Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

И. И. ЧУЛЫК

О ФИЛЬТРАЦИИ КВАНТОВАННЫХ ШУМОВ

Задача о сглаживании стационарных случайных процессов [4], имеющая важное практическое применение, приводит к решению так называемого уравнения Винера—Хопфа. А именно, если линейная динамическая система находится под воздействием управляющего сигнала $m(t)$, являющегося стационарным в смысле Хинчена случайным процессом, и шума $n(t)$, то величина на выходе выражается формулой

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau.$$

Пусть подлежит воспроизведению случайный сигнал $h(t)$.

Считая известными корреляционные функции

$$R_{\varphi}(\tau)=M[\varphi(t+\tau)\varphi(t)],$$
$$R_{h\varphi}(t)=M[h(t+\tau)\varphi(t)],$$

можно поставить задачу о нахождении передаточной функции $k(t)$ $(k(t)=0,\ t<0)$ системы из условия минимума среднеквадратической ошибки

$$\overline{\varepsilon}^{2}=M[h(t)-x(t)]^{2}.$$

Тогда функция $k(t)$ определяется уравнением Винера—Хопфа:

$$R_{h\varphi}(\tau)-\int_{0}^{\infty}K_{\varphi}(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau,\ \tau>0, \tag{1}$$
$$k(t)=0,\ t<0.$$

Эффективное решение поставленной задачи возможно только при очень жестких ограничениях, накладываемых на спектральные плотности сигналов.

Используя введенное И. М. Гельфандом [2] понятие обобщенного стационарного случайного процесса, можно поставить аналогичную задачу о сглаживании обобщенных стационарных случайных процессов, в частности так называемых квантованных шумов. Тогда в уравнении (1) функции $R_{h\varphi}$, R_{φ}, $k(t)$ будут обобщенными функциями, а свертки следует понимать в смысле теории обобщенных функций.

Сведя уравнение (1) к системе парных интегральных уравнений [5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,R_{1}(x-t)\,dt+\lambda_{1}k(x)=g_{1}(x)\quad -\infty<x<0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) R_2(x-t)\,dt + \lambda_2 k(x) = g_2(x) \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

где

$$R_1,\ R_2,\ g_1(x),\ g_2(x) \text{ —} \tag{3}$$

известные функции, а λ_1, λ_2 — вещественные числа, можно решить поставленную задачу, решив соответствующую системе (2) задачу Гильберта [1, 3]. Это же на основании теоремы Н. Н. Боголюбова — О. С. Парасюка об аналитическом продолжении обобщенных функций будет иметь место, когда функции (3) являются обобщенными и интегрируемыми в некоторых классах $C(q, r, 1)$, а функции R_1, R_2 удовлетворяют условия, необходимые для существования сверток

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) R_i\,(x-t)\,dt \quad (i = 1,\ 2).$$

Обобщенная задача Гильберта в нашем случае будет формулироваться следующим образом. Если существует функция

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{ixt}\,dt,$$

удовлетворяющая условие (1), то существует также функция $H(z)$, голоморфная при $y > 0$, $y < 0$ и имеющая в смысле слабой сходимости пределы H_+, H_-:

$$\lim_{Imz \to 0,\ Imz > 0} H(z) = H_+(x),$$

$$\lim_{Imz \to 0,\ Imz < 0} H(z) = H_-(x),$$

причем

$$H_+(x) - S_\varphi(x) H_-(x) = S_m(x) \tag{4}$$

и S_φ, S_m — обобщенные функции, интегрируемые в классе $C(q, r, 1)$.

Решение задачи (4) выражается через интегралы типа Коши от обобщенной функции. А именно, если $S(t)$ — обобщенная функция, интегрируемая в классе $C(q, r, 1)$, то величину

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(t)\,dt}{z-t}$$

понимаем как значения функционала $S(\varphi)$ на функции $\varphi = \frac{1}{z-t}$. Если $S(t)$ не интегрируема в классе $C(q, r, 1)$, то необходимо разделить ее на такой полином, чтобы функция $\frac{S(t)}{P(t)}$ была интегрируемой в этом классе. Тогда будет иметь смысл интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(t)\,dt}{P(t)\,(z-t)}.$$

Эффективное решение задачи Гильберта получено для обобщенных случайных стационарных сигналов со спектральными плотностями полиномиального роста, для квантованных шумов Найквиста [6] и других, имеющих важное практическое значение при анализе флюктуаций как статистического, так и чисто квантового характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С. Об аналитическом продолжении обобщенных функций. ДАН СССР, т. 109, № 4, 1956.
2. Гельфанд И. М. Обобщенные случайные процессы. ДАН СССР, т. 100, в. 5, 1954.
3. Парасюк О. С. О парных интегральных уравнениях в классе обобщенных функций. ДАН СССР, т. 110, № 6, 1956.
4. Солодовников В. В. Введение в статическую динамику систем автоматического управления. М., 1952.
5. Раппопорт И. М. О некоторых парных интегральных и интеграло-дифференциальных уравнениях. Сб. трудов Ин-та мат. АН УССР, № 12, 1949.
6. Файн В. М. Квантовые явления в радиодиапазоне. УФН, т. 64, в. 2, 1958.