Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

С. П. ГАВЕЛЯ, А. М. КУЗЕМКО

ЗАСТОСУВАННЯ РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Специфічні властивості диференціальних рівнянь пружної рівноваги пологих оболонок дозволяють досягти деяких спрощень при зведенні різних крайових задач для таких оболонок до регулярних інтегральних рівнянь (в порівнянні із загальним методом Я. Б. Лопатинського [2]). Зокрема виявляється можливим використати відомі результати з теорії потенціалу, що стосуються відповідних крайових задач для бігармонійного рівняння або для системи Ляме на площині. Застосування функцій Гріна дає можливість зводити розглядувані задачі теорії оболонок до розв'язуючої системи двох (а в ряді випадків одного) регулярних інтегральних рівнянь. Наведемо приклад зведення до регулярних інтегральних рівнянь задачі про жорстко-шарнірне закріплення пологої оболонки.

ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧ ДО ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

Пружна рівновага пологої оболонки описується, як відомо [1], системою рівнянь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}+(k_1+\sigma k_2)\frac{\partial w}{\partial x_1}=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1,$$

$$\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+(k_2+\sigma k_1)\frac{\partial w}{\partial x_2}=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2,$$

$$(k_1+\sigma k_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(k_2+\sigma k_1)\frac{\partial v}{\partial x_2}+[(k_1+k_2)^2-2(1-\sigma)k_1k_2]\,w+ \tag{1}$$

$$+\frac{h^2}{12}\Delta\Delta w=\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_3,$$

або при $X_1=X_2=0$ ([1], стор. 308).

$$\Delta\Delta\Phi-Eh\,\nabla w=0,$$

$$\Delta\Delta w+\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\nabla\Phi=\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}X_3, \tag{2}$$

де

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

$\Phi(x)$ — функція напружень, що зв'язана з компонентами u, v, w вектора зміщень формулами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x_1} + (k_2 + \sigma k_1) w\right],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma \frac{\partial v}{\partial x_2} + (k_1 + \sigma k_2) w\right],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{Eh}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right),$$

де $k_1 = k_1(x)$, $k_2 = k_2(x)$ — головні кривизни оболонки, $x_1 = x_1(x)$, $x_2 = x_2(x)$, $x_3 = x_3(x)$ — компоненти зовнішнього поверхневого навантаження, h — товщина оболонки, σ — коефіцієнт Пуассона, E — модуль пружності матеріалу, $x = (x_1, x_2)$ (як і надалі $y = (y_1, y_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ і т. д.).

При розв'язуванні деяких крайових задач (наприклад, задачі про жорстке защемлення краю) зручніше користуватись системою диференціальних рівнянь у вигляді (1), в той час як для інших задач (наприклад, про вільно-шарнірне спирання) виявляється більш зручною форма (2). Можна застосувати такий загальний запис обох цих систем (із збереженням потрібних у наступному властивостей):

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) Z + a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w = f,$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w + b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) Z = \varphi - \delta w, \tag{3}$$

де в першому випадку

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1-\sigma}{2}\Delta + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{1-\sigma}{2}\Delta + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \beta(x)\frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha(x) = k_1 + \sigma k_2, \\ \beta(x) = k_2 + \sigma k_1, \end{matrix}$$

$$B\frac{\partial}{\partial x} = \Delta\Delta, \quad b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \beta(x)\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

$$f = -\frac{1-\sigma^2}{Eh}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1-\sigma^2}{Eh} X_3, \ Z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\delta = [(k_1 + k_2)^2 - 2(1-\sigma) k_1 k_2],$$

у другому випадку

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \Delta\Delta, \tag{5}$$

$$b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\nabla, \quad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -Eh\nabla,$$

$$Z(x) = \Phi(x), \quad f = 0, \quad \varphi = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} x_3, \; \delta = 0.$$

Введемо також такі загальні позначення для різних крайових умов:

$$PZ(y) = 0, \; Qw(y) = 0, \; (y \in S), \tag{6}$$

де S — границя розглядуваної області Ω, а P та Q — матриці відповідного розміру лінійних диференціальних операторів.

