Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

М. М. ГОРБАЧ

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРА РИСА—БОХНЕРА

а) $KB^{(\alpha)}$ — клас функцій двох змінних сумовних по всій площині

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|\, dxdy < \infty \tag{1}$$

і таких, що середнє

$$f_{x,y}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + t\cos\Theta,\ y + t\sin\Theta)\, d\Theta$$

задовольняє умову

$$f_{x,y}(t) \in KLip\alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ по } t.$$

Розглянемо оператор Риса—Бохнера [7]:

$$S_R^{(\delta)}(f;\, x, y) = \iint_{\nu \leqslant R} K_\delta\left(\frac{\nu}{R}\right) a(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,\ \nu^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

де

$$a(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} f(t, z)\, e^{-i(\alpha t + \beta z)} dtdz,$$

а

$$K_\delta(t) = \begin{cases} (1 - t^2)^\delta, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1,\ \left(\delta \geqslant \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

як метод наближення функцій $f(x, y) \in KB^{(\alpha)}$.

При цих умовах [7]

$$S_R^{(\delta)}(f;\, x, y) = 2^\delta\, \Gamma(\delta + 1)\, R \int_0^\infty f_{x\cdot y}(t)\, \frac{I_{\delta+1}(Rt)}{(Rt)^\delta}, \tag{2}$$

де $I_p(t)$ — функція Бесселя першого роду порядку p.

б) $L_p\, v$ — клас функцій $f(x)$ обмеженої варіації на всій осі, сумовних в p-й степені на ній $(1 \leqslant p \leqslant 2)$.

В першій частині роботи вивчається величина

$$E_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)=\sup_{f\in KB^{(\alpha)}}|f(x,y)-S_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)|.$$

Аналогічні задачі для сум Фур'є розглянуті в роботі Чен Минь-де і Чен Юн-хе (РЖМ, 1958, реф. № 247).

В другій частині роботи дається асимптотична оцінка для

$$\|f-\sigma_R(f)\|_{L_p}\ (1<p\leqslant 2),\quad f\in L_p v,$$

де

$$\sigma_R(f)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty f(x+t)\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}\,d(Rt).$$

При цьому використовується метод виділення особливостей, розроблений С. М. Нікольським [6]. Аналогічні результати для інтегралів Фур'є одержані в роботі В. Й. Гукевич [1].

Л е м а І. *Має місце рівність*

$$2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\int_0^\infty\frac{I_{\delta+1}(x)}{x^{\delta}}\,dx=1,\quad \delta\geqslant\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Д о в е д е н н я. При $\delta>\frac{1}{2}$ лема доведена С. Бохнером [7]. Нехай $\delta=\frac{1}{2}$. Тоді, оскільки $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, досить довести, що

$$\int_0^\infty\frac{I_{\frac{3}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Тому що [4]

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(xdx)^n}\frac{\sin x}{x}, \tag{4}$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{x}}I_{\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x}.$$

Звідси

$$\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}I_{\frac{3}{2}}(x)\,dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty d\frac{\sin x}{x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

чим закінчується доведення леми.

Величина $E_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)$ не залежить від x і y.

Нехай $f_{0,0}(t)-f(0,\ 0)=\bar{f}(t)$, тоді $\bar{f}(0)=0$, звідси, враховуючи (2) і (3),

$$E_R^{(\delta)}(f;\ x,\ y)=\sup_{f\in KB_0^{(\alpha)}}|\bar{S}_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)|=E_R^{(\delta)}(KB^{(\alpha)}), \tag{5}$$

де $\bar{S}_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)=S_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)-f(0,\ 0)$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $K=1$.

$$\bar{S}_R^{(\delta)}(f;\ 0,\ 0)=2^{\delta}\Gamma(\delta+1)R^{1-\delta}\int_0^{\infty}\bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^{\delta}}\,dt=$$

$$=2^{\delta}\Gamma(\delta+1)R^{1-\delta}\left[\int_0^{\lambda(R)}\bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^{\delta}}\,dt+\int_{\lambda(R)}^{\infty}\bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^{\delta}}\,dt\right], \qquad (6)$$

де $\lambda(R)=O\left(\frac{1}{R}\right)$.

