Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

О. І. БОБИК

ПРО СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглянемо систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n+k} p_{ij}(t)\, x_j \quad (i = 1, \ldots, n), \\ &\mu_s \frac{dx_{n+s}}{dt} = \sum_{j=1}^{n+k} p_{ij}(t)\, x_j \quad (s = 1, \ldots, k), \end{aligned} \tag{1}$$

де μ_s $(s = 1, \ldots, k)$ — малі параметри.

Нехай додержуються такі умови:

а) функції $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n+k)$ — неперервні та обмежені разом з похідними першого порядку;

б)
$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{n+1,\, n+1}(t) \ldots p_{n+1,\, n+k}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n+k,\, n+1}(t) \ldots p_{n+k,\, n+1}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

при $t \geqslant t_0$.

Якщо $\mu_s = 0$ $(s = 1, \ldots, k)$, то з системи (1) можна виключити $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$. Одержимо

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j - \sum_{j=n+1}^{n+k} p_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{x_l A_l^{(j)}}{\Delta} \right) \tag{2}$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

де

$$A_l^{(j)} = \begin{vmatrix} p_{n+1,\, n+1} \cdots p_{n+1,\, j-1}\, p_{n+1,\, l}\, p_{n+1,\, j+1} \cdots p_{n+1,\, n+k} \\ \cdot \\ p_{n+k,\, n+1} \cdots p_{n+k,\, j-1}\, p_{n+k,\, l}\, p_{n+k,\, j+1} \cdots p_{n+k,\, n+k} \end{vmatrix}$$
$$(j = n+1, \ldots, n+k;\ l = 1, \ldots, n).$$

Систему (2) назвемо «виродженою».

Виясним умови, при яких з асимптотичної стійкості «виродженої» системи (2) випливає асимптотична стійкість системи (1). Для $s = 1$ це питання розглянуте в роботі Б. С. Разумихіна [2].

Нехай для системи (2) знайдена функція Ляпунова n змінних у вигляді додатно визначеної квадратичної форми

$$V_0 = \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Розглянемо квадратичну форму $(n+k)$ змінних

$$V = V_0 + \mu_1 (2\alpha_{1,\, n+1} x_1 x_{n+1} + \ldots + 2\alpha_{n,\, n+1} x_n x_{n+1} + \alpha_{n+1,\, n+1} x^2_{n+1}) + \ldots$$
$$\ldots + \mu_k (2\alpha_{1,\, n+k} x_1 x_{n+k} + \ldots + 2\alpha_{n,\, n+k} x_n x_{n+k} + \alpha_{n+k,\, n+k} x^2_{n+k})$$

і вияснимо, чи можна коефіцієнти $\alpha_{i,\, n+s}$, $\alpha_{n+s,\, n+s}$ $(i = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k)$ вибрати так, щоб одержати квадратичну форму, яка буде функцією Ляпунова для системи (1).

Будемо позначати $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\mu}$, $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{\mu}$ похідні квадратичних форм згідно з системою (1), $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{0}$ — згідно з системою (2).

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\mu} = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{\mu} + \left[2\mu_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_{i,\, n+1}}{dt} x_i x_{n+1} + \right.$$
$$+ 2\mu_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\, n+1} x_{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{ij} x_j\right) + 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\, n+1} x_i \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{n+1,\, j}\, x_j\right) +$$
$$\left. + 2\alpha_{n+1,\, n+1} x_{n+1} \sum_{j=1}^{n+k} p_{n+1,\, j}\, x_j + \mu_1 \frac{d\alpha_{n+1,\, n+1}}{dt} x^2_{n+1}\right] + \tag{3}$$
$$+ \ldots + \left[2\mu_k \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_{i,\, n+k}}{dt} x_i x_{n+k} + 2\mu_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\, n+k} x_{n+k} \left(\sum_{j=1}^{n=k} p_{ij} x_j\right) + \right.$$
$$+ 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,\, n+k} x_i \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{n+k,\, j}\, x_j\right) + 2\alpha_{n+k,\, n+k} x_{n+k} \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{n+k,\, j}\, x_j\right) +$$
$$\left. + \mu_k \frac{d\alpha_{n+k,\, n+k}}{dt} x^2_{n+k}\right].$$

Введемо замість $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ змінні $y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$.

$$y_{n+s} = \sum_{j=1}^{n+k} p_{n+s,\, j}\, x_j \tag{4}$$
$$(s = 1, \ldots, k).$$

