Теорема 1. *Якщо рівновага стійка при самих консервативних силах, то вона стає асимптотично стійкою при добавленні довільних дисипативних сил з повною дисипацією, гіроскопічних і слабо неконсервативних сил.*

Теорема 2. *Рівновага, нестійка під дією потенціальних сил, залишається нестійкою при добавленні будь-яких дисипативних сил з повною дисипацією, гіроскопічних і слабо неконсервативних сил.*

Доведення вказаних узагальнень грунтується на тому факті, що похідна функції W, запропонованої М. Г. Четаєвим [7] для випадку відсутності слабо неконсервативних сил ($\varepsilon_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$), завдяки додатній означеності функції F залишається від'ємно-означеною внаслідок малості ε_i також при наявності слабо неконсервативних сил. Наведені теореми можна перенести на системи з безмежним (зліченним) числом степенів вільності.

Оскільки положення пружної системи визначається зліченним числом координат, дані твердження вірні для систем з розподіленими параметрами. Теореми 1 і 2 дозволяють зробити висновок: статичний і енергетичний методи визначення критичного навантаження в реальних пружних системах, де відсутні зовнішні неконсервативні сили, є законними.

СТІЙКІСТЬ АРКИ ПРИ ГІДРОСТАТИЧНОМУ ТИСКУ

В задачах на дослідження стійкості деякої форми рівноваги криволінійних стержнів часто зустрічається неконсервативне навантаження у формі гідростатичного тиску. Тому тут виникає питання про можливість застосування статичних методів.

Для вивчення вказаного питання розглянемо рівняння малих коливань стержня навколо досліджуваної форми рівноваги. Вводячи сили інерції в рівняння рівноваги, виведене А. Р. Ржаніциним [6], одержимо:

$$\{\rho[EI(\rho u')'']''\}' + \left\{\rho\left[EI\left(\frac{u}{\rho}\right)'\right]''\right\}' + \frac{1}{\rho}\,[EI(\rho u')'']' +$$
$$+ \frac{1}{\rho}\left[EI\left(\frac{u}{\rho}\right)'\right]' + \left\{\rho^2 q\left[(\rho u')'' + \left(\frac{u}{\rho}\right)'\right]\right\}' - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(m\rho^2\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)' = 0, \qquad (56)$$

де ϱ — радіус кривини плоского стержня; EI — жорсткість на згин; u — зміщення по дотичній у напрямі зростання дуги; q — радіальне навантаження; m — маса на одиницю довжини дуги s. Штрих означає диференціювання по дузі, t — час. Рівняння (56) — це рівняння малих коливань плоского стержня малої кривини в його площині навколо положення рівноваги, що визначається функцією $\varrho = \varrho(s)$, означеною на інтервалі $(0, l)$.

Припускаючи, що $\varrho = R = \mathrm{const}$, $q = \mathrm{const}$, із (56) одержуємо рівняння малих коливань кругової арки довільного поперечного перерізу під гідростатичним тиском навколо кругової форми рівноваги:

$$R^4(EIu''')''' + R^2(EIu')''' + R^2(EIu''')' + (EIu')' +$$
$$+ R^5 q u^{\mathrm{IV}} + R^3 q u'' - mR^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R^4\left(m\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)' = 0. \qquad (57)$$

Часткові розв'язки останнього рівняння шукаємо у вигляді

$$u(s, t) = z(s)T(t). \qquad (58)$$

Це дає такі два рівняння:

$$R^4(EIz''')''' + R^2(EIz')''' + R^2(EIz''')' + (EIz')' +$$
$$+ R^5 q z^{\mathrm{IV}} + R^3 q z'' = a[mR^2 z - R^4(mz')'];\qquad (59)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - aT = 0, \qquad (60)$$

де a — стала розділення.

Із граничних умов задачі (57) одержимо граничні умови для рівняння (59), які можна записати так:

$$U_j z = 0 \quad (j = 1, \ldots, 6), \tag{61}$$

де оператори U_j залежать від способу закріплення кінців арки.

Покажемо, що задача (59) — (61) є самоспряженою [7]. Для цього, як відомо, досить встановити, що оператори, які входять в (59), — самоспряжені, а рівності (61) задовольняють відповідні умови. Неважко переконатися, що ліву частину (59) можна записати так:

$$Az \equiv [R^3q + EI + R^2(EI)'')z']' + [R^2(R^3q + 2EI)z'']'' + (R^4EIz''')'''. \tag{62}$$

Отже, оператор A — самоспряжений. Самоспряженість оператора

$$Bz \equiv mR^2z - R^4(mz')', \tag{63}$$

що знаходиться в правій частині (59), очевидна.

Переходимо до перевірки граничних умов. Вони повинні бути такими, щоб при будь-яких шість раз диференційованих функціях f і g із рівностей

$$U_j f = U_j g = 0 \ (j = 1, \ldots, 6) \tag{64}$$

випливали рівності

$$[A(f, g)]_0^l = 0, \ [B(f, g)]_0^l = 0, \tag{65}$$

де

$$\left.\begin{aligned} A(f, g) &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j+k=i-1} (-1)^j [(a_i f^{(i)})^{(k)} g^{(j)} - (a_i g^{(i)})^{(k)} f^{(j)}] \\ B(f, g) &= R^4 m(f'g - g'f); \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

а a_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти оператора A в (62).

Для арки з шарнірно закріпленими кінцями граничні умови (61) такі:

$$z(0) = z'(0) = z'''(0) = 0, \ z(l) = z'(l) = z'''(l) = 0, \tag{67}$$

а для безшарнірної

$$z(0) = z'(0) = z''(0) = 0, \ z(l) = z'(l) = z''(l) = 0. \tag{68}$$

Підставляючи f і g в (67) або в (68) і складаючи форми (66), переконуємося, що в обох випадках умови (65) виконуються. Отже, задача (59) — (61) — самоспряжена.

Покажемо тепер, що ця ж задача є нормальною. Для цього розглянемо вираз

$$I = \int_0^l fBf dx, \tag{69}$$

де f — довільна допустима функція. Інтегруванням по частинах останній вираз легко перетворити до вигляду

$$I = R^2 \int_0^l m(x)[f^2 + R^2 f'^2] dx. \tag{70}$$

Із (70) бачимо, що $I > 0$, коли $f(x) \not\equiv 0$, а цього, як відомо, досить для нормальності даної задачі.

Отже, гранична задача (59) — (61) є самоспряженою нормальною. Звідси випливає, що власні числа задачі a дійсні і утворюють не більше, як зліченну множину, яка не має граничних точок на кінцевій віддалі. Останнє має місце при довільному значенні гідростатичного навантаження q. Очевидно, що при досить малому навантаженні кругова форма рівноваги стійка і величини a в (60) від'ємні для всіх часткових розв'язків (58). Нестійкість настає, коли хоча б одно власне значення стане додатним. Оскільки a дійсні, то границею області стійкості (нестійкості) є значення частоти $a = 0$, тобто стан байдужої рівноваги. Тому задачу стійкості рівноваги кругової арки під гідростатичним тиском можна розв'язувати статичним методом.

Зауважимо, що випадок $\varrho = \text{const}$, $q = \text{const}$ є єдиним, в якому гранична задача, яка відповідає рівнянню (57), самоспряжена. Отже, застосування статичних методів до задач стійкості рівноваги некругових арок при неконсервативному навантаженні, що, наприклад, має місце в роботі [3], вимагає обгрунтування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. XXXVI, № 3, 1952.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1953.
3. Динник А. Н. Устойчивость арок. Гостехиздат, 1946.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
5. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 2. ГИТТЛ, 1955.
6. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. ГИТТЛ, 1955.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1955.
8. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing. Arch., XX Band, № 1, 1952.
9. Katke E. Über die definifen selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Math. Zeitschrift, 46 B., 1940.

В. Г. КОСТЕНКО, Н. В. ЄВСТАФ'ЄВА

ДЕЯКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО ГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ

В роботі виділяються нелінійні рівняння виду

$$\Omega = \Delta u - \varphi(x, y) F(u) = 0, \tag{1}$$

які залишаються інваріантними відносно нескінченних неперервних груп перетворень.

Нехай

$$Uf = \xi(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, u) \frac{\partial f}{\partial u} - \tag{2}$$

довільний оператор, а

$$U''f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial u} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial q} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial r} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial s} + \beta_3 \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{2a}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{d\zeta}{dx} - p \frac{d\xi}{dx} - q \frac{d\eta}{dx},$$

$$\alpha_2 = \frac{d\zeta}{dy} - p \frac{d\xi}{dy} - q \frac{d\eta}{dy},$$

$$\beta_1 = \frac{d\alpha_1}{dx} - r \frac{d\xi}{dx} - s \frac{d\eta}{dx},$$

$$\beta_2 = \frac{d\alpha_1}{dy} - r \frac{d\xi}{dy} - s \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\alpha_2}{dx} - s \frac{d\xi}{dx} - t \frac{d\eta}{dx},$$

$$\beta_3 = \frac{d\alpha_2}{dy} - s \frac{d\xi}{dy} - t \frac{d\eta}{dy}, -$$

двічі продовжений оператор з оператора (2).

Як відомо [3], диференціальне рівняння (1) буде інваріантним відносно перетворень (2) тоді і тільки тоді, якщо

$$U''\Omega = 0 \tag{3}$$

на всіх інтегральних поверхнях рівняння (1).

Сукупність перетворень, яка залишає інваріантним диференціальне рівняння, завжди створює групу.

Використовуючи ознаку (3), при умові $\varphi(x, y) = 1$ одержимо для визначення коефіцієнтів перетворень (2) систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x},\ \frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{\partial\eta}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}=0, \tag{4}$$

$$\zeta\frac{dF}{du}-F(u)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}.$$

Обмежимось в основному найбільш цікавим випадком нелінійних рівнянь (1), які будуть інваріантними відносно нескінченних неперервних груп перетворень.

Із системи рівнянь (4) випливає, що ξ і η повинні бути спряжено-гармонійними по x і y та незалежними від u функціями, а $\zeta=cu+\zeta_1(x, y)$ $(c=\text{const})$. Підставляючи це значення ζ в останнє рівняння системи (4) і враховуючи, що воно повинно бути тотожністю по u, одержимо нескінченну неперервну групу перетворень лише в єдиному випадку, коли $\frac{dF}{du}$ і $F(u)$ будуть лінійно залежними, а $u\frac{dF}{du}$ — від них лінійно незалежною функцією. При цьому $c=0$, а $\zeta_1(x, y)=-\frac{2}{k}\frac{\partial\xi}{\partial x}$.

Із лінійної залежності $F(u)$ і $\frac{dF}{du}$ випливає, що

$$F(u)=pe^{ku},$$

де p, k — довільні сталі.

Теорема 1. *Для того, щоб нелінійне рівняння $\Delta u=F(u)$ було інваріантним відносно нескінченної неперервної групи перетворень, необхідно і достатньо, щоб $F(u)=pe^{ku}$.*

Як показано в [2], рівняння $\Delta u=pe^u$ є автоморфним, тобто всі його розв'язки можуть бути одержані із будь-якого одного перетвореннями нескінченної неперервної групи з інфінітезимальними операторами

$$Uf=\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u},$$

де $\xi(x, y)$ і $\eta(x, y)$ — довільні спряжено-гармонійні функції.

Рівняння $\Delta u=pe^{ku}$ перетворюється в рівняння $\Delta v=pke^v$ при $u=\frac{v}{k}$.

Якщо ж $\varphi(x, y)\neq\text{const}$, то підрахунками, аналогічними попереднім, одержимо систему (4) у вигляді

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x},\ \frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{\partial\eta}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}=0, \tag{4a}$$

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}F(u)+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}F(u)+\zeta\varphi\frac{dF}{du}+\varphi F(u)\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}.$$

Підставляючи $\zeta=cu+\zeta_1(x, y)$ в останнє рівняння (4а) і враховуючи, що воно повинно бути тотожністю по u, при умові лінійної незалежності $F(u)$, $\frac{dF}{du}$ і $u\frac{dF}{du}$ одержимо:

$$c=0,\ \zeta_1(x, y)=0,$$

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \varphi(x, y) = 0. \tag{5}$$

В цьому випадку рівняння (1) не буде інваріантним відносно нескінченної неперервної групи перетворень, тому що $\varphi(x, y)$ повинна задовольняти (5) і, таким чином, буде виражатись через ξ і η.

Шукаючи частинний розв'язок останнього рівняння системи (5) у вигляді $\varphi = \Phi_1(\xi^2 + \eta^2)$, одержимо $\varphi = \frac{k_1}{\xi^2 + \eta^2}$, де k_1 — const.

Таким чином, диференціальне рівняння

$$\Delta u = \frac{F(u)}{\xi^2 + \eta^2}, \tag{6}$$

де $F(u)$ — довільна функція від u, завжди допускатиме однопараметричну групу перетворень

$$U_1 f = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

а також, як легко перевірити, групу

$$U_2 f = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} - \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial x},$$

комутативну першій.