Тому що $I_p(t)=O\ (t^p)$ при $t\to 0$, то

$$\left|\int_0^{\lambda(R)}\bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^{\delta}}\,dt\right|\leqslant CR^{\delta+1}\int_0^{\lambda(R)}t^{\alpha+1}\,dt=O\left(\frac{1}{R^{1+\alpha-\delta}}\right). \qquad (7)$$

Для оцінки другого доданку рівності (6) використаємо асимптотичне зображення функції Бесселя

$$I_p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(x-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{x^{\frac{1}{2}}}+O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right),\ (x\to\infty).$$

Одержимо

$$\int_{\lambda(R)}^{\infty}\bar{f}(t)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{t^{\delta}}\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\lambda(R)}^{\infty}\bar{f}(t)\frac{\cos\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\delta}}\,dt+$$

$$+\int_{\lambda(R)}^{\infty}\bar{f}(t)\frac{1}{t^{\delta}}O\left[\frac{1}{(Rt)^{\frac{3}{2}}}\right]dt. \qquad (8)$$

Але при $\delta+\frac{1}{2}-\alpha>0$

$$\left|\int_{\lambda(R)}^{\infty}\frac{\bar{f}(t)}{t^{\delta}}O\left[\frac{1}{(Rt)^{\frac{3}{2}}}\right]dt\right|\leqslant\frac{C}{R^{\frac{3}{2}}}\int_{\lambda(R)}^{\infty}t^{\alpha-\delta-\frac{3}{2}}\,dt=O\left(\frac{1}{R^{1+\alpha-\delta}}\right). \qquad (9)$$

Враховуючи (7), (8), (9), із (6) одержимо

$$S_R^{(\delta)}(f;\ 0{,}0)=2^{\delta}\Gamma(\delta+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}R^{\frac{1}{2}-\delta}\int_{\lambda(R)}^{\infty}\bar{f}(t)\frac{\cos\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt+O\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right). \qquad (10)$$

Нехай γ і m, де $0\leqslant\gamma<\pi$, m — ціле невід'ємне число, такі, що

$$\cos\left(Rt=\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^m\sin(Rt-\gamma), \qquad (11)$$

а

$$t_{\mu}=\frac{\gamma+\mu\pi}{R},\ h=\frac{\pi}{R}.$$

Тоді для $\nu = 1, 2, \ldots$ маємо

$$\int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_\nu} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = (-1)^{\nu-1}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sin Ru}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\,du; \tag{12}$$

$$\int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = (-1)^{\nu}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sin Ru}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\,du.$$

Ясно, що для

$$d_\mu = \left|\int\limits_{t_\mu}^{t_{\mu+\frac{1}{2}}} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt\right| \quad \left(\mu = \frac{1}{2},\ 1, \frac{3}{2}, \ldots\right) \tag{13}$$

мають місце нерівності

$$d_{\frac{1}{2}} > d_1 > d_{\frac{3}{2}} > \cdots, \quad \text{причому } \lim_{\mu\to\infty} d_\mu = 0.$$

Нехай для $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\Delta_\nu = \int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = (-1)^{\nu-1}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}\left[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}} - \frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\right]\sin Ru\,du. \tag{14}$$

Тому що $\dfrac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}} - \dfrac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}$ спадає із збільшенням ν, то

$$|\Delta_1| > |\Delta_2| > \ldots \text{ і } \operatorname{sin}\Delta_\nu = (-1)^{\nu-1}, \tag{15}$$

причому із (12), (13), (14) випливає, що

$$|\Delta_\nu| = |d_{\nu-\frac{1}{2}} - d_\nu'. \tag{16}$$

Таким чином, при $\lambda(R) = t_{\frac{1}{2}}$ маємо

$$\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{\infty} f(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \bar{f}(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{t_{\nu}-\frac{1}{2}}^{t_{\nu}+\frac{1}{2}}\varphi_{\nu}(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt+\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{f}(t_{\nu})\Delta_{\nu},$$

де $\varphi_{\nu}(t)=\overline{f}(t)-\overline{f}(t_{\nu})$, причому $\varphi_{\nu}(t)\in Lip\,\alpha$.