Користуючись тією обставиною, що шукані функції w та Z в рівняннях (3) зв'язані між собою лише через молодші похідні, зведення задачі (3) та (6) до регулярних інтегральних рівнянь можна досягти так. Спочатку розглянемо допоміжні задачі

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) Z = F(x), \; (x \in \Omega), \; PZ(y) = 0, \; (y \in S) \tag{7}$$

та

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w = \Psi(x), \; (x \in \Omega), \; Qw(y) = 0, \; (y \in S). \tag{8}$$

Зведення таких задач до регулярних інтегральних рівнянь (наприклад, методом Я. Б. Лопатинського [2]) порівняно нескладне, а в ряді випадків здійснене ([3], [4]). Розв'язання одержуваних в результаті інтегральних рівнянь визначають функції Гріна $H(x,\xi)$ та $\Gamma(x,\xi)$ задач (7) та (8) відповідно. Розв'язання $Z(x)$ та $w(x)$ цих задач визначаються виразами

$$Z(x) = \iint_{\Omega} H(x,\xi) F(\xi) \, d_\xi \Omega, \tag{9}$$

$$w(x) = \iint_{\Omega} \Gamma(x,\xi) \Psi(\xi) \, d_\xi \Omega. \tag{10}$$

Підрозуміваючи, далі, під $F(\xi)$ та $\Psi(\xi)$ функції

$$F(\xi) = f(\xi) - \mu(\xi) \tag{11}$$

та

$$\Psi(\xi) = \varphi(\xi) - \nu(\xi) - \delta w, \tag{12}$$

де

$$\mu(\xi) = a\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) w(\xi),$$

$$\nu(\xi) = b\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) Z(\xi),$$

та позначаючи

$$K(x,\xi) = \iint_{\Omega} \Gamma(x,\zeta) b\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) H(\zeta,\xi) \, d_\zeta \Omega,$$

$$M(x,\xi) = \iint_{\Omega} H(x,\zeta) a\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \Gamma(\zeta,\xi) \, d_\zeta \Omega,$$

$$\chi(x) = \iint_{\Omega} [\Gamma(x,\xi)\varphi(\xi) - K(x,\xi) f(\xi)] \, d_\xi \Omega,$$

$$\psi(x) = \iint\limits_{\Omega} H(x,\xi) f(\xi) - M(x,\xi)\varphi(\xi)]\, d_\xi \Omega,$$

одержуємо розв'язуючу систему інтегральних рівнянь:

$$\mu(x) = a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\chi(x) + \iint\limits_{\Omega} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) K(x,\xi)\,\mu(\xi)\, d_\xi \Omega -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x,\xi)\, w(\xi)\, d_\xi \Omega, \qquad (13)$$

$$w(x) = \chi(x) + \iint\limits_{\Omega} K(x,\xi)\,\mu(\xi)\, d_\xi \Omega - \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x,\xi)\,\delta(\xi)\, w(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

або

$$\nu(x) = b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) + \iint\limits_{\Omega} b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) M(x,\xi)\,\nu(\xi)\, d_\xi \Omega + \qquad (14)$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) M(x,\xi)\,\delta(\xi)\, w(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$w(x) = \iint\limits_{\Omega} \quad (x,\xi)\,\varphi(\xi)\, d_\xi \Omega - \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x,\xi)\,\nu(\xi)\, d_\xi \Omega -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x,\xi)\,\delta(\xi)\, w(\xi)\, d_\xi \Omega.$$

Регулярність одержаних інтегральних рівнянь (13) та (14) — наслідок того, що оператори $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ містять у собі диференціювання більш низького порядку в порівнянні з $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ відповідно. Слід відмітити, що система (14) дещо простіша від системи (13). Крім того, ці системи перетворюються в окремі рівняння у випадку $\delta = 0$ (5).

Розв'язуюча система інтегральних рівнянь може бути одержана і в простішому вигляді:

$$\mu(x) + \iint\limits_{\Omega} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x,\xi)\,\nu(\xi)\, d_\xi \Omega = f,$$

$$\nu(x) + \iint\limits_{\Omega} \left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \delta(x) \right] H(x,\xi)\,\mu(\xi)\, d_\xi \Omega = \varphi, \qquad (15)$$

де $\mu(x)$ та $\nu(x)$ — густини потенціалів

$$Z(x) = \iint\limits_{\Omega} H(x,\xi)\,\mu(\xi)\, d_\xi \Omega, \qquad (16)$$

$$w(x) = \iint\limits_{\Omega} \Gamma(x,\xi)\,\nu(\xi)\, d_\xi \Omega.$$

Система (15) зводиться до одного з (матричних) рівнянь:

$$\mu(x) = f^*(x) + \iint_\Omega K(x, \xi)\,\mu(\xi)\,d_\xi\,\Omega$$

або

$$\nu(x) = \varphi^*(x) + \iint_\Omega M(x, \xi)\,\nu(\xi)\,d_\xi\,\Omega. \tag{17}$$