Шукаючи загальний розв'язок останнього рівняння системи (5) у вигляді

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \Phi(x, y),$$

матимемо

$$\xi(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Для знаходження інтегруючого множника $\mu(x, y)$ відповідного звичайного рівняння

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}$$

знову одержимо рівняння

$$\xi(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} + 2 \mu(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \tag{5a}$$

а тому $\mu(x, y) = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}$.

Таким чином, рівняння

$$\Delta u = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \Phi \left[\int_{x_0}^{x} \frac{\eta(x, y)}{\xi^2(x, y) + \eta^2(x, y)} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\xi(x_0, y)}{\xi^2(x_0, y) + \eta^2(x_0, y)} dy \right] F(u)$$

допускає однопараметричну групу перетворень

$$U_1 f = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Якщо $F(u)$ і $\frac{dF}{du}$ лінійно залежні, а $u\frac{dF}{du}$ — лінійно незалежна від них функція, то із останнього рівняння системи (4а) одержимо: $c=0$, $\Delta\zeta_1=0$,

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\zeta_1(x,y)\varphi(x,y)k+2\varphi(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}=0. \tag{6}$$

Шукаючи розв'язок рівняння (6) у вигляді $\varphi=\pm e^{\psi(x,y)}$, будемо мати:

$$\zeta_1(x,y)=-\frac{1}{k}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi}{\partial y}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

Але

$$\Delta\zeta_1=-\frac{1}{k}\Delta\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{k}\left[\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\right]=0,$$

що при позначенні $\Delta\psi=R(x,y)$ можна записати так:

$$\xi\frac{\partial R}{\partial x}+\eta\frac{\partial R}{\partial y}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}R=0. \tag{7}$$

У всіх випадках, коли функція $R(x,y)\neq0$, вона, а разом з нею і $\psi(x,y)$, буде виражатись через ξ і η. Це приводить до того, що відповідні рівняння (1) можуть бути інваріантними лише відносно конечнопараметричних груп перетворень. І лише тоді, коли $R(x,y)=0$, тобто $\psi(x,y)$ — довільна гармонійна функція, одержимо рівняння

$$\Delta u=\pm e^{\psi(x,y)}e^{ku}, \tag{8}$$

інваріантне відносно нескінченної неперервної групи перетворень з оператором

$$Uf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{k}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi}{\partial y}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{9}$$

де ξ і η — довільні спряжено-гармонійні функції.

Інші можливі випадки залежності між $F(u)$, $\frac{dF}{du}$ і $u\frac{dF}{du}$ не приводять до нескінченних неперервних груп перетворень, відносно яких рівняння виду (1) були б інваріантними.

Теорема 2. *Для того, щоб нелінійне рівняння (1) при $\varphi(x,y)\neq\text{const}$ було інваріантним відносно нескінченної неперервної групи перетворень, необхідно і достатньо, щоб*

$$\varphi(x,y)=\pm e^{\psi(x,y)} \text{ і } F(u)=e^{ku},$$

де $\psi(x,y)$ — довільна гармонійна функція, а k — довільна стала.

При цьому оператор нескінченної неперервної групи перетворень має вигляд (9).

Рівняння

$$\Delta u=e^{\psi(x,y)}e^{ku} \tag{1a}$$

заміною $u=\frac{v-\psi}{k}$ перетворюється в $\Delta v=ke^v$.

Як відомо [2], загальний розв'язок останнього автоморфного рівняння має вигляд

$$v(x, y) = -2\ln|f(z)| - 2\ln\ln|f(z)| + 2\ln|f'(z)| + \ln\frac{k}{2},$$

де $f(z)$ — довільна аналітична функція.

Звідси одержуємо, що рівняння (1a) також автоморфне і його загальний розв'язок є:

$$u(x, y) = -\frac{1}{k}\Big\{\psi(x, y) + 2\ln|f(z)| + 2\ln\ln|f(z)| -$$

$$-2\ln|f'(z)| - \ln\frac{k}{2}\Big\}.$$

Аналогічно можна знайти загальний розв'язок для рівняння

$$\Delta u = -e^{\psi(x, y)}e^{ku}.$$

Зауваження. Гіпотеза І. Н. Векуа [1] про те, що для знаходження загального розв'язку рівняння

$$\Delta u = \varphi(x, y)e^{u}$$

достатньо знайти один його частинний розв'язок, тобто що останнє рівняння автоморфне (в термінології Вессіо), підтверджується з точки зору групових властивостей цього рівняння лише для випадку, коли $\varphi(x, y) = \pm|w(z)|$, де $w(z)$ — довільна аналітична функція комплексного змінного $z = x + iy$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Векуа І. Н. Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -2ke^{u}$. Сибирский математический журнал, т. I, № 3, 1960.

2. Костенко В. Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних груповим методом. Вид. Львівського ун-ту, 1959

3. Lie S. Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen. Berichte Sachs. Ges., т. 43, 1891.

З. О. МЕЛЬНИК

ОДНЕ ЗАУВАЖЕННЯ ДО МЕТОДУ ВІДОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В нашій попередній роботі [1] методом відображень розв'язувалась змішана задача для рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + g^\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + g(x)u + f(x, t) \tag{1}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3);\ g^{\alpha\beta}(x) = g^{\alpha}(x);\ x^3 \geqslant 0$$

при початкових умовах

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t-0} = \psi(x) \tag{2}$$

і граничній умові

$$u\big|_{x^3-0} = 0, \tag{3}$$

де $x = (x^1, x^2, x^3)$; $g^{\alpha\beta}$, g , g, f, φ, ψ — деякі функції, які повинні задовольняти певні умови гладкості.

Продовжуючи відповідним чином коефіцієнти, вільний член і початкові функції задачі в півпростір $x^3 < 0$, ми досягали того, що умова (3) автоматично відпадала, оскільки одержаний за методом С. Л. Соболєва для продовжених даних розв'язок задачі (1)—(2) перетворювався в нуль на площині $x^3 = 0$. Але для існування розв'язку задачі Коші необхідно на дані задачі накласти ряд умов неперервності. Коли ж ми продовжуємо задані функції в півпростір $x^3 < 0$, то при $x^3 = 0$ в коефіцієнтах рівняння і в деяких їх похідних появляються розриви першого роду. Щоб уникнути цього неприємного факту, нам довелось в роботі [1] накласти цілий ряд умов рівності нулю при $x^3 = 0$ коефіцієнтів рівняння і відповідних їхніх похідних, що значно звужує клас рівнянь, до яких застосовний метод відображень.

Виявляється, що в багатьох з цих умов можна легко позбутись шляхом простих перетворень.

В [1] нам приходилось припускати, що при $x^3 = 0$ виконуються умови:

$$g^{13} = g^{23} = g^3 = 0,$$

$$\frac{\partial g^{11}}{\partial x^3} = \frac{\partial g^{12}}{\partial x^3} = \frac{\partial g^{22}}{\partial x^3} = \frac{\partial g^{33}}{\partial x^3} = 0.$$

Припустимо, що ці умови не виконані. Тоді в (1) зробимо заміну шуканої функції

$$u(x, t) = v(x, t) \cdot \Phi(x), \tag{4}$$

де $v(x, t)$ — нова шукана функція, $\Phi(x)$ — поки що довільна.

Задача (1)—(3) після цієї заміни перейде в таку:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \bar{g}^\alpha(x)\frac{\partial v}{\partial x^\alpha} + \bar{g}(x)v + \bar{f}(x, t), \tag{1a}$$

$$v|_{t=0} = \bar{\varphi}(x); \quad v_t|_{t=0} = \bar{\psi}(x), \tag{2a}$$

$$v|_{x^3=0} = 0, \tag{3a}$$

де

$$\bar{g}^\alpha(x) = \left(g^\alpha(x)\,\Phi(x) + 2\,g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta}\right)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{g}(x) = \left(g(x)\Phi(x) + g^\alpha(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} + g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{f}(x, t) = f(x)\Phi^{-1}(x).$$

Тоді в (1а) переходимо до нових змінних за формулами:

$$y^\alpha = y^\alpha(x) = \varphi^\alpha(\tilde{x}) + x^3\,\psi^\alpha(\tilde{x}) + (x^3)^2\,\chi^\alpha(\tilde{x}) \tag{5}$$
$$(\alpha = 1,\ 2,\ 3),$$

де $\tilde{x} = (x^1, x^2)$, $\varphi^3(\tilde{x}) \equiv 0$ і якобіан

$$\frac{D\,(y^1, y^2, y^3)}{D\,(x^1, x^2, x^3)} \neq 0 \tag{6}$$

у всіх точках простору.

Очевидно, що після такої заміни задача (1а)—(3а) переходить у таку:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p^{\alpha\beta}(y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + p^\alpha(y)\frac{\partial v}{\partial y^\alpha} + p(y)v + f_1(y, t), \tag{1б}$$

$$v|_{t=0} = \varphi_1(y); \quad v_t|_{t=0} = \psi_1(y), \tag{2б}$$

$$v|_{y^3=0} = 0, \tag{3б}$$

де

$$p^{\alpha\beta}(y) = g^{ij}(x)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}, \tag{7}$$

$$p^\alpha(y) = \bar{g}^i(x)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + g^{ij}(x)\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{8}$$

$$p(y) = \bar{g}(x),\ f_1(y, t) = \bar{f}(x, t),\ \varphi_1(y) = \bar{\varphi}(x),\ \psi_1(y) = \bar{\psi}(x),$$

причому в правих частинах останніх рівностей на місце x^k треба поставити відповідні функції від y^l, знайдені з системи (5). Це завжди можливо в силу (6).

Підберемо функції φ^α, ψ^α, χ^α і Φ так, щоб при $y^3 = 0$ виконувались умови:

$$p^{13}(y) = p^{23}(y) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial p^{11}}{\partial y^3} = \frac{\partial p^{22}}{\partial y^3} = \frac{\partial p^{33}}{\partial y^3} = \frac{\partial p^{12}}{\partial y^3} = 0, \tag{10}$$

$$p^3(y) = 0. \tag{11}$$

При $y^3 = 0$ з (5) одержуємо:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^3} = \frac{g^{i3}}{g^{33}\psi^3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Отже, при $y^3 = 0$ маємо:

$$\frac{\partial}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial y^3} = \frac{g^{s3}}{g^{33}\psi^3}\frac{\partial}{\partial x^s} \quad (s = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Враховуючи, що при $y^3 = 0$, $x^3 = 0$, і в силу (12) можемо сказати: для того, щоб виконувались умови (9), (10), (11), досить, щоб функції φ^α, ψ^α, χ^α, Φ задовольняли при $x^3 = 0$ рівності:

$$g^{i3}\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} + g^{33}\varphi^k = 0 \quad (i, k = 1, 2), \tag{13}$$

$$A^{ij}\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^l}{\partial x^j} = 0 \quad (i, j, k, l = 1, 2), \tag{14}$$

$$4g^{33}g^{i3}\frac{\partial \psi^3}{\partial x^i} + g^{r3}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r}\psi^3 + 4(g^{33})^2\chi^3 = 0 \tag{15}$$

$$(i = 1, 2; \quad r = 1, 2, 3),$$

$$\bar{g}^3\psi^3 + 2g^{r3}\frac{\partial \psi^3}{\partial x^r} + 2g^{33}\chi^3 = 0 \tag{16}$$

$$(r = 1, 2),$$

де

$$A^{ij} = g^{r3}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^r} - g^{rj}\frac{\partial g^{i3}}{\partial x^r} - g^{ir}\frac{\partial g^{3j}}{\partial x^r} +$$

$$+ \frac{g^{rj}g^{i3}g^{33} + g^{ir}g^{j3}g^{33} - g^{r3}g^{i3}g^{j3}}{(g^{33})^2}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r} \quad (r = 1, 2, 3).$$

Дійсно, простими підрахунками знаходимо:

$$p^3(y)|_{y^3=0} = \left[\bar{g}^3\psi^3 + 2g^{r3}\frac{\partial \psi^3}{\partial x^r} + 2g^{33}\chi^3\right]_{x^3=0} (r = 1, 2),$$

$$p^{k3}(y)|_{y^3=0} = \left[g^{i3}\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} + g^{33}\psi^k\right]_{x^3=0} \quad (i, k = 1, 2),$$

$$\left.\frac{\partial p^{kl}}{\partial y^3}\right|_{y^3=0} = \left[A^{ij}\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^l}{\partial x^j}\right]_{x^3=0} \quad (i, j, k, l = 1, 2),$$

звідки й випливає наше твердження.