Застосовуючи перетворення Абеля до другого доданка, одержимо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{f}(t_{\nu})\Delta_{\nu}=f(t_1)\Sigma_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}[\overline{f}(t_{\nu+1})-\overline{f}(t_{\nu})](\Sigma_{\nu+1}),$$

де

$$\Sigma_{\nu}=\Delta_{\nu}+\Delta_{\nu+1}+\cdots.$$

Враховуючи (15) і те, що $\overline{f}(0)=0$, $|\Sigma_{\nu}|<|\Delta_{\nu}|$, одержимо

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{f}(t_{\nu})\Delta_{\nu}\right|\leqslant 0\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right)\left|\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_{i}\right|+h^{\alpha}\sum_{\nu=1}^{\infty}|\Sigma_{\nu+1}|\leqslant$$

$$\leqslant(d_{\frac{1}{2}}-d_1)\,0\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right)+h^{\alpha}d_{\frac{3}{2}}.$$

Тому що

$$d_{\mu}\leqslant\int\limits_{t_{\mu}}^{t_{\mu}+\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\delta}\left[\dfrac{1}{\left(t_{\mu}+\frac{1}{2}\right)^{\delta-\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{(t_{\mu})^{\delta-\frac{1}{2}}}\right], & \delta>\dfrac{1}{2};\\ \ln\left(1+\dfrac{\pi}{\gamma+\mu\pi}\right), & \delta=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

то $d_{\mu}=0\left(\dfrac{1}{R^{\frac{1}{2}-\delta}}\right)$, тому

$$\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{\infty}\overline{f}(t)\frac{\sin\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\varkappa-\frac{\pi}{4}\right)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt=$$

$$=(-1)^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{t_{\nu}-\frac{1}{2}}^{t_{\nu}+\frac{1}{2}}\varphi_{\nu}(t)\frac{\sin(Rt-\gamma)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}\,dt+0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{h}{2}}[\varphi_{\nu}(t_{\nu}-u)-\varphi_{\nu}(t_{\nu}+u)]\left[\frac{1}{(t_{\nu}-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}+\right.$$

$$+\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg]\sin Rudu+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_\nu(t_\nu-u)+$$

$$+\varphi_\nu(t_\nu+u)]\left[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}-\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\right]\sin Rudu+0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right).$$

Тому що

$$\Bigg|\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\int_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_\nu(t_\nu-u)+\varphi_\nu(t_\nu+u)]\Bigg[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}-$$

$$-\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg|\sin Rudu=0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right),$$

то

$$\int_{t_{\frac{1}{2}}}^{\infty}\overline{f}(t)\frac{\sin\left(Rt-\frac{\delta+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{t^{\frac{1}{2}+\delta}}dt=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}}[\varphi_\nu(t_\nu-u)-\varphi_\nu(t_\nu+u)]\Bigg[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}+$$

$$+\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg]\sin Rudu+0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{2}+\alpha-\delta}}\right). \qquad (17)$$

Нехай $\delta>\frac{1}{2}$, тоді

$$\Bigg|\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{m+\nu-1}\int_0^{\frac{h}{2}}[(\varphi_\nu(t_\nu-u)-\varphi_\nu(t_\nu+u)]\Bigg[\frac{1}{(t_\nu-u)^{\frac{1}{2}+\delta}}+$$

$$+\frac{1}{(t_\nu+u)^{\frac{1}{2}+\delta}}\Bigg]\sin Rudu=0\left(\frac{1}{R^{\alpha+\frac{1}{2}-\delta}}\right). \qquad (18)$$

Звідси, враховуючи (5), (10), (17), випливає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо δ і α такі числа, які задовольняють нерівності $\delta>\frac{1}{2}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, то*

$$E_R^{(\delta)}(KB^{(\alpha)})=0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right)\quad(R\to\infty),$$

причому права частина цієї рівності не залежить від x і y.

