

О. М. ШАБЛИЙ

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИЙ СТАН КРУГЛОЇ ПЛИТИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ КОНЦЕНТРИЧНИМ РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

Постановка задачі. Розглянемо круглу тонку пружну ізотропну плиту постійної товщини $2h$ з радіусом R , підкріплену концентричним кільцем на довільному радіусі R_1 .

Плита жорстко закріплена на контурі $r = R$ і знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження по всій поверхні плити. Кільце будемо вважати тонким, тобто таким, деформації якого описуються рівняннями малих деформацій тонких криволінійних стержнів. Середня площа кільця співпадає з середньою площиною плити.

Потрібно: 1) визначити границю пружного опору плити, тобто знайти для кожного підкріплюючого кільця в залежності від його жорсткості та положення на радіусі відповідне максимальне значення навантаження, при якому появляється перша пластична зона на поверхні плити; 2) визначити пружно-пластичний стан плити. Тому що ми будемо оперувати тільки величиною жорсткості кільця, то вона може бути розшифрована як жорсткість пружного або пружно-пластичного кільця відповідних розмірів. Коефіцієнт Пуассона вважається рівний $\nu = 0,5$.

Вихідні формули рівняння і позначення. Для зручності позначимо: область всередині кільця D_1 , зовні кільця — D , границю між ними — L_1 , зовнішню границю — L . Індекс (1) завжди буде відноситися до області D_1 . Введемо такі відомі [1] позначення рівняння і формули, які мають місце в області D_1 і D :

$$x = \frac{r}{R}, \quad z = \frac{Z}{h}, \quad w = \frac{W}{h}, \quad b = \frac{R_1}{R} \quad (1)$$

безрозмірні координати, прогин і радіус;

$$\alpha(x) = -\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_s} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx}\right),$$
$$\zeta(x) = -\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_s} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dw}{dx}\right) - \quad (2)$$

безрозмірні функції, які зв'язані співвідношенням

$$\frac{d\alpha}{dx} - 2 \frac{d\zeta}{dx} = \frac{3(\alpha - \zeta)}{x}; \quad (3)$$

σ_s — умовна границя текучості матеріалу плити;

$$w = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \int (2\zeta - \alpha) x dx + C, \quad (4)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2 (2\zeta - \alpha) x - \quad (5)$$

безрозмірний прогин і його похідна.

Напруження при пружних деформаціях визначаються за формулами:

$$\sigma_r = \sigma_s \alpha z, \quad \sigma_\theta = \sigma_s \zeta z. \quad (6)$$

Умовою пластичності візьмемо умову постійності найбільшого за модулем дотичного напруження:

$$\tau = \kappa_* \tau_s, \quad (7)$$

де τ_s — умовна границя текучості для зсуву (в нашому випадку $\tau_s = 1/2 \sigma_s$), $\kappa_* = \text{sign} \gamma$ — кут зсуву, τ — найбільше головне дотичне напруження, яке визначається однією з формул:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_\theta|; \quad |\tau_2| = \frac{1}{2} |\sigma_r|; \quad \tau_3 = \frac{1}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta|. \quad (8)$$

Напруження в областях пружно-пластичних деформацій визначаються за формулами:

$$\sigma_r = \kappa \frac{\alpha}{\zeta} \sigma_s; \quad \sigma_\theta = \kappa \sigma_s, \quad \text{коли } |\tau_1| \geq \begin{cases} |\tau_2| \\ |\tau_3| \end{cases}, \quad (9)$$

$$\sigma_r = -\kappa \sigma_s; \quad \sigma_\theta = -\kappa \frac{\zeta}{\alpha} \sigma_s, \quad \text{коли } |\tau_2| \geq \begin{cases} |\tau_1| \\ |\tau_3| \end{cases}, \quad (10)$$