Тоді з (15) одержуємо:

$$\chi^3(x) = -\frac{g^{i3}}{g^{33}}\frac{\partial \psi^3}{\partial x^i} - \frac{g^{r3}}{4(g^{33})^2}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r}\psi^3 \tag{17}$$

$$(i = 1, 2; \; r = 1, 2, 3).$$

Помноживши (16) на $2g^{33}$ і віднявши від (15), одержимо:

$$\left(g^{r3}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r} - 2\bar{g}^3 g^{33}\right)\psi^3 = 0 \quad (r = 1, 2, 3).$$

Оскільки $\psi^3 \neq 0$, то, враховуючи вираз для $\bar{g}^3$, будемо мати:

$$g^3\,\Phi + 2g^{3i}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{g^{r3}}{2\,g^{33}}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r}\,\Phi \quad (i = 1, 2;\ r = 1, 2, 3). \tag{18}$$

З (13) випливає:

$$\psi^k = -\frac{g^{i3}}{g^{33}}\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} \quad (i = 1,2). \tag{19}$$

За $\varphi^1(x)$ і $\varphi^2(x)$ приймемо два лінійно незалежні розв'язки рівняння:

$$A^{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = 0. \tag{20}$$

$\psi^3(x)$ будемо вважати довільною функцією, не рівною нулю в жодній точці простору.

Отже, має місце теорема: якщо при довільній функції $\varphi^3 \neq 0$ функція χ^3 виражається за формулою (17), функція Φ є довільним розв'язком рівняння (18), функції φ^k $(k = 1, 2)$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (20) і функції ψ^k $(k = 1, 2)$ виражаються з формул (19), то після заміни шуканої функції за формулою (4) і заміни змінних за формулами (5) рівняння (1) переходить в (16), в якому виконуються всі умови (9), (10) і (11), за винятком рівності

$$\frac{\partial p^{12}}{\partial y^3} = 0 \quad \text{при } y^3 = 0.$$

Крім того, легко показати, що можна так підібрати функції χ^1 і χ^2, що при $y^3 = 0$ будуть виконуватись умови

$$\frac{\partial p^{13}}{\partial y^3} = \frac{\partial p^{23}}{\partial y^3} = 0.$$

Отже, шляхом наведених перетворень не можна задовольнити тільки останню умову в (10).

ЛІТЕРАТУРА

1. Мельник З. О. Змішана задача для деяких рівнянь гіперболічного типу. Зб. робіт аспірантів каф. природничих наук. Вид. Львівського ун-ту, 1960.

О. М. ШАБЛІЙ

ПРО НЕСУЧУ ЗДАТНІСТЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ КІЛЬЦЕВИМ РЕБРОМ

Кругла пластинка товщиною $2h$ і радіусом R шарнірно сперта на контурі, а на довільному радіусі R_1 підсилена концентричним ребром. Пластинка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням, яке є функцією часу $p(t)$. Потрібно визначити несучу здатність q такої конструкції.

За умову пластичності приймемо шестикутник Треска. Матеріал пластинки і ребра жорстко пластичний.

Динамічне рівняння рівноваги елемента пластинки має вигляд:

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = -\int_0^r \left[p(t) - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] r dr, \tag{1}$$

де M_r, M_θ — радіальний і коловий згинаючі моменти, віднесені до одиниці довжини;

w — прогин серединної площини пластинки;

μ — густина матеріалу пластинки.

Рівняння руху елемента тонкого ребра під дією рівномірно розподіленого моменту m_* буде:

$$H_* + m_* R_1 - \mu_k I \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

де H_* — граничний внутрішній згинаючий момент, який дорівнює граничному зовнішньому моменту з оберненим знаком $|H_* = -H|$;

m_* — інтенсивність реактивного моменту, який діє з боку пластинки на ребро ($m_* = m$, m — інтенсивність реактивного моменту, який діє з боку ребра на пластинку);

$\mu_k I$ — момент інерції поперечного перетину кільця;

γ — кут повороту кільця.

Нехай навантаження, яке діє на пластинку, перевищує несучу здатність на невелику величину $\varepsilon \geqslant 0$.

Після аналізу пластичного стану пластинки [1, 2] і ребра приходимо до висновку, що поле швидкостей у пластинці має такий вигляд:

а) $\frac{\partial w}{\partial t} = C_1 r + C_2; \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho,$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C_3 + C_4 \ln r, \quad \rho \leqslant r \leqslant R_1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C_5 r + C_6, \quad R_1 \leqslant r \leqslant R,$$

коли

$$\frac{m}{M_0} \geqslant \frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}; \tag{4}$$

б) $$\frac{\partial w}{\partial t} = C_1^* r + C_2^*, \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{5}$$

коли

$$\frac{m}{M_0} \leqslant \frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}, \tag{6}$$

де $M_0 = \sigma_0 h^2$ — граничний момент пластинки;
$C_1, \ldots C_6, C_1^*, C_2^*$ — довільні функції часу, які визначаються з граничних і початкових умов.

У випадку а) будуть мати місце граничні умови [3, 4]:

при $r = R$: $$M_r = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0; \tag{7}$$

при $r = R_1$: $$M_r - M_{r2} = m,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}; \tag{8}$$

при $r = \varrho$: $$M_{r1} = M_{r2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial r \partial t}; \tag{9}$$

при $r = 0$: $$M_{r1} = M_{\Theta 1} = M_0. \tag{10}$$

Числові індекси «1» або «2» означають, що дана величина береться відповідно в проміжку $0 \leqslant r \leqslant \rho$ або $\rho \leqslant r \leqslant R_1$. Величина без індекса береться в проміжку $R_1 < r < R$.

У випадку б) граничні умови (9) відпадають, а в умовах (8) індекс «2» заміниться на «1».

Граничні умови (7) і (10) мають місце без змін.

Початкові умови:

$$w(r, 0) = 0, \frac{\partial w(r, 0)}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Проінтегрувавши рівняння (1) за допомогою (3), (5) та граничних і початкових умов, одержимо вирази для моментів і швидкостей як функції r і t.

Якщо навантаження не перевищує несучої здатності, то поле швидкостей нульове. На основі цього одержуємо такі вирази для несучої здатності:

У випадку а):

$$q = \frac{6M_0}{\rho^2}, \tag{12}$$

де ρ визначається з трансцедентного рівняння

$$2R_1 m + \frac{M_0}{\rho^2}(3\rho^2 R_1 - 2R^3 - R_1^3) - 2M_0\left(R_1 - R - R_1 \ln \frac{R_1}{\rho}\right) = 0; \tag{13}$$

у випадку б):

$$\frac{q}{p_0} = 1 + \frac{m}{M_0}\frac{R_1}{R}, \qquad (14)$$

де $p_0 = \frac{6\,M_0}{R^2}$ — несуча здатність шарнірно спертої пластинки без підкріплення.

При збільшенні значення $\frac{m}{M_0}$ при певному $\frac{R_1}{R}$ несуча здатність конструкції пластинка-ребро збільшиться лише до якоїсь границі, яка обумовлена появою пластичного шарніра в пластинці біля ребра з його внутрішньої або зовнішньої сторони.

Через це формули (12), (13) вірні для:

$$\frac{m}{M_0} \leqslant \frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3} - \ln\sqrt{\frac{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}} - \frac{1}{2}, \text{ коли } 0{,}755 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}85, \qquad (15)$$

і

$$\frac{m}{M_0} \leqslant 2 - \frac{R}{R_1} + 1{,}877\left[\left(\frac{R}{R_1}\right)^3 - 1\right], \quad \text{коли } 0{,}85 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 1. \qquad (16)$$

Формула (14) вірна для

$$\frac{m}{M_0} \leqslant \frac{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}, \quad \textbf{коли } 0 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}755. \qquad (17)$$

Коли не виконується нерівність (15) у випадку а) і нерівність (17) у випадку б), несуча здатність визначається за формулою

$$\frac{q}{p_0} = \frac{1}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}; \quad 0 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}85. \qquad (18)$$

Якщо ж не виконується (16) — за формулою

$$\frac{q}{p_0} = \frac{1{,}877}{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}; \quad 0{,}85 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 1. \qquad (19)$$

Як показують підрахунки, несуча здатність пластинки за допомогою ребра може бути збільшена більш як у два рази.

У наведених вище формулах величина m може бути граничним моментом не тільки тонких, але й середніх і високих ребер.

Одержані формули можуть бути застосовані для обчислення несучої здатності таких конструкцій, особливо з матеріалів, близьких до жорстко пластичних.

Ефективність постановки ребер буде доведена тоді, коли ми покажемо, що вага пластинки з ребром буде менша, ніж вага пластинки без ребра, яка має з нею однакову несучу здатність і радіус.

Мета цієї роботи — показати ефективність застосування тонких ребер для підкріплення круглих пластин.

Коли висота ребра $2h_к$, то тонким, за Соколовим [6], вважається ребро, параметри якого задовольняють умову

$$h_k \leqslant 0{,}39\sqrt{R_1 a}. \tag{20}$$

Граничний реактивний момент тонкого ребра визначається за формулою

$$m = \nu M_0 = \frac{a(h^2{}_k - h^2)\,\sigma'_0}{R_1}, \tag{21}$$

де a — ширина ребра, $\sigma_0{}^1$ — напруження текучості матеріалу ребра, $\nu = \frac{m}{M_0}$.

Будемо вважати матеріал пластинки і ребра однаковим.

Якщо позначити через N_1 вагу пластинки без ребра, радіус і несуча здатність якої дорівнюють відповідним величинам для пластинки з ребром, а через N_2 — вагу пластинки з ребром, то

$$\lambda = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left\{1 - \frac{k^2 + k\sqrt{k^2 + 0{,}6084\,\nu b^2}}{0{,}1521} - \right.$$

$$- \frac{k^4 + 2k^3\sqrt{k^2 + 0{,}6084\,\nu b^2} + k^2\,(k^2 + 0{,}6084\,\nu b^2)}{0{,}09254\,b^2} +$$

$$\left. + 4{,}6496\left(k^{\frac{4}{3}} + k^{\frac{1}{3}}\sqrt{k^2 + 0{,}6084\nu b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}, \tag{22}$$

де

$$\delta = \frac{q}{p_0}, \quad k = \frac{h}{R}, \quad b = \frac{R_1}{R}.$$

Тоді економія матеріалу визначається за формулою

$$\Delta = 1 - \lambda. \tag{23}$$

Будемо обчислювати економію матеріалу в проміжку $0 \leqslant \frac{R_1}{R} < 1$, міняючи ν по кривій, яка визначається рівностями (17), (15) і (16), а коефіцієнт несучої здатності δ відповідно за формулами (18) і (19).

Підрахунки показують, що підкріплення тонших пластинок більш економне.

З точки зору несучої здатності і економії матеріалу найвигіднішим буде ребро, розміщене в проміжку $0{,}755 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}85$, коли значення $\nu = \frac{m}{M_0}$ визначається за рівністю (15).

Результати підрахунку економії матеріалу для двох випадків наведені в таблиці.

b	k	ν	δ	Δ
0,8	0,02	1,33	2,05	8%
0,85	0,01	2,00	2,60	15%

ЛІТЕРАТУРА

1. Венцковский Б. К. Несущая способность круглых и кольцевых пластинок, подкрепленных кольцевыми ребрами. Сборник «Расчеты на прочность» № 6, 1960.

2. Гопкинс и Прагер В. Динамика пластической круглой пластинки. Сборник «Механика» № 3, 1955.

3. Прагер В. Проблемы теории пластичности. ГИФМ, 1958.

4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Инженерный сборник, т. VIII, 1950.

5. Соколов С. Н. Изгиб круглых и кольцевых пластинок, подкрепленных кольцевыми ребрами. Сборник «Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания». Машгиз, 1955.

6. Флейшман Н. П. Пружна рівновага плити з ребрами жорсткості змінної кривизни. Наукові записки ЛДУ ім. Ів. Франка, т. 44, вип. 8, 1957.

Ю. И. КОЙФМАН

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ, КРАЙ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕН ТОНКИМ СТЕРЖНЕМ

Предположим, что материал пластинки эластичен (некоторые виды пластмасс, каучук и т. д.), а подкрепляющее кольцо сделано из более жесткого материала. В этом случае упругое равновесие пластинки будет описываться уравнениями нелинейной теории упругости [2], [6], [7], а упругое равновесие кольца — уравнениями теории деформаций тонких криволинейных стержней [1], [4].

Система нелинейных дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости интегрируется посредством представления решения в виде ряда по параметру ε [6].

Первое приближение дает известные соотношения линейной теории. Формулы для членов второго порядка приведены в работе [7].

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим пластинку, край которой подкреплен тонким кольцом. Подкрепляющее кольцо примем за упругую линию, работающую на растяжение и изгиб. Эта задача в линейной постановке была решена М. П. Шереметьевым [4].

Систему координат $(z, \bar{z})$ выберем в деформированном теле (переход к координатам $(\eta, \bar{\eta})$ недеформированного тела осуществляется обычным образом) и поместим начало координат внутри пластинки, если она сплошная, или внутри отверстия, если пластинка ослаблена отверстием.

На контуре соприкосновения пластинки и кольца должны выполняться такие условия:

$$D = D_0; \quad \int\limits_0^s (X_n + iY_n)\, ds = \int\limits_0^s (X_{n\cdot o} + iY_{n\cdot o})\, ds + c_1, \tag{1}$$

где $D = u + iv$, X_n, Y_n; $D_0 = u_0 + iv_0$, $X_{n\cdot o}$, $Y_{n\cdot o}$ — комплексное смещение и компоненты напряжения соответственно для пластинки и кольца.