Теорема 2. *Якщо* $\delta = \frac{1}{2}$ *і* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *то має місце асимптотична рівність*

$$E_R^{(\frac{1}{2})}(KB^{(\alpha)}) = \frac{K2^{\alpha+1}}{\pi} \frac{\ln R}{R^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du + 0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right).$$

Доведення. а) Нехай $0 \leqslant \alpha < 1$, тоді із (10) і враховуючи (17), одержимо

$$S_R^{(\frac{1}{2})}(f;\ 0{,}0) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{m+\nu-1} \int_0^{\frac{h}{2}} [\varphi_\nu(t_\nu - u) - \varphi_\nu(t_\nu + u)] \frac{t_\nu}{t_\nu^2 - u^2} \sin Rudu + 0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right),$$

звідки

$$|S_R^{(\frac{1}{2})}(f;\ 0{,}0)| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\alpha)} \frac{R}{\pi} \sum_{\nu=1}^{[R^2]} \frac{1}{\nu} \int_0^{\frac{h}{2}} u^\alpha \sin Rudu + 0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} \frac{\ln R}{R^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin udu + 0\left(\frac{1}{R^\alpha}\right). \tag{19}$$

Розглянемо функцію двох змінних, задану в полярних координатах:

$$f_R(t,\ \Theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad t\,[R^2] \leqslant t < \infty; \\ (-1)^{m+\nu} 2^{\alpha+1} \pi\psi(\Theta)(t - t_\nu)^\alpha, & t_\nu \leqslant t \leqslant t_{\nu+\frac{1}{2}}; \\ (-1)^{m+\nu} 2^{\alpha+1} \pi\psi(\Theta)(t_{\nu+1} - t)^\alpha, & t_{\nu+\frac{1}{2}} \leqslant t \leqslant t_{\nu+1}; \\ (\nu = 0,\ 1{,}2,\ \ldots,\ [R^2] - 1), & \end{cases}$$

причому $\psi(\Theta)$ така, що $\int_0^{2\pi} \psi(\Theta) d\Theta = 1$.

Функція $f_R(t,\ \Theta)$ належить до нашого класу, причому для неї нерівність (19) перетворюється в рівність.

б) Нехай $\alpha = 1$. З (1) одержимо

$$\lim_{t\to\infty} \overline{f}(t) = 0,$$

тому

$$\int\limits_{\lambda(R)}^{\infty}\overline{f}(t)\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}d(Rt)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{R}\int\limits_{\lambda(R)}^{\infty}\overline{f}'(t)\frac{\sin Rt}{t}\,dt+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Таким чином, ми звели задачу до випадку $\alpha=0$.

Через $KB_{(r)}^{(\alpha)}$ позначимо клас функцій, які задовольняють умову (1) і мають r-у ($r=0,1$) похідну

$$\overline{f}^{(r)}(t)\in KLip\alpha,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

Теорема 3. *Для класу функцій* $KB_{(r)}^{(\alpha)}$ *має місце асимптотична рівність*

$$E_R^{\left(\frac{1}{2}\right)}(KB_{(r)}^{(\alpha)})=\frac{K2^{\alpha+1}}{\pi}\frac{\ln R}{R^{r+\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u^{\alpha}\sin u\,du+0\left(\frac{1}{R^{r+\alpha}}\right).$$

Аналогічні результати мають місце і для функцій n змінних, якщо розглядати $\delta\geqslant\frac{n-1}{2}$.

