Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

И. М. КОВАЛЬЧИК

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ ВИНЕРА

Преобразования кратных винеровских интегралов при параллельном переносе и общем линейном преобразовании изучались автором [1].

В данной заметке некоторые результаты Камерона и Фейгена [2] о нелинейном преобразовании однократного интеграла по мере Винера переносятся на случай многократного интеграла Винера. Будем придерживаться обозначений и терминологии, принятой в статье [1], где, в частности, даётся также и определение кратного интеграла Винера.

Для дальнейших целей введём несколько понятий.

Определение 1. Функционал $A(x, t)$, определённый на $S \times [0, 1]$, где S — выпуклое подмножество пространства C (состоящего из действительных непрерывных функций $x(t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 1]$, удовлетворяющих условие $x(0)=0$), будем называть функционалом с гладкой вариацией, если его первая вариация

$$\delta A(x, y, t) \equiv \frac{\partial}{\partial h} A(x+hy, t)\Big|_{h=0} \tag{1}$$

существует для всех $(x, t, y) \in S \times [0, 1] \times C$ и представима в виде

$$\delta A(x, y, t) = \int_0^1 K(x, t, s) \cdot y(s) ds, \tag{2}$$

где $K(x, t, s)$ — непрерывная функция по $(x, t, s) \in S \times [0, 1]^2$.

Функционал $A(x, t, s)$ назовём функционалом с полугладкой вариацией, когда представление (2) имеет место для $K(x, t, s)$ вида:

$$K(x, t, s) = \begin{cases} K^1(x, t, s) & \text{при } 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \\ K^2(x, t, s) & \text{при } 0 \leqslant s < t \leqslant 1, \\ \dfrac{K^1(x, s, s) + K^2(x, s, s)}{2} & \text{при } 0 \leqslant s = t \leqslant 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $K^1(x, t, s)$ и $K^2(x, t, s)$ непрерывны по $(x, t, s) \in S \times [0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1]$ и $(x, t, s) \in S \times [0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1]$ соответственно.

При этом в обоих случаях $K(x, t, s)$ будем называть ядром вариации $A(x, t)$.

Определение 2. Пусть $F(x, t)$ — функционал, определённый для всех x и t из $S \times [0, 1]$ и интегрируемый по t при всех x (где S — открытое подмножество C). Пусть x_ε — нижнее ε-усреднение x:

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} x(s)\,ds \quad (x(t) = 0 \text{ при } t < 0)$$

и пусть $F_\varepsilon(x, t)$ — верхнее ε-усреднение функции $F(x_\varepsilon, t)$:

$$F_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t}^{t+\varepsilon} F(x_\varepsilon, s)\,ds,$$

где $F(x, s) = \mathrm{const}$ при $s \in (1, +\infty)$ и фиксированном x.

Определим теперь главное функциональное значение интеграла Стильтьеса от F по $x(t)$ как следующий предел (если он существует и конечен):

$$\int\limits_0^1 F(x, t)\,d^*x(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^1 F_\varepsilon(x, t)\,dx(t).$$

Наиболее общие теоремы о нелинейном преобразовании интеграла Винера даны в работе Камерона и Фейгена (например, теорема 4).

Имеет место, в частности, такое утверждение [2]: пусть M — измеримое по Винеру подмножество C; предположим, что функционал $A(x, t)$ по крайней мере для одной окрестности U каждой точки $x \in M$ является функционалом с полугладкой вариацией в $U \times [0, 1]$, ядро которой есть $K(x, t, s)$. При некоторых предположениях относительно A (см. теорему 4 из [2]), если преобразование T

$$y(t) = x(t) + A(x, t) \tag{4}$$

отображает M та TM взаимооднозначно, то TM измеримо по Винеру, и, кроме того, если для некоторого измеримого по Винеру на TM функционала $F(y)$ существует одна из сторон равенства

$$\int\limits_{TM} F(y)\,d_W y = \int\limits_{M} F\,[x + A(x,t)] \cdot |D(x)| \times$$

$$\times \exp\left\{-2\int\limits_0^1 \frac{\partial A(x, t)}{\partial t}\,d^*x(t) - \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial A(x, t)}{\partial t}\right]^2 dt\right\} d_W x, \tag{5}$$

то существует и другая, и это равенство справедливо; здесь $D(x)$ обозначает определитель Фредгольма:

$$D(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \int\limits_0^1 \overset{(\nu)}{\cdots} \int\limits_0^1 \begin{vmatrix} K(x, s_1, s_1) \cdots K(x, s_1, s_\nu) \\ \cdots\cdots\cdots \\ K(x, s_\nu, s_1) \cdots K(x, s_\nu, s_\nu) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_\nu. \tag{6}$$