Напряженное состояние подкрепляющего кольца характеризуется изгибающим моментом M, нормальной силой N_1, перерезывающей силой N_2, которые определяются из уравнений статики для элемента оси кольца [1], [4]. Закон Гука для кольца выберем в таком виде:

$$\beta = \frac{N_1}{g_1} + \frac{M}{\rho g_1}; \quad \frac{d\Theta}{ds} = \frac{M}{g_2} + \frac{M}{\rho^2 g_1} + \frac{N_1}{\rho g_1}, \tag{2}$$

где β — относительное удлинение элемента оси кольца, отнесенное к деформированному или недеформированному состоянию, Θ — угол поворота, ρ — радиус кривизны оси стержня, g_1, g_2 — жесткости на растяжение и изгиб.

Комплексное смещение для кольца выражается следующим образом [4]:

$$D_0 = \int_0^s e^{i\alpha}\,(i\beta - \Theta)\,ds. \tag{3}$$

Предположим, что проекции усилий X_n, Y_n, $X_{n,0}$, $Y_{n,0}$ для пластинки и кольца можно представить в таком виде:

$$X_n + i\,Y_n = 2^0 H\varepsilon\,[(X_n^{(1)} + iY_n^{(1)}) + \varepsilon\,(X_n^{(2)} + i\,Y_n^{(2)}) + \ldots\ldots];$$

$$X_{n,0} + iY_{n,0} = 2^0 H\varepsilon\,[(X_{n,0}^{(1)} + i\,Y_{n,0}^{(1)}) + \varepsilon\,(X_{n,0}^{(2)} + i\,Y_{n,0}^{(2)}) + \ldots\ldots]. \tag{4}$$

Тогда из формул (2), (3), (4) получим:

$$D_0 = 2^0 H\varepsilon[D_0^{(1)} + \varepsilon D_0^{(2)} + \ldots..], \tag{5}$$

где

$$D_0^{(1)} = \int_0^s e^{i\alpha}\,(i\beta^{(1)} - \Theta^{(1)})\,ds; \quad D_0^{(2)} = \int_0^s e^{i\alpha}\,(i\beta^{(2)} - \Theta^{(2)})\,ds.$$

Так как $D = \varepsilon D^{(1)} + \varepsilon^2 D^{(2)} + \ldots..$ [2], то, учитывая формулы (4), (5), (1), запишем граничные условия для второго приближения следующим образом:

$$D^{(2)} = 2^0 H D_0^{(2)}; \quad \int_0^s (X_n^{(2)} + iY_n^{(2)})\,ds = \int_0^s (X_{n,0}^{(2)} + iY_{n,0}^{(2)})\,ds. \tag{6}$$

Выражая левые части соотношений (6) по известным формулам [7] через потенциалы второго порядка $\varphi_{(Z)}^{(2)}$, $\psi_{(Z)}^{(2)}$, получим следующие граничные условия для этих функций:

$$\varphi^{(2)}(t) + t\overline{\varphi}'^{(2)}(\overline{t}) + \overline{\psi}^{(2)}(\overline{t}) - F(t, \overline{t}, \gamma, \delta) = i\int_0^s (X_{n,0}^{(2)} + i\,Y_{n,0}^{(2)})\,ds; \tag{7}$$

$$k\varphi^{(2)}(t) - t\overline{\varphi}'^{(2)}(\overline{t}) - \overline{\psi}^{(2)}(\overline{t}) - F_1(\overline{t}, t, \gamma, \delta) = 2^0 H \int_0^s e^{i\alpha}\,(i\beta^{(2)} - \Theta^{(2)})\,ds,$$

где

$$F(t, \overline{t}, \gamma, \delta) = \gamma\,[(t\,\overline{\Phi}'^{(1)}(\overline{t}) + \overline{\Psi}^{(1)}(\overline{t}))\,\overline{D}^{(1)} +$$
$$+ (\delta\overline{\Phi}^{(1)}(\overline{t})) + \Phi^{(1)}(t)\,D^{(1)}] - k_3 t\,[\overline{\Phi}^{(1)}(\overline{t})]^2;$$

$$F_1(t, \overline{t}, \gamma, \delta) = -\gamma\,[(t\,\overline{\Phi}'^{(1)}(\overline{t}) + \overline{\Psi}^{(1)}(\overline{t}))\,\overline{D}^{(1)} + (\delta\,\overline{\Phi}^{(1)}(\overline{t}) - k\Phi^{(1)}(t))\,D^{(1)}] -$$
$$- k'_1 \int \overline{\Phi}^{(1)}(\overline{t})\,\overline{\Psi}^{(1)}(\overline{t})\,d\overline{t} - k'_2 \int [\Phi^{(1)}(t)]^2\,dt - k'_3\,t\,[\overline{\Phi}^{(1)}(\overline{t})]^2.$$

$\Phi_{(Z)}^{(1)}$, $\Psi_{(Z)}^{(1)}$ — потенциалы в линейной теории; постоянные, входящие в функции F, F_1, определены в работе [7].

В случае решения задачи в координатах $(\eta, \bar{\eta})$ недеформированного тела необходимо заменить в функциях $F(t, \bar{t}, \gamma, \sigma)$ и $F_1(t, \bar{t}, \gamma, \sigma)$ γ, δ на $\gamma^1 = \gamma - 1$, $\delta^1 = 1 - B_3/k(\gamma - 1)$ [6].

РАСТЯЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Потенциалы первого порядка в данном случае имеют такой вид:

$$\varphi^{(1)}_{(Z)} = \Gamma^{(1)} Z + a_1^{(1)} \frac{R^2}{Z}; \quad \psi^{(1)}_{(Z)} = \Gamma'^{(1)}_{Z} + b_1^{(1)} \frac{R^2}{Z} + b_3^{(1)} \frac{R^4}{Z^3}. \tag{8}$$

Из формул (7), (8) следует:

$$F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = \sum_{n=-2}^{2} B'_{2n+1} e^{(2n+1)i\vartheta}; \quad F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = \sum_{n=-2}^{2} E'_{2n+1} e^{(2n+1)i\vartheta}; \tag{9}$$

Разложим проекции усилий $X^{(2)}_{n,0} + iY^{(2)}_{n,0}$ в ряды Фурье:

$$X^{(2)}_{n,0} + iY^{(2)}_{n,0} = (\alpha_0^{(2)} + i\gamma_0^{(2)}) + \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n^{(2)} + i\gamma_n^{(2)}) \sigma^n + (\bar{\alpha}_n^{(2)} + i\bar{\gamma}_n) \sigma^{-n}]. \tag{10}$$

Используя равенство нулю главного вектора и главного момента усилий, передаваемых на пластинку со стороны кольца, а также симметричность $X^{(2)}_{n,0}$, $Y^{(2)}_{n,0}$ относительно осей координат, получим:

$$\alpha_0^{(2)} = \gamma_0^{(2)} = \alpha_{2n}^{(2)} = \gamma_{2n}^{(2)} = 0; \quad \alpha_{2n+1}^{(2)} = \bar{\alpha}_{2n+1}^{(2)}; \quad \gamma_{2n+1}^{(2)} = -\bar{\gamma}_{2n+1}^{(2)}. \tag{11}$$

Из условия однозначности угла поворота Θ при обходе вдоль контура и условия однозначности смещений для кольца, учитывая формулы (10), аналогично [4] получим:

$$M^{(2)} = \frac{R^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\omega_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} + \bar{\omega}_{2n}^{(2)} \sigma^{-2n}\right) - \frac{R^2 g_2 (\bar{\alpha}_1^{(2)} - i\bar{\gamma}_1^{(2)})}{g_2 + R^2 g_1};$$

$$N_1^{(2)} = -\frac{R}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} + \bar{\delta}_{2n}^{(2)} \sigma^{+2n}) + R(\bar{\alpha}_1^{(2)} - i\bar{\gamma}_1^{(2)}); \tag{12}$$

$$\beta^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} (m_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} + \bar{m}_{2n}^{(2)} \sigma^{-2n}) + \frac{R^3 (\bar{\alpha}_1^{(2)} - i\bar{\gamma}_1^{(2)})}{g_2 + R^2 g_1};$$

$$\Theta^{(2)} = i \sum_{n=1}^{\infty} (l_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} - \bar{l}_{2n}^{(2)} \sigma^{-2n}),$$

где

$$\omega_{2n}^{(2)} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{2n-1} (\alpha_{2n-1}^{(2)} - i\gamma_{2n-1}^{(2)}) + \frac{1}{2n+1} (\alpha_{2n+1}^{(2)} + i\gamma_{2n+1}^{(2)})\right];$$

$$\delta_{2n}^{(2)} = \frac{1}{2n-1} (\alpha_{2n-1}^{(2)} - i\gamma_{2n-1}^{(2)}) - \frac{1}{2n+1} (\alpha_{2n+1}^{(2)} + i\gamma_{2n+1}^{(2)});$$

$$m_{2n}^{(2)}=\frac{R}{4ng_1}\left[(\alpha_{2n-1}^{(2)}-i\gamma_{2n-1}^{(2)})-(\alpha_{2n+1}^{(2)}+i\gamma_{2n+1}^{(2)})\right];$$

$$l_{2n}^{(2)}=\frac{1}{2n}\left(m_{2n}^{(2)}-\frac{R^3}{2g_2}\omega_{2n}^{(2)}\right).$$

Учитывая условие однозначности смещений для пластинки [7], потенциалы второго порядка будем искать в таком виде:

$$\varphi_{(Z)}^{(2)}=\Gamma^{(2)}_Z+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(2)}\frac{R^{n+1}}{Z^n};\quad \psi_{(Z)}^{(2)}=\Gamma'^{(2)}_Z+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{(2)}\frac{R^{n+1}}{Z^n}. \tag{13}$$

Подставим соотношения (9), (10), (12), (13) в граничные условия (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях σ:

$$2R\Gamma^{(2)}+\overline{b}_1^{(2)}-B_1'=R(\alpha_1^{(2)}+i\gamma_1^{(2)});$$

$$R\Gamma'^{(2)}+a_1^{(2)}-B_{-1}'=-R(\overline{\alpha}_1^{(2)}+i\overline{\gamma}_1^{(2)}); \tag{14}$$

$$-(2n-1)\overline{a}_{2n-1}^{(2)}+\overline{b}_{2n+1}^{(2)}-B_{2n+1}'=\frac{R}{2n+1}(\alpha_{2n+1}^{(2)}+i\gamma_{2n+1}^{(2)});$$

$$a_{2n+1}^{(2)}-B_{-(2n+1)}'=-\frac{R}{2n+1}(\overline{\alpha}_{2n+1}^{(2)}+i\overline{\gamma}_{2n+1}^{(2)});$$

$$(k-1)R\Gamma^{(2)}-\overline{b}_1^{(2)}-E_1'=2^0HR\frac{R^2}{g_2+R^2g_1}(\overline{\alpha}_1^{(2)}-i\overline{\gamma}^{(2)});$$

$$-R\Gamma'^{(2)}+ka_1^{(2)}-E_{-1}'=2^0HR m^{(2)}-\overline{l}_2^{(2)}]\times \tag{15}$$

$$\times(2n-1)\overline{a}_{2n-1}^{(2)}-\overline{b}_{2n+1}^{(2)}-E_{2n+1}'=-2^0HR\frac{m_{2n}^{(2)}+l_{2n}^{(2)}}{2n+1};$$

$$ka_{2n+1}^{(2)}-E_{-(2n+1)}'=-2^0HR\left[\frac{l_{2n+2}^{(2)}-m_{2n+2}^{(2)}}{2n+1}+2^0H\lambda_{-(2n+1)}\right].$$

Из формул (14), учитывая соотношения (11), найдем:

$$a_{2n}^{(2)}=b_{2n}^{(2)}=0;\quad a_{2n-1}^{(2)}=\overline{a}_{2n-1}^{(2)};\quad b_{2n-1}^{(2)}=\overline{b}_{2n-1}^{(2)}. \tag{16}$$