Зауваження. Позначимо через $KW^{(\alpha)}$ клас функцій $f(x)$, заданих на $(0,\infty)$, для яких виконуються умови:

$$\int\limits_0^{\infty}x\,|f(x)|\,dx<\infty,\ f(x)\in KLip\,\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\ (0<x<\infty).$$

Будемо наближати функції цього класу за допомогою інтегральних операторів

$$S_R^{(\delta)}(f)=2^{\delta}\Gamma(\delta+1)R\int\limits_0^{\infty}f(t+x)\frac{I_{\delta+1}(Rt)}{(Rt)^{\delta}}dt.$$

Висновок. Для класу функцій $KW^{(\alpha)}$ має місце асимптотична рівність

$$\sup_{f\in KW^{(\alpha)}}\sup_{0\leqslant x<\infty}|f(x)-S_R^{(\delta)}(f)|=\begin{cases}0\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right), & \delta>\frac{1}{2};\\ \frac{K2^{\alpha+1}}{\pi}\frac{\ln R}{R}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u^{\alpha}\sin u\,du+ & \\ +0\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right), & \delta=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Якщо $f(x)$ має всюди на $(0,\infty)$ похідну $f'(x)\in K\,Lip\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, то цей результат можна відповідним чином посилити.

Лема II. *Якщо* $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ $(p>1)$, *то*

$$\|\sigma_R(f)\|_{l_p}\leqslant C_p\|f\|,\tag{20}$$

де C_p — *константа, яка залежить лише від* p, *але не від* $f(x)$.

Доведення. Ця лема є безпосереднім наслідком нерівності Риса [2].

Дійсно,

$$\sigma_R(f)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty f(x+t)\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}d(Rt)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_x^\infty f(u)\frac{I_{\frac{3}{2}}[R(u-x)]}{[R(u-x)]^{\frac{1}{2}}}d(Ru)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_x^\infty f(u)[R(u-x)]^{\frac{1}{2}}I_{\frac{3}{2}}[R(u-x)]\frac{du}{u-x}.$$

Нехай

$$\varphi(u)=\begin{cases}\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}[R(u-x)]^{\frac{1}{2}}I_{\frac{3}{2}}[R(u-x)], & u\in(x,\infty);\\ 0, & u\bar{\in}(x,\infty),\end{cases}$$

тоді

$$\sigma_R(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\varphi(u)}{u-x}du.$$

Функція $f(u)\cdot\varphi(u)\in L_p\,(-\infty,\infty)$, тому що $f(u)\in L_p\,(-\infty,\infty)$, а функція $\varphi(u)$ обмежена на $(-\infty,\infty)$, тому, згідно з нерівністю Риса, маємо

$$\|\sigma_R(f)\|_{L_p}\leqslant C_p^1\|f\cdot\varphi\|\leqslant C_p\|f\|L_p,$$

що й треба було довести.

Лема III. *Якщо* $f\in L_p v\ (p\leqslant 2)$, *то*

$$\|f(x)-\sigma_R(f)\|_{L_p}\leqslant C_p\omega_p\left(\frac{1}{R},f\right), \tag{21}$$

де ω_p — *інтегральний модуль неперервності, тобто*

$$\omega_p\left(\frac{1}{R},f\right)=\sup_{0<h<\frac{1}{R}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

і стала C_p *залежить лише від* p.

Доведення. Для доведення леми III зауважимо, що коли функція $\varphi(x)$ є ціла експоненціального типу степеня σ класу L_p $(p\leqslant 2)$, то має місце узагальнена теорема Вінера—Палей [3]:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iuz}\lambda(u)\,du,$$

де $\lambda(u)\in L_2(-\sigma,\sigma)$.