$$\sigma_r = -\kappa \frac{\alpha}{\alpha - \zeta} \sigma_s; \quad \sigma_\theta = -\kappa \frac{\zeta}{\alpha - \zeta} \sigma_s, \quad \text{коли } |\tau_3| \geq \begin{cases} |\tau_1| \\ |\tau_2| \end{cases}, \quad (11)$$

$$\kappa = \text{sign} z.$$

Рівняння рівноваги елементу пластинки в безрозмірних координатах має такий вигляд:

$$\frac{dM_r}{dx} + \frac{M_r - M_\theta}{x} = -RQ(x), \quad (12)$$

де $Q(x) = \frac{q^D}{2} x$ — перерізувача сила в області $D_1 + D$, тому що перерізувача сила неперервна при переході через L_1 .

Рівняння (11) можна переписати в такому вигляді:

а) для пружних деформацій:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\alpha - \zeta}{x} = -\frac{3}{2} Q_*; \quad Q_* = \frac{R}{\sigma_s h^2} Q(x); \quad (13)$$

б) для пружно-пластичних деформацій:

$$\frac{d\alpha}{dx} \Phi_1 + \frac{d\zeta}{dx} \Phi_2 = \frac{\Phi_3}{x} - Q_*, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{3\zeta^2} \right); \quad \Phi_2 = -\frac{\alpha}{\zeta^2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right); \quad \Phi_3 = \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{\zeta} \right) \left(1 - \frac{1}{3\zeta^2} \right), \quad \text{коли } |\tau_1| \geq \begin{cases} |\tau_2| \\ |\tau_3| \end{cases}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Phi_1 = -\frac{2}{3} \frac{1}{\alpha^3}; \quad \Phi_2 = 0; \quad \Phi_3 = \left(\frac{\zeta}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{1}{3\alpha^2} - 1 \right), \quad \text{коли } |\tau_2| \geq \left\{ \begin{array}{l} |\tau_1| \\ |\tau_2| \end{array} \right\}, \quad (16)$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{(\alpha - \zeta)^2} \left[\zeta - \frac{2\alpha + \zeta}{3(\alpha - \zeta)^2} \right]; \quad \Phi_2 = \frac{\alpha}{(\alpha - \zeta)^2} \left[\frac{1}{(\alpha - \zeta)^2} - 1 \right];$$

$$\Phi_3 = 1 - \frac{1}{3(\alpha - \zeta)^2}, \quad \text{коли } |\tau_3| \geq \left\{ \begin{array}{l} |\tau_1| \\ |\tau_2| \end{array} \right\}. \quad (17)$$

Пружні деформації. Для визначення функцій $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ розв'язуємо систему диференціальних рівнянь (3)–(12). Враховуючи симетрію відносно центра плити, загальним розв'язком цієї системи буде:

в області D_1 :

$$\alpha_1(x) = -\frac{21}{64} p x^2 + \frac{C_1}{2};$$

$$\zeta_1(x) = -\frac{15}{64} p x^2 + \frac{C_1}{2}; \quad (18)$$

в області D :

$$\alpha(x) = -\frac{21}{64} p x^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{2};$$

$$\zeta(x) = -\frac{15}{64} p x^2 - \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{2}; \quad p = \frac{q R^2}{\sigma_s h^2}. \quad (19)$$

Для визначення сталих C_1, C_2, C_3 маємо дві граничні умови на границі L і три умови спряження на границі L_1 :

$$w = 0,$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{на } L (x=1),$$

$$w_1 = w,$$

$$\frac{dw_1}{dx} = \frac{dw}{dx},$$

$$\alpha - \alpha_1 = -\frac{3}{2} \frac{A}{\sigma_s h R_1^2 R} \frac{dw}{dx} \quad \text{на } L_1 (x=b), \quad (20)$$

де $A = E_k I_k$ — жорсткість кільця на згин.

Сталі C_1, C_2, C_3 визначаються з другої, четвертої і п'ятої граничних умов. Останні дві умови служать для визначення двох сталих C при знаходженні прогинів за формулою (4) відповідно в області D_1 і D .