Исключая в формулах (14)—(15) неизвестные правые части, получим систему уравнений для определения коэффициентов функций, из которой находим:

$$\varphi_{(Z)}^{(2)}=\Gamma^{(2)}_Z+a_1^{(2)}\frac{R^2}{Z}+a_3^{(2)}\frac{R^4}{Z^3};\quad \psi^{(2)}(z)=\Gamma'^{(2)}_Z+b_1^{(2)}\frac{R^2}{Z}+$$

$$+b_3^{(2)}\frac{R^4}{Z^3}+b_5^{(2)}\frac{R^6}{Z^5}, \tag{17}$$

где:

$$a_1^{(2)}=\frac{1}{L}\Big\{4^0H^2R^4(B_{-1}'-\Gamma'^{(2)})+12\,g_1g_2(\Gamma'^{(2)}+E_{-1}')+$$

$$+3^0HR(3g_2-R^2g_1)\left(\frac{2}{3}\Gamma'^{(2)}+B'_3+E'_3\right)+$$

$$+{}^0HR\,[3B'_{-1}(R^2g_1+g_2)+E'_{-1}(9g_2+R^2g_1)]\};$$

$$a_3^{(2)}=\frac{1}{L_1}\Big\{3\,[80\,g_1g_2+{}^0HR\,(25\,g_2+R^2g_1)]\,E'_{-3}+$$

$$+{}^0HR\,[5\,(9\,g_2+R^2g_1)+4{}^0HR^3]\,B'_{-3}-$$

$$-5{}^0HR\,(R^2g_1-15\,g_2)\,(B'_5+E'_5)\};$$

$$b_1^{(2)}=\frac{1}{2{}^0HR^3+R^2g_1+g_2}\Big\{2{}^0HR^3\,(B'_1-2\Gamma^{(2)})+$$

$$+(R^2g_1+g_2)\,[(k-1)\,\Gamma^{(2)}-E'_1]\};$$

$$b_3^{(2)}=\frac{1}{L}\Big\{12\,g_1g_2\,[\Gamma'^{(2)}+E'_{-1}-kE'_3]+$$

$$+4{}^0H^2R^4\,(B'_{-1}+B'_3-\Gamma'^{(2)})+{}^0HR\,[(3\,g_2-R^2g_1)\,(kB'_{-1}+3\,B'_{-3})+$$

$$+3\,B'_{-1}(R^2g_1+g_2)+kB'_{-3}(9g_2+R^2g_1)+ \tag{18}$$

$$+2E'_{-1}\,(3\,g_2-R^2g_1)-$$

$$-(R^2g_1-g_2)\,[6\,E'_3-(k-1)\,\Gamma'^{(2)}]\};$$

$$b_5^{(2)}=\frac{1}{L_1}\Big\{4{}^0H^2R^4\,(3\,B'_3+B'_5)+15{}^0HRg_2\,(3+k)\,(3\,B'_3+5\,B'_5)+$$

$$+3{}^0HR^3g_1\,(5-k)\,(B'_{-3}-B'_5)-20\,E'_5\times$$

$$\times[12\,k\,g_1g_2+{}^0HR\,(R^2g_1-g_2)]\};$$

$$L=4{}^0H^2R^4+12\,kg_1g_2+{}^0HR^3\,(k+3)\,g_1+3{}^0HR\,(3k+1)\,g_2;$$

$$L_1=4{}^0H^2R^4+240\,kg_1g_2+{}^0HR^3\,(3k+5)\,g_1+15{}^0HR\,(5k+3)\,g_2;$$

$$B'_5=\gamma\,[(2\,a_1^{(1)}-3\,b_3^{(1)})\,(ka_1^{(1)}-\Gamma'^{(1)})+\delta a_1^{(1)}\,(b_3^{(1)}-a_1^{(1)})]-k_3\,a_1^{(1)2};$$

$$B'_3=\gamma\,\{b_1^{(1)}\,(\Gamma'^{(1)}-ka_1^{(1)})-(2a_1^{(1)}-\delta\,a_1^{(1)}-3b_3^{(1)})\,[\Gamma^{(1)}(1-k)+b_1^{(1)}]+$$

$$+\Gamma^{(1)}\,(1+\delta)\,(a_1^{(1)}-b_3^{(1)})\}-2\,k_3a_1^{(1)}\Gamma^{(1)};$$

$$B'_1=\gamma\,\{(ka_1^{(1)}-\Gamma'^{(1)})\,(\Gamma^{(1)}-\delta a_1^{(1)})+[\Gamma^{(1)}(k-1)-$$

$$-b_1^{(1)}][\Gamma^{(1)}(1+\delta)-b_1^{(1)}]+(a_1^{(1)}-3\,b_3^{(1)})(a_1^{(1)}-b_3^{(1)})\}-k_3\Gamma^{(1)2};$$

$$B'_{-1}=\gamma\,\{(\Gamma'^{(1)}-a_1^{(1)})[\Gamma^{(1)}(k-1)-b_1^{(1)}]-b_1^{(1)}\,(a_1^{(1)}-b_3^{(1)})+$$

$$+\Gamma^{(1)}\,(ka_1^{(1)}-\Gamma'^{(1)})\,(1+\delta)\};$$

$$B'_{-3}=\gamma\,[\Gamma'^{(1)}(a_1^{(1)}-b_3^{(1)})-a_1^{(1)}\,(ka_1^{(1)}-\Gamma^{(1)})];$$

$$E'_5=\gamma\,[(2a_1^{(1)}-3b_3^{(1)})\,(\Gamma'^{(1)}-ka_1^{(1)})-\delta a_1^{(1)}\,(b_3^{(1)}-a_1^{(1)})]-$$

$$-k'_3\,a_1^{(1)2}+\frac{3}{5}\,k'_1\,a_1^{(1)}\,b_3^{(1)};$$

$$E'_3=\gamma\,\{b_1^{(1)}\,(ka_1^{(1)}-\Gamma^{(1)})-(2\,a_1^{(1)}-\delta\,a_1^{(1)}-3\,b_3^{(1)})\,[\Gamma'^{(1)}(k-1)-$$

$$-b_1^{(1)}]+\Gamma^{(1)}\,(k-\delta)\,(a_1^{(1)}-b_3^{(1)})\}+2\,k'_3\,a_1^{(1)}\Gamma^{(1)}-\frac{1}{3}\,k'_1\,(3\Gamma^{(1)}\,b_3^{(1)}-a_1^{(1)}\,b_1^{(1)});$$

$$E'_1 = \gamma \{ (ka_1^{(1)} - \Gamma'^{(1)})(\delta a_1^{(1)} - \Gamma'^{(1)}) + [\Gamma^{(1)}(k-1) - b_1^{(1)}][\Gamma^{(1)}(k-\delta) + b_1^{(1)}] -$$
$$- (2a_1^{(1)} - 3b_3^{(1)} - ka_1^{(1)})(a_1^{(1)} - b_3^{(1)})\} - \Gamma^{(1)2}(k'_3 + k'_2) - k'_1(\Gamma^{(1)} b_1^{(1)} + \Gamma'^{(1)} a_1^{(1)});$$
$$E'_{-1} = \gamma \{ (\Gamma'^{(1)} + ka_1^{(1)})[(1-k)\Gamma^{(1)} + b_1^{(1)}] + \Gamma^{(1)}(k-\delta)(ka_1^{(1)} - \Gamma'^{(1)}) +$$
$$+ b_1^{(1)}(a_1^{(1)} - b_3^{(1)})\} - k'_1 \Gamma^{(1)} \Gamma'^{(1)} - 2k'_2 a_1^{(1)} \Gamma^{(1)};$$
$$E'_{-3} = \gamma [\Gamma'^{(1)}(b_3^{(1)} - a_1^{(1)}) - ka_1^{(1)}(ka_1^{(1)} - \Gamma'^{(1)})] + \frac{k'_2}{3} a_1^{(1)2}.$$

Для тонких колец можно пренебречь влиянием жесткости на изгиб ($g_2 = 0$) [4], [3].

Зная потенциалы первого и второго порядков, можно определить напряжения по формулам, приведенным в работе [7].

Следует заметить, что в выражения коэффициентов функций входят три новые упругие постоянные:

$$c_2 = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial J_1\,\partial J_2}\right]_0; \quad c_3 = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{\partial w}{\partial J_3}\right]_0; \quad c_4 = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial J_1^3}\right]_0,$$

где w — функция удельной энергии деформации для изотропного материала; J_1, J_2, J_3 — инварианты деформаций.

Эти постоянные должны быть определены для соответствующих материалов экспериментальным путем.

При решении задачи в случае, когда отверстие имеет произвольную форму, для определения потенциалов первого и второго порядков можно воспользоваться методом малого параметра [5].

Отобразим нашу область на плоскость (ζ) с круговым отверстием с помощью функции $Z = \omega(\zeta, m)$, где $\omega(\zeta, m)$ — любая рациональная функция, аналитически зависящая от малого параметра m. Так как функции $\varphi^{(1)}[\omega(\zeta, m)]$, $\psi^{(1)}[\omega(\zeta, m)]$ также зависят от этого параметра, то будем искать их в таком виде:

$$\varphi_1^{(1)}(\zeta, m) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n \varphi_n^{(1)}(\zeta); \quad \psi_1^{(1)}(\zeta, m) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n \psi_n^{(1)}(\zeta), \tag{19}$$

где $\varphi_n^{(1)}(\zeta)$, $\psi_n^{(1)}(\zeta)$ — функции, аналитические в области, включая границу.

Подставляя формулы (19) в граничные условия и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях m, а затем σ, и исключая неизвестные правые части, получаем бесконечные системы уравнений относительно коэффициентов функций $\varphi_n^{(1)}(\zeta)$, $\psi_n^{(1)}(\zeta)$.

Нетрудно убедиться в том, что каждая из этих бесконечных систем в свою очередь разделяется на $n + 1$ систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которых легко определяются искомые коэффициенты. Таким образом, функции $\varphi_n^{(1)}(\zeta)$, $\psi_n^{(1)}(\zeta)$ выражаются в замкнутом виде (при конечном n).

Ограничиваясь, например, $n = 2$, определим потенциалы первого порядка, а затем таким же образом функции $\varphi^{(2)}(\zeta)$, $\psi^{(2)}(\zeta)$.

Для того, чтобы определить влияние кольца, нужно предварительно найти напряжения на контуре свободного отверстия. Потенциалы второго порядка в данном случае находятся по формулам (17), (18), если положить:

$$g_1 = g_2 = 0.$$

При одноосном растяжении ($q=0$) напряжение $\widehat{\vartheta\vartheta}_c$ на контуре равно:[1]

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}} = P\left\{1 - 2\cos 2\vartheta + \frac{P\gamma}{4({}^0H)}\left[3 - k\delta - 4\cos 2\vartheta + 4\cos 4\vartheta\right]\right\}; \tag{20}$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{II}} = P\left\{1 - 2\cos 2\vartheta + \frac{P\left(\gamma - \frac{k+1}{2}\right)}{4({}^0H)}\left[\frac{\gamma(3-k\delta)}{\gamma - \frac{k+1}{2}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 4\cos 2\vartheta + 4\cos 4\vartheta\right]\right\},$$

где $\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{II}}$ — напряжения на контуре при решении задачи в случаях, когда граница задана в деформированном или недеформированном теле соответственно. Если материал пластинки несжимаем (коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}5$), то получим:[2] $\gamma = \frac{5c'_1 + c'_2}{8(c'_1 + c'_2)}$; $\delta = \frac{3c_1 + 7c'_2}{5(5c'_1 + c'_2)}$, где c'_1 и c'_2 — упругие постоянные, входящие в функцию w (форма Муни):

$$w = c'_1(1-3) + c'_2(2_2-3) \tag{21}$$

и

$${}^0H = 2h_0\mu = 4h_0(c'_1 + c'_2).$$

Определим теперь компоненты напряжения на контуре отверстия, подкрепленного кольцом прямоугольного поперечного сечения $2b \times 2h_1$, в случае, когда материал пластинки несжимаем, при $q=0$.

Полагая, что

$$\frac{E_1 h_1 b}{E h_0 R} = 1 \quad \text{и} \quad g_2 = 0, \tag{22}$$

получим $\varphi_{(Z)}^{(1)}$ и $\psi_{(Z)}^{(1)}$ в таком виде [3]:

$$\varphi_{(Z)}^{(1)} = \frac{PR}{4}\left(Z + \frac{1}{Z}\right); \quad \psi_{(Z)}^{(1)} = -\frac{PR}{2}Z. \tag{23}$$

Определяя теперь потенциалы второго порядка по формулам (17), (18), найдем напряжения на контуре пластинки при $c'_2/c'_1 = 0{,}14$. При растяжении ($P > 0$) максимальные напряжения $\widehat{\vartheta\vartheta}^{\mathrm{I}}$ достигаются при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

для свободного отверстия:

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}} = 3P\left(1 + 0{,}504\frac{P}{{}^0H}\right); \qquad (P > 0)$$

для подкрепленного отверстия:

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{I}} = P\left(1 + 0{,}726\frac{P}{{}^0H}\right). \qquad (P > 0)$$

---

[1] Для пластинки толщиной $2h_0$ параметр ε выберем таким образом, чтобы $2\,{}^0H\varepsilon = 1$ *кг/см* (${}^0H = 2h_0\mu$, где μ — модуль сдвига в линейной теории).

[2] $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ (обобщенное плоско-напряженное состояние).

Для наглядности на рисунке приведены напряжения $\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$, $\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$ на контуре при $\frac{P}{{}^0H} = 0{,}8$.

Результаты подсчетов напряжений $\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{I}}$, $\widehat{rr}_n^{\mathrm{I}}$ в случае сжатия $P < 0$) при $\alpha_1 = \frac{P}{{}^0H}$ приведены в таблице 1.