З другого боку, якщо $\sigma\leqslant R$, то

$$\sigma_R(\varphi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{iu(x+t)}\lambda(u)\,du\right]\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}d(Rt)=$$

$$=\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{iux}\lambda(u)\psi(u)\,du,$$

де

$$\psi(u)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}(e^{iut}-1)\frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}}\,d(Rt).$$

Розглянемо $\psi(u)$. Інтегруючи по частинах, одержимо

$$\varphi(u)=\frac{iu}{R}\int\limits_{0}^{\infty}e^{iut}\frac{\sin Rt}{t}\,dt.$$

Таким чином,

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{iux}\lambda(u)\psi(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{iux}\lambda(u)\left\{\frac{iu}{R}\int\limits_{0}^{\infty}e^{iut}\frac{\sin Rt}{t}\,dt\right\}du=$$

$$=\frac{i}{R}\int\limits_{0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{iu(x+t)}u\lambda(u)du\right\}\frac{\sin Rt}{t}\,dt=\frac{i}{R}\int\limits_{0}^{\infty}\psi_1(x+t)\frac{\sin Rt}{t}\,dt.$$

Звідси, оскільки $u\lambda(u)\in L_2\ (-\sigma,\sigma)$, то $\psi_1(x)\in L_p$, тому згідно з нерівністю Риса

$$\|\varphi_1(x)\|_{L_p}=\frac{1}{R}\left\|\int\limits_{0}^{\infty}\psi_1(x+t)\frac{\sin Rt}{t}\,dt\right\|_{L_p}\leqslant\frac{C_p^1}{R}\|\psi_1(x)\|_{L_p}=\frac{C_p}{R},$$

де C_p — константа, яка не залежить від R.

Таким чином,

$$\sigma_R(\varphi)=\varphi(x)+\frac{\varphi_1(x)}{R},\tag{22}$$

де

$$\varphi_1(x)\in L_p(-\infty,\infty).$$

Тотожність має місце для будь-якої функції експоненціального типу степеня $\sigma\leqslant R$ класу L_p $(p\leqslant 2)$.

Нехай $\varphi(x)$ — функція найкращого наближення $f(x)\in L_p v\ (p\leqslant 2)$, тоді

$$\|f(x)-\sigma_R(f)\|_{L_p}\leqslant\|f(x)-\varphi(x)\|_{L_p}+\|\sigma_R(f-\varphi)\|_{L_p}+\frac{C'_p}{R}\leqslant$$

$$\leqslant(1+C_p)E_R^{(p)}(f)+\frac{C'_p}{R}\leqslant C_p\omega_p\left(\frac{1}{R},\ f\right),$$

що й треба було довести.

Теорема 4. *Якщо $f\in L_p v$ $(1<p\leqslant 2)$, то справедлива нерівність*

$$\|f(x)-\sigma_R(f)\|_{L_p}\leqslant\frac{Cv^{\frac{1}{p}}\,\omega\left(\frac{1}{R},\ f\right)^{\frac{1}{q}}}{R^{\frac{1}{p}}}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),\tag{23}$$

де C — константа, яка не залежить від f і R, v — повна варіація функції f на всій осі і $\omega\left(\frac{1}{R}, f\right) = \sup\limits_{x} \sup\limits_{|h|<\frac{1}{R}} |f(x+h) - f(x)|$.

Доведення цієї теореми проводиться так, як в [6] (теорема Стечкіна).

Теорема 5. *Якщо $f \in v$ (обмеженої варіації), то*

$$|f(x) - \sigma_R(f)| \leqslant C \operatorname*{var}_{-\infty<x<\infty} f(x),$$

де C — константа, яка не залежить від R і $f(x)$.

Доведення. Інтегруючи по частинах $\sigma_R(f)$, одержимо:

$$\sigma_R(f) = f(x) + \int\limits_0^\infty \frac{\sin Rt}{R} df(x+t).$$

Нехай

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{\sin Ru}{R}, & u \geqslant 0; \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

тоді

$$|f(x) - \sigma_R(f)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) df(x+t) \right|.$$

Враховуючи, що функція $\varphi(u)$ обмежена на $(-\infty, \infty)$, ми одержимо твердження теореми.