Тут

$$K(x,\xi) = \iint_\Omega a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Gamma(x,\zeta)\left[b\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) - \delta(\zeta)\right]H(\zeta,\xi)\,d_\xi\Omega,$$

$$M(x,\xi) = \iint_\Omega \left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \delta(x)\right]H(x,\zeta)\,a\left(\zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\Gamma(\zeta,\xi)\,d_\zeta\Omega,$$

$$f^*(x) = f(x) - \iint_\Omega a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Gamma(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d_\xi\,\Omega,$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \iint_\Omega \left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \delta(x)\right]H(x, \xi)\,f(\xi)\,d_\xi\,\Omega.$$

Одержані інтегральні рівняння (17), як і рівняння (13), (14), необмежено розв'язні при достатній малості головних кривизн.

ЖОРСТКО-ШАРНІРНЕ ЗАКРІПЛЕННЯ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ

Пропонований спосіб проілюструємо на задачі про шарнірне закріплення пологої оболонки. Крайові умови в цьому випадку будуть:

$$u|_s = v|_s = w|_s = \Delta w|_s = 0. \tag{18}$$

Позначення $\Delta w = \omega$ дозволяє записати цю задачу так:

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \alpha\frac{\partial w}{\partial x_1} = f_1(x), \tag{19}$$

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta v + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \beta\frac{\partial w}{\partial x_2} = f_2(x), \tag{20}$$

$$\Delta\omega + \frac{12\delta}{h^2}w + \frac{12\alpha}{h^2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{12\beta}{h^2}\frac{\partial v}{\partial x_2} = \varphi(x), \tag{21}$$

$$\Delta w - \omega = 0, \tag{22}$$

$$u|_s = v|_s = 0, \tag{23}$$

$$w|_s = \omega|_s = 0. \tag{24}$$

Нехай $H(x, \xi)$ та $\Gamma(x, \xi)$ — функції Гріна задач

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = f_1^*(x),$$

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta v + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = f_2^*(x), \tag{25}$$

$$u|_s = v|_s = 0$$

та

$$\Delta\omega = \varphi_1(x),$$
$$\Delta w = \varphi_2(x), \qquad (26)$$
$$\omega\big|_s = w\big|_s = 0$$

відповідно. Скориставшись відомим зведенням задач (25), (26) до інтегральних рівнянь, для визначення цих функцій Гріна матимемо:

$$H(x, \xi) = \Theta(x, \xi) + \nu(x, \xi),$$
$$\Gamma(x, \xi) = G(x, \xi) + g(x, \xi),$$

де

$$\Theta(x, \xi) = \frac{1}{4\pi(1-\sigma)} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} (3-\sigma)\ln|x-\xi| - (1+\sigma)\frac{(x_1-\xi_1)^2}{|x-\xi|^2} & -(1+\sigma)\frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^2} \\ -(1+\sigma)\frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^2} & (3-\sigma)\ln|x-\xi| - (1+\sigma)\frac{(x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^2} \end{pmatrix},$$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vartheta(x, \xi) = \int_S T(x, \zeta)p(\zeta, \xi)\,d_\zeta S, \; g(x, \xi) = \int_S L(x, \zeta)q(\zeta, \xi)\,d_\zeta S.$$

$p(\zeta, \xi)$ та $q(\zeta, \xi)$ — розв'язки відомих регулярних інтегральних рівнянь

$$p(y, \xi) + \int_S T(y, \eta)p(\eta, \xi)\,d_\eta S + \Theta(y, \xi) = 0,$$
$$(y \in S)$$
$$q(y, \xi) + \int_S L(y, \eta)q(\eta, \xi)\,d_\eta S + G(y, \xi) = 0$$

з ядрами

$$T(y, \eta) = \frac{2(y-\eta, n(\eta))}{\pi(3-\sigma)|y-\eta|^2}\Bigg\{(1-\sigma)I + \frac{1+\sigma}{|y-\eta|^2} +$$
$$+ \begin{pmatrix} (y_1-\eta_1)^2 & (y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2) \\ (y_1-\eta_1)(y_2-\eta_2) & (y_2-\eta_2)^2 \end{pmatrix}\Bigg\},$$
$$L(y, \eta) = \frac{(y-\eta, n(\eta))}{\Pi|y-\eta|^2}I,$$

де $n(\eta)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до контуру.