Максимальные напряжения $\widehat{\vartheta\vartheta}^{\mathrm{II}}$ в случае сжатия ($P < 0$) достигаются при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и равны:

для свободного отверстия:

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{II}} = 3P\left(1 - 0{,}394\,\frac{P}{{}^0H}\right); \quad (P<0)$$

для подкрепленного отверстия:

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{II}} = P\left(1 - 0{,}066\,\frac{P}{{}^0H}\right). \quad (P<0)$$

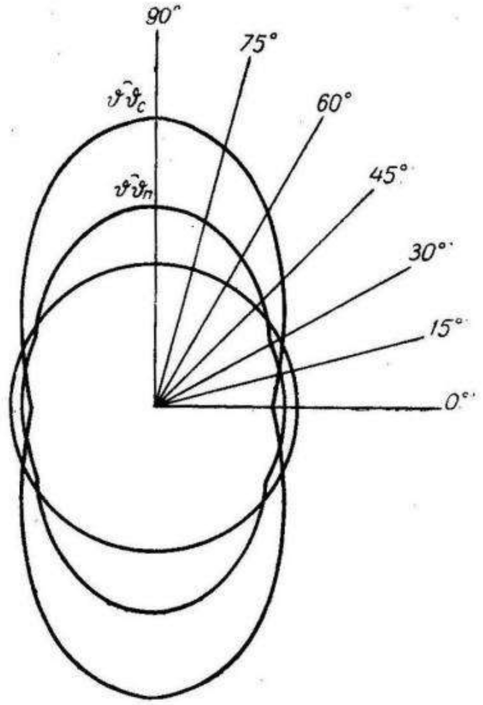


Рис. 1.

Таблица 1

ϑ \ α_1	−0,4			−0,6			−0,8		
	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{I}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{1}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{rr}_n}{{}^0H}$
0°	0,461	−0,024	0,032	0,737	−0,036	0,072	1,04	−0,048	0,108
45°	−0,429	−0,245	−0,202	−0,665	−0,4	−0,304	−0,915	−0,539	−0,406
90°	−0,96	−0,278	−0,406	−1,26	−0,319	−0,614	−1,44	−0,304	−0,826

Таблица 2

ϑ \ α_1	0,4			0,6			0,8		
	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{rr}^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$	$\frac{\widehat{rr}^{\mathrm{II}}}{{}^0H}$
0°	−0,34	−0,096	0,117	−0,465	−0,216	0,263	−0,[illegible]68	−0,384	0,467
45°	0,584	0,239	0,32	1,014	0,388	0,588	1,54	0,557	0,912
90°	1,01	0,39	0,33	1,37	0,575	0,442	1,63	0,755	0,518

Данные подсчета $\widehat{\vartheta\vartheta}_c^{\mathrm{II}}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}_n^{\mathrm{II}}$, $\widehat{rr}_n^{\mathrm{II}}$ при растяжении приведены в таблице 2.

На основании приведенных выше формул, а также таблиц 1 и 2 можно сделать вывод: подкрепляющее кольцо значительно снижает концентрацию напряжений на контуре отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. О малых деформациях криволинейных стержней. Труды Ленинградского политехнического ин-та, № 3, 1941.
2. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
3. Флейшман Н. П. Замечания к одной статье М. П. Шереметьева. Доповіді та повідомлення Львівського державного ун-ту, вип. 7, част. III, 1957.
4. Шереметьев М. П. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инженерный сборник, т. XIV, 1953.
5. Койфман Ю. І. Про один спосіб розв'язування задач для безмежної пластинки з отвором, край якого підкріплений тонким кільцем. Студентський збірник, част. II, Вид. Львівського ун-ту, 1960.
6. Adkins J. E., Green A. E., Nicholas G. G. Two-dimensional theory of elasticity for finite deformations. Philosophical Transactions, A. 247, 1954.
7. Adkins J. E., Green A. E. Plane problems in second-order elasticity theory. Proceedings of Royal Society, ser. A., N 1219, vol. 239, 1957.

В. О. ЛИХАЧОВ

ДЕЯКІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Рівняння Ляме в циліндричних координатах при відсутності об'ємних сил можна записати, як відомо, таким чином:

$$\frac{\partial У}{\partial \zeta} - \frac{\partial R_c Z}{\partial \theta} = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} x \frac{\partial R_c \Theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial R_c X}{\partial \theta} - \frac{\partial У}{\partial x} = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} x \frac{\partial R_c \Theta}{\partial \zeta}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{6\zeta} = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \frac{1}{x} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial (x R_c X)}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial У}{\partial \theta} + x \frac{\partial R_c Z}{\partial \zeta} = 0,$$

де

$$\frac{\partial (x u_\theta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = x R_c X; \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (x u_\theta)}{\partial x} = x R_c Z; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} = \frac{1}{x} У; \quad \frac{1}{x} \frac{\partial (x u_r)}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = R\Theta;$$

ν — число Пуассона, $R_c \Theta$ — об'ємне розширення.

Відносно компонентів зміщення будемо вважати, що вони задовольняють одну з таких умов:

„А"

1) $u_z, \frac{\partial u_r}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_\Theta}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,

2) $u_r, u_\Theta, \frac{\partial u_z}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$.

„В"

1) $u_r, u_\Theta, \frac{\partial u_z}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,

2) $u_z, \frac{\partial u_r}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_\Theta}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$,

що відносно функцій $X(x,\zeta,\Theta)$, $У(x,\zeta,\Theta)$, $Z(x,\zeta,\Theta)$, $\Theta(x,\zeta,\Theta)$ значить:

1) X, $У$, $\frac{\partial Z}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,

2) Z, Θ, $\frac{\partial X}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial У}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$

при виконанні умови «А»,

1) Z, Θ, $\frac{\partial X}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial У}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,

2) $X, У, \frac{\partial Z}{\partial \zeta}, \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$,

якщо виконується умова «В».

Виконання умови «А» відповідає парним відносно ζ компонентам напруги $\widehat{rr}, \widehat{zz}, \widehat{\Theta\Theta}, \widehat{r\Theta}$, і непарним іншим. Виконання умови «В» — непарним компонентам $\widehat{rr}, \widehat{zz}, \widehat{\Theta\Theta}, \widehat{r\Theta}$ і парним іншим. У випадку задачі, симетричної відносно осі,— відповідно симетричному і кососиметричному навантаженню бічної поверхні.

Будемо надалі вважати, що виконується умова «А». З системи (1) видно, що її розв'язок можна виразити через дві гармонічні функції $\varphi_1(x,\zeta,\Theta)$ и $\varphi_2(x,\zeta,\Theta)$. Якщо прийняти $\Theta(x,\zeta,\Theta) = \varphi_1(x,\zeta,\Theta)$, $Z(x,\zeta,\Theta) = \varphi_2(x,\zeta,\Theta)$, то

$$У(x, \zeta, \Theta) = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} x \frac{\partial \varphi^x_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^x_2}{\partial \Theta}; \quad X(x, \zeta, \Theta) = -\frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi^x_1}{\partial \Theta} + \frac{\partial \varphi^x_2}{\partial x},$$

де

$$\varphi_1^x(x, \zeta, \Theta) = \int_0^\zeta \varphi_1(x, z, \Theta)\, dz, \quad \varphi_2^x(x, \zeta, \Theta) = \int_0^\zeta \varphi_2(x, z, \Theta)\, dz.$$

З системи (2) виходить, що її розв'язок можна виразити через три гармонічні функції $\varphi_1(x,\zeta,\Theta)$, $\varphi_2(x,\zeta,\Theta)$, $\varphi_3(x,\zeta,\Theta)$, якщо припустити, що $u_z(x,\zeta,\Theta) = u_z^{(1)}(x,\zeta,\Theta) + u_z^{(2)}(x,\zeta,\Theta)$, $u_z^{(1)} = \varphi_3(x,\zeta,\Theta)$, де $u_z^{(1)}(x, \zeta, \Theta)$ — загальний розв'язок однорідного, а $u_z^{(2)}(x,\zeta,\Theta)$ — частковий розв'язок рівняння $\Delta u_z(x,\zeta,\Theta) = -\frac{\nu}{\nu-2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}$. Таким чином, розв'язок системи рівнянь Ляме виражається через три гармонічні функції і вид цього рішення буде залежати від вибору гармонічних функцій.

Для задачі, симетричної відносно осі, системи (1), (2) значно спрощуються і розв'язок рівнянь Ляме виражається через дві гармонічні функції $\psi_1(x,\zeta)$, $\psi_2(x,\zeta)$.

Наведемо деякі розв'язки системи рівнянь Ляме тільки для випадку задачі, симетричної відносно осі, і суцільної області, що пояснюється браком місця.

а) $$\psi_i(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} a_i(p) I_0(px) \frac{\cos p\zeta}{\sin p\zeta};$$

$$\Theta(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} a_1(p) I_0(px) \cos p\zeta;$$

$$u_z(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[a_2(p) I_0(px) + \frac{\nu}{2(\nu-2)} a_1(p) x I_1(px) \right] \sin p\zeta;$$

$$u_r(x, \zeta) = -\sum_{p=1}^{\infty} \left[a_2(p) I_1(px) + \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \left(\frac{\nu}{4(\nu-1)} x I_0(px) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{p} I_0(px) \right) a_1(p) \right] \cos p\zeta.$$

б) $\psi_i(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} b_i(p)\, Y_0(px) \mathop{\mathrm{ch}}_{\mathrm{sh}\,p\zeta} p\zeta;$

$$\Theta(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} b_1(p)\, Y_0(px)\,\mathrm{ch}\, p\zeta;$$

$$u_z(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left[b_2(p)\, Y_0(px) - \frac{\nu}{2(\nu-2)}\, b_1(p)\, x\, Y_1(px)\right]\mathrm{sh}\, p\zeta;$$

$$u_r(x,\zeta) = -\sum_{p=1}^{\infty}\Big[\, b_2(p)\, Y_1(px) + \frac{2(\nu-1)}{\nu-2}\left(\frac{\nu}{4(\nu-1)}\, x\, Y_0(px) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{p}\, Y_1(px)\right) b_1(p)\Big]\,\mathrm{ch}\, p\zeta.$$

в) $\psi_1(p,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[x^{2n} + (-1)^m \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m)!}\, x^{2n-2m}\zeta^{2m}\right];$

$$\psi_2(x,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[x^{2n}\zeta + (-1)^m \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m+1)!}\, x^{2n-2m}\zeta^{2m+1}\right];$$

$$\Theta(x,\zeta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{2n}\left[x^{2n} + (-1)^m \frac{(2n)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m)!}\, x^{2n-2m}\zeta^{2m}\right];$$

$$u_z(x,\zeta) = \beta_1\zeta + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\beta_{2n} - \frac{\nu}{\nu-2}\alpha_{2n}\right] x^{2n}\zeta + \right.$$

$$+ (-1)^m \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m+1)!}\Big[\beta_{2n} -$$

$$\left. - \frac{(m+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2n}\Big]\, x^{2n-2m}\zeta^{2m+1}\right\};$$

$$u_r(x,\zeta) = \frac{\alpha_0-\beta_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m-1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n+2}\left[\frac{2(\nu-1)}{\nu-2}\alpha_{2n} - \right.\right.$$

$$\left. - \beta_{2n}\right] x^{2n+1} + n\left[\beta_{2n} - \frac{3\nu-2}{\nu-2}\alpha_{2n}\right] x^{2n-1}\zeta^2 +$$

$$+ (-1)^m \frac{(2n)^2(\ldots(2n-2m+2)^2(2n-2m)}{(2m+2)!}\Big[\beta_{2n} -$$

$$\left. - \frac{(m+3)\nu-2}{\nu-2}\alpha_{2n}\Big]\, x^{2n-2m-1}\zeta^{2m+2}\right\}.$$

Звідки, беручи до уваги відомі співвідношення, можна записати:

$$\frac{Rl}{2\mu}\,\overline{rr} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\zeta^{2k} = c_0 + c_2\zeta^2 + c_4\zeta^4 + c_6\zeta^6 + \ldots, \qquad (3)$$

$$\frac{R_l}{\mu}\widehat{rz}=\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\zeta^{2k+1}=b_1\zeta+b_3\zeta^3+b_5\zeta^5+b_7\zeta^7+\ldots$$

для $x=1$,

$$\frac{R_l}{2\mu}\widehat{zz}=\sum_{k=0}^{\infty} d_{2k}x^{2k}=d_0+d_2x^2+d_4x^4+d_6x^6+\ldots, \tag{4}$$

$$\frac{Rl}{\mu}\widehat{zr}=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\,x^{2k+1}=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+\ldots$$