Лема IV. *Нехай*

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \bar{\in} [0,1], \end{cases}$$

тоді

$$\|\varphi(x) - \sigma_R(\varphi)\|_{L_p} = \frac{C(p)}{R^{\frac{1}{p}}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}}\right) (p > 1),$$

де

$$C(p) = \left(\int\limits_0^\infty \left| \frac{\sin u}{u} \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Тому що

$$\sigma_R(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty f(x+t) \frac{I_{\frac{3}{2}}(Rt)}{(Rt)^{\frac{1}{2}}} d(Rt) =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_x^\infty f(t) \frac{I_{\frac{3}{2}}[R(t-x)]}{[R(t-x)]^{\frac{1}{2}}} d(Rt)$$

і

$$\int \frac{I_{\frac{3}{2}}(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x} + c,$$

то

$$\varphi(x) - \sigma_R(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in (-\infty, 0); \\ \dfrac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \displaystyle\int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Нехай

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in (-\infty, 0); \\ -\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

тоді

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^p\,dx = \int_{\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx \leqslant \int_{-\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-1} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx + \int_{-1}^{0} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx = \sum_{i=1}^{4} I^i{}_1; \tag{24}$$

$$I_1^1 = \frac{1}{R^p} \int_{-\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{(1-x)} \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int_0 \frac{dx}{(x+1)^p} = \frac{C_1(p)}{R^p}; \tag{25}$$

$$I_1^2 = \int_{-}^{-1} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\,dt \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{C_2(p)}{R^p}; \tag{26}$$

$$I_1^3 = \frac{1}{R^p} \int_{-1}^{0} \left| \int_0^1 \frac{\sin R(t-x)}{t-x}\,dt \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int_0^1 \left(\ln \frac{1+x}{x} \right)^p dx = \frac{C_3(p)}{R^p}, \tag{27}$$

$$\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{x+1}{x}\right)^p dx < \infty.$$

Дійсно, нехай $\ln\frac{x+1}{x} = y$, тоді

$$x = \frac{1}{e^y - 1}, \quad dx = -\frac{e^y dy}{(e^y-1)^2},$$

$$\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{x+1}{x}\right)^p dx = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{y^p e^y\, dy}{(e^y-1)^2} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{y^p}{e^y-1}\, dy + \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{y^p\, dy}{(e^y-1)^2} < \infty.$$

$$I_1^4 = \frac{1}{R^p}\int\limits_0^1 \left| \int\limits_x^1 \frac{\sin R(t-x)}{t-x}\, dt \right|^p dx = \frac{1}{R^{p+1}} \int\limits_0^R \left| \int\limits_0^u \frac{\sin z}{z}\, dz \right|^p du.$$

Тому що всі інтеграли $\int\limits_0^u \frac{\sin z}{z}\, dz$ рівномірно обмежені, то

$$I_1^4 \leqslant \frac{C_4(p)}{R^p}. \tag{28}$$

Таким чином, враховуючи (25), (26), (27) і (28), із (24) одержимо

$$\| \psi(x) \|_{L_p} \leqslant \frac{C}{R}, \tag{29}$$

де C — константа, яка залежить лише від p.

Нехай $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \sigma_R(\varphi)$, тоді, враховуючи (29), одержимо

$$\| \varphi_1(x) \|_{L_p} - \| \psi(x) \|_{L_p} \leqslant \| \varphi_1(x) - \psi(x) \|_{L_p} = \left(\int\limits_0^1 \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

тому

$$\| \varphi(x) - \sigma_R(\varphi) \|_{L_p} = \left(\int\limits_0^1 \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}} \right).$$

Але, тому що

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx = \frac{1}{R} \int\limits_0^R \left| \frac{\sin z}{z} \right|^p dz = \frac{1}{R} \int\limits_0^{\infty} \left| \frac{\sin z}{z} \right|^p dz + 0\left(\frac{1}{R}\right),$$

то

$$\| \varphi(x) - \sigma_R(\varphi) \|_{L_p} = \frac{\left(\int\limits_0^{\infty} \left| \frac{\sin z}{z} \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}}{R^{\frac{1}{p}}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}} \right),$$

що й треба було довести.