Після визначення сталих функції $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ мають вигляд: в області D_1 :

$$\alpha_1(x) = \frac{3p}{64} \left\{ 3b \frac{\Delta b (1 - b^2) + 2}{\Delta (1 - b^2) + 2b} - 7x^2 \right\},$$

$$\zeta_1(x) = \frac{3p}{64} \left\{ 3b \frac{\Delta b (1 - b^2) + 2}{\Delta (1 - b^2) + 2b} - 5x^2 \right\}; \quad (21)$$

в області D :

$$\alpha(x) = \frac{3p}{64} \left\{ 3 \frac{\Delta (1 - b^4) + 2b}{\Delta (1 - b^2) + 2b} + \frac{b^2}{x^2} \frac{\Delta (1 - b^2)}{\Delta (1 - b^2) + 2b} - 7x^2 \right\},$$

$$\zeta(x) = \frac{3p}{64} \left\{ 3 \frac{\Delta(1-b^4) + 2b}{\Delta(1-b^2) + 2b} - \frac{b^2}{x^2} \frac{\Delta(1-b^2)}{\Delta(1-b^2) + 2b} - 5x^2 \right\}, \quad (22)$$

де $\Delta = \frac{9A}{8Eh^3R}$.

Границя пружного опору плити. Існують області зміни Δ і b , в яких відповідні величини $|\alpha(x)|$, $|\zeta(x)|$ чи $|\alpha(x) - \zeta(x)|$ мають максимальне значення. Після аналізу формул (21), (22) виявилося, що кожна з величин $|\alpha(x=1)|$, $|\zeta_1(x=0)|$, $|\alpha_1(x=b)|$ досягає свого максимального значення порівняно з усіма можливими значеннями всіх цих функцій і $|\zeta(x) - \alpha(x)|$ [при довільних x] відповідно в областях I, II та III, які визначаються такими нерівностями:

область I:

$$0 < b < 0.793, \quad 0 < \Delta < \frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)};$$

$$0.793 < b < 0.877, \quad 0 < \Delta < \frac{2b}{11b^2-7b^4-4};$$

$$0.877 < b < 1, \quad 0 < \Delta < \frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)};$$

область II:

$$0.793 < b < 0.877, \quad \frac{2b}{11b^2-7b^4-4} < \Delta < \frac{2(6-7b^2)}{b(1-b^2)};$$

область III:

$$\sqrt{0.5} < b < 0.793, \quad \frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)} < \Delta < \infty;$$

$$0.793 < b < 0.877, \quad \frac{2(6-7b^2)}{b(1-b^2)} < \Delta < \infty;$$

$$0.877 < b < 1, \quad \frac{7b(1-b^2)}{2(3b^2-2b^4-1)} < \Delta < \infty.$$

В області I значення $p = p_s$, при перевищенні якого виникають пластичні деформації, визначається з умови $\alpha(x=1) = -1$ і дорівнює:

$$p_{s1} = \frac{16}{3} \frac{\Delta(1-b^2) + 2b}{\Delta(1-b^2)^2 + 2b}. \quad (23)$$

В області II з умови $\zeta_1(x=0) = 1$ визначаємо p_s у вигляді:

$$p_{s2} = \frac{64}{9} \frac{\Delta(1-b^2) + 2b}{\Delta(1-b^2)b^2 + 2b}. \quad (24)$$

В області III з умови $\alpha_1(x=b) = -1$ маємо

$$p_{s3} = \frac{32}{3} \frac{\Delta(1-b^2) + 2b}{2\Delta b^2(1-b^2) + 7b^3 - 3b}. \quad (25)$$

Значення p_{s1} і p_{s3} при $\Delta \rightarrow \infty$ асимптотично прямують до величин, які відповідно рівні:

$$p_{s1}(\Delta = \infty) = \frac{16}{3} \frac{1}{1-b^2}, \quad (26)$$

$$p_{s3}(\Delta = \infty) = \frac{16}{3} \frac{1}{b^2}, \quad (27)$$

причому формула (26) вірна при $0 \leq b \leq \sqrt{0.5}$, а (27) при $\sqrt{0.5} \leq b < 1$. Звідси випливає, що максимальна границя пружного опору кільця дорівнює:

$$p_s = p_{s1}(\Delta = \infty, b = \sqrt{0.5}) = p_{s3}(\Delta = \infty, b = \sqrt{0.5}) = \frac{32}{3},$$

тобто вона в два рази більша від границі пружного опору жорстко закріпленої плити без підкріплюючого кільця ($\Delta = 0$).