для $\zeta=l$, де

$$c_0=\frac{\nu}{2(\nu-2)}\alpha_0-\frac{1}{2}\beta_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(2n+1)(\nu-1)+2n+2}{(2n+2)(\nu-2)}\alpha_{2n-1}-\frac{2n+1}{2n+2}\beta_{2n-1}\right];$$

$$c_2=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+n(2n-1)(3\nu-2)}{\nu-2}\alpha_{2n-1}-n(2n-1)\beta_{2n-1}\right]; \tag{5}$$

$$c_{2k}=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2k-2)^2\ldots(2n)}{(2k)!}\left[\frac{2n+(2n-1)[(k+2)\nu-2]}{\nu-2}\alpha_{2n+2k-3}-\right.$$

$$\left.-(2n-1)\beta_{2n+2k-3}\right]$$

$$(k=2,3,4\ldots);$$

$$b_1=-4\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n-1}-\beta_{2n-1}\right);$$

$$b_{2k+1}=2(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2k)^2\ldots 2n}{(2k+1)!}\left[\frac{(2k-1)\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n+2k-1}-\beta_{2n+2k-1}\right]$$

$$(k=1,2,3\ldots);$$

$$d_0=\beta_0+\frac{1}{\nu-2}\alpha_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n^2(2n-2)^2\ldots 4}{(2n)!}\left[\frac{1-(n+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2n-1}+\beta_{2n-1}\right]l^{2n}; \tag{6}$$

$$d_{2k}=\frac{1-\nu}{\nu-2}\alpha_{2k-1}+\beta_{2k-1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)^2\ldots 4^2}{(2n)!}\cdot\left[\frac{1-(n+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2n+2k-1}+\beta_{2n+2k-1}\right]l^{2n}$$

$$(k=1,2,3\ldots);$$

$$a_1 = -4\left(\frac{2\nu-1}{\nu-2}\alpha_1 - \beta_1\right)l +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 4\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)!}\left[\frac{(n+2)\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n+1} - \beta_{2n+1}\right]l^{2n+1};$$

$$a_{2k+1} = -4(k+1)\left(\frac{2\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2k+1} - \beta_{2k+1}\right)l +$$

$$+4(k+1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+2k+2)}{(2n+1)!}\left[\frac{(n+2)\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n+2k+1} - \beta_{2n+2k+1}\right]l^{2n+1}$$

$$(k = 1, 2, 3\ldots).$$

г) $$\psi_1(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[c_1(p)\, ber\, p_1 x - d_1(p)\, bei\, p_1 x\right]\cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta +\right.$$

$$\left.+\left[c_1(p)\, bei\, p_1 x + d_1(p)\, ber\, p_1 x\right]\sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta\right\};$$

$$\psi_2(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[c_2(p)(ber\, p_1 x - bei\, p_1 x) -\right.\right.$$

$$\left.- d_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x)\right]\cos p\zeta \operatorname{sh} p\zeta + \left[c_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x) +\right.$$

$$\left.\left.+ d_2(p)(ber\, p_1 x - bei\, p_1 x)\right]\sin p\zeta \operatorname{ch} p\zeta\right\},$$

де $p_1 = \sqrt{2}p$, blr і bli — функції Кельвіна, які вводяться співвідношенням

$$I_0(\sqrt{i}x) = ber\, x + i\, bei x.$$

$$\Theta(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{c_1(p)[ber\, p_1 x\cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta + bei\, p_1 x \sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta] +\right.$$

$$\left.+ d_1(p)[ber\, p_1 x \sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta - bei\, p_1 x\cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta]\right\};$$

$$u_z(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[c_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x) + d_2(p)(ber\, p_1 x -\right.\right.$$

$$- bei\, p_1 x)]\sin p\zeta \operatorname{ch} p\zeta + [c_2(p)(ber\, p_1 x - bei\, p_1 x) -$$

$$- d_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x)]\cos p\zeta \operatorname{sh} p\zeta -$$

$$-\frac{1}{2(\nu-2)}x\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[d_1(p)(be'i\, p_1 x - be'r\, p_1 x) + c_1(p)(be'i\, p_1 x +\right.\right.$$

$$+ be'i\, p_1 x)] \sin p\zeta \operatorname{ch} p\zeta + [d_1(p)(be'r\, p_1 x + be'i\, p_1 x) +$$

$$+ c_1(p)(be'r\, p_1 x - be'i\, p_1 x)] \sqrt{2} \cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta\};$$

$$u_r(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} \Big\{ \Big[\sqrt{2}\, c_2(p)\, be'r\, p_1 x - \sqrt{2}\, d_2(p)\, be'i\, p_1 x +$$

$$+ \frac{c_1}{\nu - 2} \Big(x\, bei\, p_1 x + \frac{2(\nu - 1)}{p} be'r\, p_1 x \Big) -$$

$$- \frac{d_1}{\nu - 2} \Big(\frac{px}{2} bei\, p_1 x + \frac{2(\nu - 1)}{p} be'i\, p_1 x \Big) \Big] \sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta +$$

$$+ \Big[\frac{d_1(p)}{\nu - 2} \Big(\frac{px}{2} ber\, p_1 x - \frac{2(\nu - 1)}{p} be'r\, p_1 x \Big) - \sqrt{2}\, c_2(p\ be'i\, p_1 x -$$

$$- \sqrt{2}\, d_2(p)\, be'r\, p_1 x + \frac{c_1(p)}{\nu - 2} \Big(x\, ber\, p_1 x -$$

$$- \frac{2(\nu - 1)}{p} be'i\, p_1 x \Big) \Big] \cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta.$$

Розглянемо, як приклад застосування розв'язків «*а*» і «*в*», задачу про напружений стан циліндра довжини $2l \Big(l = \frac{L}{R_l} = 0{,}1\,\pi \Big)$, який навантажений по ділянці бічної поверхні ($2b = 0{,}2$) зусиллями

$$\frac{R_l}{2\mu} \widehat{rr}(1, \zeta) = f_1(\zeta), \quad \frac{R_l}{\mu} \widehat{rz}(1, \zeta) = f_2(\zeta). \tag{7}$$

$-b \leqslant \zeta \leqslant b$, $f_1(\zeta), f_2(\zeta)$ задовольняють умови Діріхле.

Торці циліндра припускаємо вільними від зовнішніх зусиль, тобто

$$\frac{R_l}{2\mu} \widehat{zz}(x, l) = 0, \quad \frac{R_l}{\mu} \widehat{zr}(x, l) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{8}$$

Початок системи координат поміщаємо в точці перетину площини $\zeta = 0$ з віссю циліндра. Вісь oz направимо по осі циліндра. Задачу розглядаємо як симетричну відносно площини $\zeta = 0$ і для її розв'язку застосуємо суму розв'язків «*а*» і «*в*». Умова відсутності дотичних зусиль $\widehat{zr}(x, l)$ на торцях циліндра (7) виконується, якщо припустити, що

$$\beta_{2n-1} = \frac{2\nu - 1}{\nu - 2} \alpha_{2n-1} - \frac{a_{n,1}}{4n} \cdot \frac{\nu}{\nu - 2} \alpha_{2n+1} - \Big(\frac{2a_{n,2}}{4n} +$$

$$\frac{a_{n,1}}{4n} \cdot \frac{a_{n+1,1}}{4(n+1)} \Big) \frac{\nu}{\nu - 2} \alpha_{2n+3} - \frac{\nu}{\nu - 2} \sum_{i,j} \frac{1}{4(i + n - 1)} \Big\{ (i + 2)\, a_{i+n-1, j+2} +$$

$$+ a_{i+n-1, j+1} \cdot \frac{a_{i+j+n,1}}{4(i + j + n)} + a_{i+n-1, j} \Big[\frac{2\, a_{n+i+j-2, 2}}{4(n + i + j - 1)} +$$

$$+ \frac{a_{i+n+j-1,1}}{4(i + n + j - 1)} \cdot \frac{a_{i+n+j-n,1}}{4(i + j + n)} \Big] \Big\} p_i\, \alpha_{2(i+j+n-1)+3}, \tag{9}$$

де

$$a_{i,j} = 2(-1)^{i+j} \frac{(2i + 2)^2 (2i + 4)^2 \ldots (2i + 2j)^2\, 2i}{(2j + 1)!} e^{2j}, \tag{10}$$

$$p_1 = 1, \quad p_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{k,\,i-k}}{4k} p_k$$

$$(i = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Щоб отримати вираз для коефіцієнта α_{2m-1}, треба індексу «i» надавати значення $i = 1,2,3...$ Значення для «j» отримаємо з рівняння $j = m - i - 2$. Але завжди $i + j = m + 2$.

Наприклад,

$$\beta_1 = \frac{2\nu - 1}{\nu - 2}\alpha_1 - 2{,}66667\frac{\nu}{\nu - 2}l^2\alpha_3 - 6{,}4\frac{\nu}{\nu - 2}l^4\alpha_5 - 39{,}0095\frac{\nu}{\nu - 2}l^6\alpha_7 -$$

$$- 471{,}365\frac{\nu}{\nu - 2}l^8\alpha_9 - 5700{,}01\frac{\nu}{\nu - 2}l^{10}\alpha_9 - 112809\frac{\nu}{\nu - 2}l^{12}\alpha_{13} -$$

$$- 292274 \cdot 10\frac{\nu}{\nu - 2}l^{14}\alpha_{15} - 959614 \cdot 10^2\frac{\nu}{\nu - 2}l^{16}\alpha_{17} - \ldots,$$

$$\beta_3 = \frac{2\nu - 1}{\nu - 2}\alpha_3 - 6\frac{\nu}{\nu - 2}l^2\alpha_5\, 25{,}6\frac{\nu}{\nu - 2}l^4\alpha_7 - 243{,}810\frac{\nu}{\nu - 2}l^6\alpha_9 -$$

$$- 269{,}778\frac{\nu}{\nu - 2}l^8\alpha_{11} - 11712{,}3\frac{\nu}{\nu - 2}l^{10}\alpha_{13} - 193382\frac{\nu}{\nu - 2}l^{12}\alpha_{15} -$$

$$- 478081 \cdot 10\frac{\nu}{\nu - 2}l^{14}\alpha_{17} - \ldots,$$

$$\beta_5 = \frac{2\nu - 1}{\nu - 2}\alpha_5 - 10{,}6667\frac{\nu}{\nu - 2}l^2\alpha_7 - 71{,}1111\frac{\nu}{\nu - 2}l^4\alpha_9 - 975{,}238\frac{\nu}{\nu - 2}l^6\alpha_{11} +$$

$$+ 4778{,}64\frac{\nu}{\nu - 2}l^8\alpha_{13} - 36205{,}6\frac{\nu}{\nu - 2}l^{10}\alpha_{15} - 207646\frac{\nu}{\nu - 2}l^{12}\alpha_{17} - \ldots,$$

$$a_{11} = 10{,}6667\, l^2,\ a_{12} = -19{,}2\, l^4,\ a_{13} = 29{,}2571\, l^6,$$

$$a_{14} = -40{,}6349\, l^8,\ a_{15} = 53{,}1948\, l^{10},\ a_{16} = -66{,}8345\, l^{12}...,$$

$$a_{21} = 48\, l^2,\ a_{22} = -153{,}6\, l^4,\ a_{23} = 365{,}714\, l^6,$$

$$a_{24} = -712\, l^8,\ a_{25} = 1303{,}27\, l^{10},\ a_{26} = -2138{,}70\, l^{12}...$$

Вирази для β_{2n-1}, $a_{ij}\ (n,i,j = 1,2,3...)$ обчислюються раз назавжди.

Виконання крайових умов на бічній поверхні циліндра приводить до визначення $a_1(p)$, $a_2(p)$ з таких систем:

$$\left[\frac{3\nu - 2}{2(\nu - 2)}I_0(p_1) - \frac{2(\nu - 1)}{\nu - 2}\frac{1}{p_1}I_1(p_1) - \frac{\nu}{2(\nu - 2)}p_1 I_1(p_1)\right]a_1(p) -$$

$$- \left[p_1 I_0(p_1) - I_1(p_1)\right]a_2(p) = (-1)^{p+r}\frac{2}{10^{2r}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m+2r-2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2m-1}\frac{(2m + 2r - 2)!}{(2m - 1)!} \cdot \frac{1}{p^{2r}} + \frac{2}{l}\int_0^l f_1(\zeta)\cos p,\zeta\, d\zeta;$$

$$\frac{\nu}{\nu - 2}\left[p_1 I_0(p_1) - \frac{2(\nu - 1)}{\nu}I_1(p_1)\right]a_1(p) + 2p_1 I_1(p_1)\, a_2(p) =$$

$$= (-1)^{p+r}\frac{2}{10^{2r-1}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m+2r-3}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2m-2}\frac{(2m + 2r - 1)!}{(2m - 1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{p^{2r-2}} + \frac{2}{l}\int_0^l f_2(\zeta)\sin p_1\zeta\, d\zeta;$$

$$c_0 + \sum_{m=1} \frac{1}{2m+1}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2m+1} c_{2m} = \int_0^l f_1(\zeta)\, d\zeta$$

для будь-якого значення індекса $r = 1,2,3...$, де $p_1 = \frac{p\pi}{l} = 10p_3$, c_0, $c_2...$ $c_{2m+2r-2}$, b_1, $b_3... b_{2m+2r-2}$ виражаються через α_0, α_1, $\alpha_3 ... \alpha_{2n-1}$, як це випливає з виразів (5) і (8).