Шукаючи розв'язок задач (19), (20), (21), (22), (23) та (24) у вигляді

$$Z(x) = \iint_\Omega H(x, \xi)\mu(\xi)\,d_\xi\Omega,$$

$$w^*(x) = \iint_\Omega \Gamma(x, \xi)\nu(\xi)\,d_\xi\Omega,$$

де

$$Z(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\ v(x)\end{pmatrix},\quad w^*(x)=\begin{pmatrix}\omega(x)\\ w(x)\end{pmatrix},$$

дістанемо систему інтегральних рівнянь:

$$\mu_1(x)+\iint\limits_{\Omega}\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\Gamma_{11}(x,\,\xi)\nu_1(\xi)+\Gamma_{12}(x,\,\xi)\nu_2(\xi)\Big]d_\xi\Omega=f_1(x), \tag{27}$$

$$\mu_2(x)+\iint\limits_{\Omega}\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big[\Gamma_{21}(x,\,\xi)\nu_1(\xi)+\Gamma_{22}(x,\,\xi)\nu_2(\xi)\Big]d_\xi\Omega=f_2(x), \tag{28}$$

$$\nu_1(x)+\frac{12\delta}{h^2}\Big\{\iint\limits_{\Omega}[\Gamma_{11}(x,\xi)\,\nu_1(\xi)+\Gamma_{12}(x,\xi)\,\nu_2(\xi)]\,d_\xi\Omega+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\xi)}{\partial x_1}+\beta(x)\frac{\partial H_{21}(x,\xi)}{\partial x_2}\Big)\mu_1(\xi)+\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\xi)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\xi)}{\partial x_2}\Big)\mu_2(\xi)\Big]\,d_\xi\Omega=\varphi(x), \tag{29}$$

$$\nu_2(x)=\iint\limits_{\Omega}\Gamma_2(x,\,\xi)\,\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega+\iint\limits_{\Omega}\Gamma_{22}(x,\,\xi)\,\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega. \tag{30}$$

Виключення з (29) невідомих $\mu_1(\xi)$ та $\mu_2(\xi)$ за формулами (27) та (28) приводить, нарешті, до розв'язуючої системи регулярних інтегральних рівнянь:

$$\nu_1(x)+\iint\limits_{\Omega}T_{11}(x,\,\xi)\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega+\iint\limits_{\Omega}T_{12}(x,\,\xi)\,\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega=\varphi^*(x),$$

$$\nu_2(x)-\iint\limits_{\Omega}\Gamma_{21}(x,\,\xi)\nu_1(\xi)\,d_\xi\Omega-\iint\limits_{\Omega}\Gamma_{22}(x,\,\xi)\nu_2(\xi)\,d_\xi\Omega=0,$$

де

$$T_{11}(x,\xi)=\frac{12\delta}{h^2}\Big\{\Gamma_{11}(x,\xi)-\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{21}(x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\alpha(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\Gamma_{11}(\zeta,\xi)+\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\beta(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\Gamma_{21}(\zeta,\,\xi)\Big]\,d_\zeta\Omega\Big\},$$

$$T_{12}(x,\xi)=\frac{12\delta}{h^2}\Big\{\Gamma_{12}(x,\,\xi)-\iint\limits_{\Omega}\Big[\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{21}(x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\alpha(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\Gamma_{12}(\zeta,\,\xi)+\Big(\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\zeta)}{\partial x_1}+$$

$$+\beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\zeta)}{\partial x_2}\Big)\beta(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\Gamma_{22}(\zeta,\,\xi)\Big]\,d_\zeta\Omega\Big\},$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) + \frac{12\delta}{h^2}\left\{\iint\limits_{\Omega}\left[\alpha(x)\frac{\partial H_{11}(x,\xi)}{\partial x_1} + \beta(x)\frac{\partial H_{21}(x,\xi)}{\partial x_2}\right] f_1(\xi)\, d_\xi\Omega + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\Omega}\left[\alpha(x)\frac{\partial H_{12}(x,\xi)}{\partial x_1} + \beta(x)\frac{\partial H_{22}(x,\xi)}{\partial x_2}\right] f_2(\xi)\, d^\xi\Omega. \right.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек, ГИТТЛ, 1949.
2. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. № 5, 1953.
3. Панич О. И. Мат. сбор., н. с. 50 (92), № 3, 1960.
4. Цандеков М. И. Труды Тбилисского университета, т. 56, 1955.