Тоді $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{\mu}$ можна визначити через $\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{0}$:

$$\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{\mu} = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{0} + 2 \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \left(\sum_{j=1}^{n+k} p_{ij} \frac{A_y^{(j)}}{\Delta}\right), \tag{5}$$

де

$$A_y^{(j)} = \begin{vmatrix} p_{n+1, n+1} \cdots p_{n+1, j-1}\, y_{n+1}\, p_{n+1, j+1} \cdots p_{n+1, n+k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n+k, n+1} \cdots p_{n+k, j-1}\, y_{n+k}\, p_{n+k, j+1} \cdots p_{n+k, n+k} \end{vmatrix}$$

$$(j = n+1, \ldots, n+k).$$

Користуючись рівностями (4) і (5) та позначеннями

$$U_s = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{d\alpha_{i, n+s}}{dt} x_j \frac{A_y^{(n+s)} - \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+s)}}{\Delta} +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i, n+1} \frac{A_y^{(n+s)} - \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+s)}}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n+1}^{n+k} p_{ij} \frac{A_y^{(j)} - \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(j)}}{\Delta}\right) + \frac{d\,\alpha_{n+s, n+s}}{dt} \left(\frac{A_y^{(n+s)} - \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+s)}}{\Delta}\right)^2,$$

$$(s = 1, \ldots, k),$$

після ряду перетворень можна (3) записати у такому вигляді:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\mu} = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + \mu_1 U_1 + \ldots + \mu_k U_k +$$

$$+ 2y_{n+1}\left[\frac{1}{\Delta}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \left(\sum_{l=n+1}^{n+k} p_{il} \Delta_{n+1, l}\right) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i, n+1} x_i - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_{n+1, n+1}}{\Delta} \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+1)}\right] + \ldots + 2y_{n+k}\left[\frac{1}{\Delta}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \left(\sum_{l=n+1}^{n+k} p_{il} \Delta_{n+k, l}\right) + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i, n+1} x_i - \frac{\alpha_{n+k, n+k}}{\Delta} \sum_{l=1}^{n} x_l A_l^{(n+k)}\right] + 2\sum_{i,j=n+1}^{n+k} \frac{\alpha_{ii}}{\Delta} \Delta_{ji} y_i y_j$$

$$(s = 1, \ldots, k),$$

де $\Delta_{ji}\,(j, i = n+1, \ldots, n+k)$ — алгебричні доповнення до елементів p_{ji} визначника Δ.

Припускаючи, що квадратична форма V додатно визначена, а квадратична форма $\frac{dV}{dt}$ від'ємно визначена, одержуємо з умов знаковизначеності:

$$\mu_s \alpha_{n+s, n+s} > 0$$
$$(s = 1, \ldots, k) \tag{7}$$

і головні мінори визначника

$$(-1)^k \left| \begin{array}{c} \alpha_{n+1,\,n+1}\frac{\Delta_{n+1,n+1}}{\Delta}\,\alpha_{n+1,\,n+1}\frac{\Delta_{n+2,n+1}}{\Delta}+\alpha_{n+2,\,n+2}\frac{\Delta_{n+1,n+2}}{\Delta}\ \dots \\ \dots\ \alpha_{n+1,\,n+1}\frac{\Delta_{n+k,n+1}}{\Delta}+\alpha_{n+k,\,n+k}\frac{\Delta_{n+1,n+k}}{\Delta}\,\alpha_{n+1,\,n+1}\frac{\Delta_{n+2,n+1}}{\Delta}+ \\ +\alpha_{n+2,\,n+2}\frac{\Delta_{n+1,n+2}}{\Delta}\,\alpha_{n+2,\,n+2}\frac{\Delta_{n+2,n+2}}{\Delta}\ \dots\ \alpha_{n+2,\,n+2}\frac{\Delta_{n+k,n+2}}{\Delta}+ \\ +\alpha_{n+k,\,n+k}\frac{\Delta_{n+2,n+k}}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\alpha_{n+1,\,n+1}+\frac{\Delta_{n+k,n+k}}{\Delta}+\alpha_{n+k,\,n+k}\frac{\Delta_{n+1,n+k}}{\Delta}\,\alpha_{n+2,\,n+2}\frac{\Delta_{n+k,n+2}}{\Delta}+ \\ +\alpha_{n+k,\,n+k}\frac{\Delta_{n+2,n+k}}{\Delta}\ \dots\ \alpha_{n+k,\,n+k}\frac{\Delta_{n+k,n+k}}{\Delta} \end{array} \right| \qquad (8)$$

додатні.