Задоволення умови відсутності нормальних зусиль $\widehat{zz}(x,l)$ на торцях циліндра зводиться до визначення сталих α_0, α_1, $\alpha_3 ... \alpha_{2n-1}$ з систем рівнянь, які можуть бути отримані з деяких умов. Наприклад, з умови мінімуму потенціальної енергії і застосування варіаційних методів [1], [2], [5], [6], [7], з умови співпадання значення нормальних зусиль $\widehat{zz}(x,l)$ з даними в певних точках радіуса [3], [4], з умови наближення епюри напруг до заданих, вимагаючи виконання скінченного числа інтегральних співвідношень (моменти різних порядків). Нарешті, умова $\widehat{zz}(x,l) = 0$ приводить до такої системи:

$$d_{2k+2} = -\frac{1}{(k+1)!\,(k+1)!} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (5p)^{2k+2} \left[\frac{(k+1)\nu + 1}{\nu - 2} a_1 + 10pa_2\right];$$

$$d_0 + \beta_0 + \frac{1}{\nu-2}\alpha_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{1}{\nu-2} a_1 + 10pa_2\right], \qquad (11)$$

де a_1, a_2 визначаються з системи (10),

$$d_{2k+2} = \frac{1-\nu}{\nu-2}\alpha_{2k+1} + \beta_{2k+1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m+2k+2)^2 ... (2k+4)^2}{(2m)!} \left[\frac{1-(m+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2m+2k+1} + \beta_{2m+2k+1}\right] l^{2m};$$

$$d_0 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m)^2 (2m-2)^2 ... 4}{(2m)!} \left[\frac{1-(m+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2m-1} + \beta_{2m-1}\right] l^{2m} \qquad (12)$$

і β_{2k+1}, $\beta_{2m+2k+1}$, β_{2m-1} виражаються через $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 ... \alpha_{2n-1}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бояршинов С. В. Расчет толстостенных полых цилиндров, находящихся под действием произвольной осесимметрической нагрузки. Сб. «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций». МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1953.

2. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. Н. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз, 1950

3. Сумцов В. С. Про напружений стан циліндра конечної довжини. ПМ, IV, 4, 1958.
4. Сумцов В. С. До питання про граничні умови на торцях пружного циліндра. Доповіді АН УРСР, № 5, 1957.
5. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, XV, 2, 1951.
6. Филоненко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. ПММ, XV, 5, 1951.
7. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые обобщенные задачи Ляме для упругого параллелепипеда. ПММ, XVII, 4, 1953.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

С. В. ДЕНИСКО

ПРО ДЕЯКІ СПЕЦІАЛЬНІ ЗАДАЧІ ЕКВІАРЕАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ПОВЕРХЕНЬ

Як відомо, еквіареальне відображення однієї поверхні на другу зберігає відношення площ областей поверхні, що відображають. Це відображення, якщо обидві поверхні віднесені до загальних координат, характеризується умовою

$$\Delta_1 = c^2\Delta_2,$$

де $c = \mathrm{const}$, а Δ_1 і Δ_2 — дискримінанти основних квадратичних форм даних поверхень. Якщо $c = 1$, то ми одержуємо частковий випадок, коли при відображенні зберігається площа всякої фігури. Таке відображення називається еквівалентним.

Розглянемо деякі спеціальні еквіареальні відображення.

I. Припустимо, що:

1) поверхня Φ_1 еквіареально відображена на поверхню Φ_2 і цим відображенням обидві поверхні віднесені до загальних координат u, v;

2) в координатах u, v метрична форма поверхні Φ_i[1] має вигляд

$$ds_i^2 = \underset{i}{E}du^2 + \underset{i}{G}dv^2;$$

3) лінії $u = \mathrm{const}$ на поверхні Φ_2 є геодезичні.

Тоді, якщо поверхня Φ_1 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \mathrm{const}$ перетворюються в паралелі (в цьому випадку $\underset{1}{E}$ і $\underset{1}{G}$ залежать тільки від u), то поверхня Φ_2 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \mathrm{const}$ переходять в меридіани.

Дійсно, згідно з умовами 1) і 2) маємо:

$$\underset{1}{E}\underset{1}{G} = c^2\underset{2}{E}\underset{2}{G},$$

де $c = \mathrm{const}$.

$\underset{1}{E}$ і $\underset{1}{G}$ залежать тільки від u, а тому з попередньої рівності випливає, що $\underset{2}{E}$ і $\underset{2}{G}$ можна записати в такій формі:

$$\underset{2}{E} = \frac{\varphi^2(u)}{\psi^2(v)}, \tag{1}$$

$$\underset{2}{G} = \psi^2(v)\gamma^2(u). \tag{2}$$

Крім того, згідно з умовою 3) маємо [1]

$$\underset{2}{G}_u = 0.$$

Звідси, враховуючи (2), дістанемо:

$$\gamma = C = \mathrm{const}. \tag{3}$$

[1] Тепер і надалі індекс i набирає значення 1, 2.

Отже, в силу (1), (2) і (3) метрична форма поверхні Φ_2 набирає вигляду

$$ds_2^2 = \frac{\varphi^2(u)}{\psi^2(v)} du^2 + C^2 \psi^2(v)\, dv^2,$$

а це означає, що наше твердження вірне.

Таким же чином можна показати, що, коли виконуються умови 1), 2), 3) і поверхня Φ_1 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \text{const}$ перетворюються в меридіани, то і поверхня Φ_2 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \text{const}$ перетворюються в меридіани.

II. Хай α_1 і α_2 — однопараметричні сім'ї твірних лінійчатих поверхень Φ_1 і Φ_2, а Γ — загальна для цих поверхень напрямна. Причому в кожній точці кривої Γ твірні сімей α_1 і α_2 лежать у спрямній площині.

З'ясуємо, які особливості повинні мати поверхні Φ_1 і Φ_2, а також крива Γ, щоб поверхня Φ_1 еквівалентно відображалась на поверхню Φ_2 і

1) кожна точка кривої Γ перетворювалася в себе;

2) твірні сім'ї α_1 перетворювалися в твірні сім'ї α_2;

3) віддаль між двома точками, що лежать на одній твірній, зберігалася.

Згідно з умовами 1), 2), 3) еквівалентне відображення відносить поверхні Φ_1 і Φ_2 до загальних координат s, v, де v — віддаль з відповідним знаком від довільної точки твірної до точки перетину цієї твірної з кривою Γ, а s — довжина дуги кривої Γ.

Хай $m_i(s)$ — одиничний вектор, напрямлений вздовж твірної сім'ї α_i в бік зростання параметра v.

В координатах s, v дискримінант метричної форми поверхні Φ_i має вигляд

$$\Delta_i = 1 + p_i^2 + 2\frac{dp_i}{ds} v + \left[\left(\frac{dp_i}{ds}\right)^2 + (p_i k - q_i \tau)^2 + q_i^2\right] v^2,$$

де k і τ — кривина і скрут кривої Γ, а p_i, q_i — коефіцієнти розкладу вектора $m_i(s)$ по ортах дотичної і бінормалі в точці s кривої Γ.

Прирівнюючи вирази для дискримінантів Δ_1 і Δ_2, будемо мати:

$$p_1^2 + 2\frac{dp_1}{ds} v + \left[\left(\frac{dp_1}{ds}\right)^2 + (p_1 k - q_1 \tau)^2 + \left(\frac{dq_1}{ds}\right)^2\right] v^2 =$$

$$= p_2^2 + 2\frac{dp_2}{ds} v + \left[\left(\frac{dp_2}{ds}\right)^2 + (p_2 k - q_2 \tau)^2 + \left(\frac{dq_2}{ds}\right)^2\right] v^2.$$

Звідси

$$p_1^2 = p_2^2,$$

$$\frac{dp_1}{ds} = \frac{dp_2}{ds},$$

$$\left(\frac{dp_1}{ds}\right)^2 + (p_1 k - q_1 \tau)^2 + \left(\frac{dq_1}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dp_2}{ds}\right)^2 + (p_2 k - q_2 \tau)^2 + \left(\frac{dq_2}{ds}\right)^2.$$

З цих співвідношень випливають такі рівності:

$$p_1 = p_2,$$

$$q_1 = -q_2,$$

$$k\tau = 0$$

або

$$p_1 = -p_2 = \text{const},$$

$$q_1 = q_2 = \text{const},$$

$$k\tau = 0.$$

Отже, для того, щоб мало місце дане еквівалентне відображення, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови. Крива повинна лежати в деякій площині P, відносно якої поверхня Φ_1 повинна бути симетричною поверхні Φ_2. Причому, якщо відповідні точки знаходяться на прямих, що лежать в спрямних площинах кривої Γ і паралельні площині P, то всі твірні сімей α_1 і α_2 утворюють сталий кут з площиною P.

III. Візьмемо косе коло Γ_1, для якого крива Γ_2 є лінією центрів кривини. Хай для цих кривих можна вказати хоч би одну пару лінійчатих поверхень Φ_1, Φ_2, які задовольняють такі умови:

1) крива Γ_i є напрямна для поверхні Φ_i;

2) поверхня Φ_1 еквівалентно відображається на поверхню Φ_2 так, що кожна точка кривої Γ_1 перетворюється в центр кривини кривої Γ_2 в цій точці, твірні поверхні Φ_1 перетворюються в твірні поверхні Φ_2, причому якщо a_1 і a_2 — відповідні твірні, що проходять через точки M_1 і M_2 кривих Γ_1 і Γ_2, то кут між прямою a_1 і кривою Γ_1 в точці M_1 дорівнює кутові між прямою a_2 і кривою Γ_2 в точці M_2, а також зберігаються довжини відрізків твірної.

Тоді крива Γ_1 є гвинтова лінія, що перетинає твірні циліндра, на якому вона лежить, під кутом в 45°.

Дійсно, аналогічно до попереднього пункту можна показати, що згідно з умовами 1) і 2) має місце рівність

$$\left(\frac{ds_1}{ds_2}\right)^2 = 1,$$

де s_i — довжина дуги кривої Γ_i. Але ds_1, ds_2, кривина k і скрут τ кривої Γ_1 задовольняють таку умову [1]:

$$\left(\frac{ds_1}{ds_2}\right)^2 = \left(\frac{\tau}{k}\right)^2.$$

Тому

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)^2 = 1.$$

Звідси випливає, що $\tau = \text{const}$, тобто Γ_1 — гвинтова лінія. Далі, враховуючи, що [1]

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

де a — радіус циліндра, на якому лежить крива Γ_1, і b — хід цієї кривої, з попередньої рівності дістанемо

$$a = b.$$

А це означає [1], що крива Γ_1 конгруентна кривій Γ_2 і утворює з твірними циліндра, на якому вона лежить, кут в 45°. Зрозуміло, що для кривих Γ_1, Γ_2 можна вказати безліч пар лінійчатих поверхень, для яких виконуються умови 1), 2).

Таким чином, наше твердження доведено.

IV. Хай поверхня Φ_1 еквіареально відображена за допомогою в'язки паралельних вектору M прямих на поверхню Φ_2 так, що:

1) відповідні дотичні площини (тобто дотичні площини до поверхень Φ_1 і Φ_2 у відповідних точках) перетинаються під сталим кутом;

2) лінії перетину відповідних дотичних площин утворюють сталий кут з вектором M.

Тоді обидві поверхні Φ_1 і Φ_2 є або площини, або колові конуси із загальною віссю, паралельною вектору M (один з них може вироджуватись в площину, перпендикулярну до вектора M), або розгортні поверхні, ребра звороту яких є ізогональними траєкторіями однієї і тієї ж однопараметричної сім'ї прямих, паралельних вектору M.

Для доведення візьмемо декартову прямокутну систему координат, вісь Oz якої паралельна вектору M. Хай у цій координатній системі рівняння поверхні Φ_i

$$z = f_i(x, y).$$

Тоді в силу наших передумов можна записати, що

$$1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 = c^4\left[1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$1 + \frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,\frac{\partial f_1}{\partial y} = c_1 c^2\left[1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{dy} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,\frac{\partial f_1}{\partial x} = c_2 c^2\left[1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right],$$

де c, c_1, c_2 — сталі, причому $|c_1| < 1$ і $|c_2| < 1$. Виключивши з цих рівнянь $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ і $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, будемо мати

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 = \frac{(c^2 c_1 - 1)^2 + c^4 c_2^2}{c^4(1 - c_1^2 - c_2^2)}.$$

Отже, функція $f_1(x, y)$ задовольняє рівняння, кожна інтегральна поверхня якого є або площина, або коловий конус з віссю Oz, або розгортна поверхня, ребро звороту якої є ізогональна траєкторія однопараметричної сім'ї прямих, паралельних осі Oz.

Зрозуміло, що те ж саме можна сказати про функцію $f_2(x, y)$.

Беручи до уваги все це, а також умови 1), 2), переконуємось у справедливості нашого твердження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия. Гостехиздат, 1949.

ЗМІСТ

Ціна 46 коп.