Мы будем изучать поведение кратного интеграла Винера

$$\int\limits_E f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,d_W y_1\,d_W y_2 \cdots d_W y_n \tag{7}$$

$$(E \subseteq \underbrace{C \times \ldots \times C}_{n})$$

при нелинейном преобразовании, которое задаётся системой интегральных уравнений:

$$y_k(t) = x_k(t) + \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 F_{kl}(x_l, t, s)\, ds \equiv x_k + \sum_{l=1}^{n} A_{kl}(x_l, t) \tag{8}$$

$$(k = 1, 2, \ldots n).$$

Систему n уравнений (8) можно свести к одному нелинейному интегральному уравнению, но только аргумент будет изменяться уже на сегменте $[0, n]$.

Действительно, предположим, что

$$x(t) = x_k(t - k + 1), \; k - 1 < t \leqslant k;$$

$$y(t) = y_k(t - k + 1), \; k - 1 < t \leqslant k;$$

$$F(x, t, s) = \begin{cases} F_{11}(x_1, t, s) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \; 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ F_{12}(x_2, t, s - 1) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \; 1 < s \leqslant 2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{1n}(x_n, t, s - n + 1) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \; n - 1 < s \leqslant n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n1}(x_1, t - n + 1, s) \text{ при } n - 1 < t \leqslant n, \; 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{nn}(x_n, t - n + 1, s - n + 1) \text{ при } n - 1 < t \leqslant n, \; n - 1 < \\ < s \leqslant n. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда вместо системы (8) получим одно интегральное уравнение

$$y(t) = x(t) + \int_0^n F(x, t, s)\, ds \equiv x(t) + A(x, t) \tag{10}$$

$$[0 \leqslant t \leqslant n].$$

Если же обозначить ядра вариаций функционалов A_{kl} через K_{kl} и ядро вариации функционала A через K, то

$$\delta A(x, t, s) = \int_0^n K(x, t, s)\, y(s)\, ds = \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 K_{kl}(x_k, t, s)\, y_l(s)\, ds.$$

Сформулируем теперь основную теорему работы.

Теорема. *Пусть* $E \subseteq \underbrace{C \times \ldots \times C}_{n}$ — *множество, измеримое по Винеру, и пусть* TE — *отображение* E *при преобразовании* (8), *где* $x_k \in E$, $y_k \in TE$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $x_i(1) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

Предположим, что:

1) функционалы $A_{kl}(x_l, t)$ по крайней мере для одной выпуклой окрестности U каждой точки $x_k \in E$ являются функционалами с гладкой вариацией при $k \neq l$ и с полугладкой вариацией при $k = l$ на множестве $E \times [0, 1]$;

2) функционал $A(x, t)$ удовлетворяет все условия теоремы Камерона—Фейгена.

Пусть $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — функционал, измеримый по Винеру на множестве TE.

Тогда имеет место равенство

$$\int_{TE} f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, d_W y_1\, d_W y_2 \ldots d_W y_n =$$

$$= \int_E f\Big(x_1 + \sum_{l=1}^{n} A_{1l};\ x_2 + \sum_{l=1}^{n} A_{2l};\ \ldots;\ x_n + \sum_{l=1}^{n} A_{nl}\Big) \times \tag{11}$$

$$\times |D(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \exp\Big\{-2 \sum_{k,l=1}^{n} \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_{kl}(x_l, t, s)\, ds\Big] d^* x_k(t) -$$

$$- \sum_{k,l=1}^{n} \int_0^1 \Big[\frac{d}{dt} \int_0^1 F_{kl}(x_l, t, s)\, ds\Big]^2 dt\Big\}\, d_W x_1\, d_W x_2 \ldots d_W x_n,$$

где

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu = 1}^{n} \overbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}^{(\nu)} \begin{vmatrix} K_{l_1 l_1}(x_{l_1}, s_1, s_1) \ldots K_{l_1 l_\nu}(x_{l_1}, s_1, s_\nu) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{l_\nu l_1}(x_{l_\nu}, s_\nu, s_1) \ldots K_{l_\nu l_\nu}(x_{l_\nu}, s_\nu, s_\nu) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_\nu,$$

и из существования одной части равенства (11) следует существование другой.

Метод доказательства тот же, что и в статье [1]. А именно, указанным раньше методом сводим n-кратный интеграл Винера (7) к однократному и подвергаем его преобразованию (10), использовав формулу (5) теоремы Камерона—Фейгена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковальчик И. М. Некоторые преобразования кратных интегралов Винера. Укр. матем. журнал № 1, 1960.

2. Cameron R. H., Fagen R. E. Non-linear transformations of Volterra type in Wiener space Trans. Amer. Math. Soc., № 3, 1953.