Виберемо $\alpha_{n+s,\,n+s}$ $(s=1,...,k)$ так, щоб виконувалася умова (7) і головні мінори визначника (8) були додатні. Коефіцієнти $\alpha_{i,\,n+s}$ $(i=1,...,n;\ s=1,...,k)$ визначимо рівностями

$$\alpha_{i,\,n+s}=\frac{\alpha_{n+s,\,n+s}}{\Delta}\sum_{l=1}^{n}x_l A_l^{(n+1)}-\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\Bigl(\sum_{l=n+1}^{n+k}p_{il}\Delta_{n+s,\,l}\Bigr). \qquad (9)$$

Згідно з умовами а) і б) $\alpha_{i,\,n+s}$ є неперервними і обмеженими функціями часу.

Очевидно, що умова (7) і вимога, щоб головні мінори визначника (8) були додатні, є достатніми, щоб з асимптотичної стійкості системи (2) випливала асимптотична стійкість системи (1).

Дійсно, функція V додатно визначена, оскільки V_0 додатно визначена, μ_s $(s=1,...,k)$ досить малі і виконуються умови (7). В цьому легко переконатися, виписавши визначник форми. Підставивши (9) в (6), одержимо

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\mu}=\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0+\mu_1U_1+\ldots+\mu_kU_k+2\sum_{i,j=n+1}^{n+k}\frac{\alpha_{ii}}{\Delta}\Delta_{ji}y_iy_j.$$

Оскільки коефіцієнти $\gamma_{ij}^{(s)}$ квадратичних форм

$$U_s=\sum_{i,j=1}^{n+k}\gamma_{ij}^{(s)}z_iz_j,\quad z_i=\begin{cases}x_i, \text{ якщо } 1\leqslant i\leqslant n\\ y_i \text{ якщо } n+1\leqslant i\leqslant n+k\end{cases}$$

через неперервність і обмеженість коефіцієнтів p_{ij} $(i,j=1,...,n+k)$ та їх перших похідних є обмеженими функціями часу, то при досить малих μ_s $(s=1,...,k)$ квадратична форма $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\mu}$ від'ємно визначена, якщо від'ємно визначена квадратична форма

$$\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0+2\sum_{i,j=1}^{n+k}\frac{\alpha_{ii}}{\Delta}\Delta_{ji}y_iy_j. \qquad (10)$$

А квадратична форма (10) від'ємно визначена згідно з припущенням відносно V_0 і умовою, що головні мінори визначника (8) додатні. Таким чином, вірна така теорема.

Теорема. *Асимптотична стійкість системи (1) випливає з асимптотичної стійкості «виродженої» системи (2), якщо:*

1) $P_{ij}(t)$ — *неперервні та обмежені разом з похідними першого порядку,*

2) $\Delta \neq 0$ *при* $t \geqslant t_0$,

3) *можна вибрати такі* $\alpha_{n+s,\, n+s}$ $(s = 1,\dots,k)$, *що* $\mu_s \alpha_{n+s,\, n+s} > 0$ і *головні мінори визначника (8) додатні.*

Як наслідок наведемо ознаку, коли умови теореми виконуються.

Наслідок. Якщо для системи (1) виконуються умови 1 і 2 теореми і, крім того,

а) $\Delta_{ii} > 0$ $(i = n+1,\dots,n+k)$,

б) $\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = 0$ при $j = n+1,\dots,n+k-2,\ i > j+1$,

в) $\Delta_{ij} \cdot \Delta_{ji} < 0$ при $j = n+1,\dots,n+k-1,\ i = j+1$,

г) $\mu_3 \Delta < 0$ $(s = 1,\dots,k)$,

то з асимптотичної стійкості системи (2) випливає асимптотична стійкість системи (1).

Дійсно, визначимо $\alpha_{n+s,\, n+s}$ $(s = 1,\dots,k)$ із співвідношень

$$\alpha_{n+1,\, n+1} \Delta < 0, \quad \alpha_{n+s,\, n+s} = -\frac{\Delta_{n+s,\, n+s-1}}{\Delta_{n+s-1,\, n+s}} \alpha_{n+s-1,\, n+s-1}$$

$$(s = 2, \dots, k).$$

Очевидно, що $\alpha_{n+s,\, n+s} \Delta < 0 (s = 1,\dots,k)$, і для визначених таким способом $\alpha_{n+s,\, n+s}$ головні мінори визначника (8) додатні. Згідно з г) виконуються і умови (7).

ЛІТЕРАТУРА

1. Малкин М. Г. Теория устойчивости движения. М., 1952.

2. Разумыхин Б. С. Об устойчивости систем с малым множителем. ПММ, т. 21, в. 4, стор. 578—580.