Лема V. *Нехай* $\varphi(x)$, *як в лемі (IV); тоді*

$$\left\{ \int\limits_{|x-1|>\delta} |\varphi(x)-\sigma_R(\varphi)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{C}{R},$$

де стала C залежить лише від δ *і p.*

Доведення. Аналогічно тому, як це робилося в лемі (IV), одержимо

$$\int\limits_{|x-1|>\delta} |\varphi(x)-\sigma_R(\varphi)|^p\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx = I_1 + I_2.$$

Враховуючи (25), (26) і (27), одержимо

$$I_1 \leqslant \frac{C(p)}{R^p}. \tag{30}$$

Далі

$$I_2 = \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} - \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx + \int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx. \tag{31}$$

Але

$$\int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \frac{\sin R(1-x)}{R(1-x)} \right|^p dx \leqslant \frac{1}{R^p} \int\limits_{0}^{1-\delta} \frac{dx}{(1-x)^p} = \frac{C_1(p_1\delta)}{R^p}; \tag{32}$$

$$\int\limits_{0}^{1-\delta} \left| \int\limits_{x}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx \leqslant \int\limits_{0}^{1} \left| \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin R(t-x)}{R(t-x)}\, dt \right|^p dx, \tag{33}$$

тому, враховуючи (30), (31), (32), (33) і (28), ми одержимо твердження леми.

Лема VI. *Нехай* $1 < p \leqslant \infty$; $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ *і*

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \varphi(x+1-x_k),$$

тоді

$$\|\psi(x)-\sigma_k(\psi)\|_{L_p} = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} |\sigma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} C(p)}{R^{\frac{1}{p}}} + 0\left(\frac{1}{R^{\frac{1}{p}}}\right),$$

де $C(p)$ — *константа та ж, що і в лемі IV.*

Доведення проводиться аналогічно доведенню відповідної леми в [6].

Теорема 6. *Нехай $f(x)$ — функція класу L_p $(1 < p \leqslant 2)$ і $x_1, x_2, \ldots$ точки, де $f(x)$ має розрив із стрибками $\sigma_k = f(x_k+0) - f(x_k-0)$. Тоді має місце асимптотична рівність*

$$\|f(x) - \sigma_R(f)\|_{L_p} \approx \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} C(p)}{R^{\frac{1}{p}}} \quad (R \to \infty), \tag{34}$$

де

$$C(p) = \left(\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin z}{z}\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Візьмемо $\Sigma > 0$ і підберемо m настільки великим, щоб

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |\sigma_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \tag{35}$$

та зобразимо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \psi(x) + h(x),$$

де

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \varphi(x + 1 - x_k).$$

Функція $h(x)$ має коливання в будь-якій точці дійсної осі не більше від ε. Беручи до уваги, що $h \in L_p v$, легко довести існування такого $\delta > 0$, для якого

$$\omega_p(h, \delta) < 2\varepsilon.$$

В силу теореми 1 одержимо

$$\|h(x) - \sigma_R(h)\|_{L_p} \leqslant \frac{C_1 \varepsilon^{\frac{1}{q}}}{R^{\frac{1}{p}}} \quad \left(R > \frac{1}{\delta}\right).$$

Звідси, беручи до уваги лему VI і нерівність (35), одержимо рівність (34).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гукевич В. И. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций (тезисы докладов). Л., 1959.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.
3. Ибрагимов И. И. Изв. АН СССР, с. м., т. 23, 1959.
4. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции, изд. 2, М., 1935.
5. Никольский С. М. Труды матем. института им. В. А. Стеклова, М., 1945.
6. Никольский С. М. Изв. АН СССР, с. м., т. 13, 1949.
7. Bochner S. Trans. Am. Math. Soc. 40, 1936.