Оптимальне розміщення кільця на радіусі визначається з таких рівнянь:

$$0 \leq \Delta \leq 7,3, \Delta b^4 - 3b^3 - 2\Delta b^2 + b + \Delta = 0, \quad (28)$$

$$7,3 \leq \Delta \leq 11, 7\Delta b^4 - 11\Delta b^2 + 2b + 4\Delta = 0, \quad (29)$$

$$11 \leq \Delta < \infty, 4\Delta b^4 - 7b^3 - 6\Delta b^2 + 7b + 2\Delta = 0. \quad (30)$$

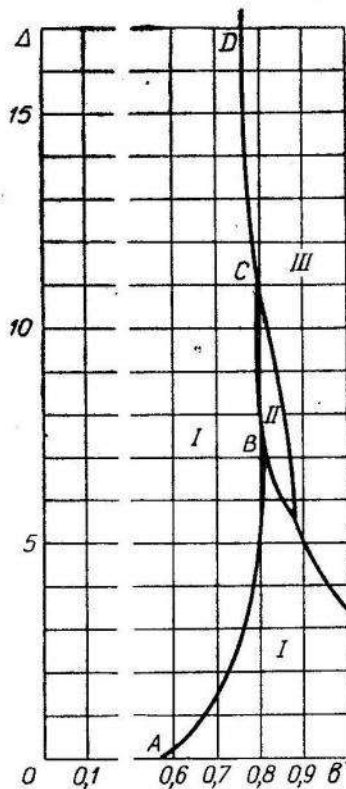


Рис. 1.

В прямокутній системі координат (Δ, b) ці рівняння будуть описувати деяку ламану криву $ABCD$ (рис. 1). Цю криву назовемо кривою оптимального розміщення. Для точок кривої $ABCD$ при значеннях $\Delta > 20$ підкріплююче кільце з достатньою для практики точністю (до 4%) можна вважати за абсолютно жорстке, тобто для них можна вважати, що

$$p_s = \frac{16}{3} \frac{1}{b^2}.$$

Пружно-пластичний напружений стан. При значеннях навантаження, коли $p > p_s$, для визначення $\alpha(x)$, $\zeta(x)$ потрібно розв'язувати пружно-пластичну задачу.

В областях пружно-пластичних деформацій $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ визначаються з системи рівнянь (3)–(14) при відповідних значеннях функцій Φ_1 , Φ_2 і Φ_3 .

Будемо розглядати пружно-пластичний напружений стан плити при значеннях (Δ, b), які лежать на кривій оптимального розміщення $ABCD$. Аналогічно це можна робити для всіх інших значень (Δ, b).

Коли (Δ, b) належать кривій AB , то $|\alpha(x=1)|$ буде максимальним і з рівнянь (14), (3) одержимо

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left[\frac{3}{8} p x^2 - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\zeta}{\alpha} \right) \left(1 - \frac{7}{3\alpha^2} \right) \right] \frac{\alpha^3}{x}. \quad (31)$$

При значенні навантаження, коли $p > p_{s1}$, біля границі L появляється зона пружно-пластичних деформацій, яка поширюється на відрізок $0_1 \leq x \leq 1$, і функції $\alpha(x)$, $\zeta(x)$ визначаються інтегруванням системи (3)–(31) при граничних умовах

$$\zeta = \zeta_{0_1}; \quad 2\zeta(x=1) = \alpha(x=1). \quad (32)$$

При $0 < x < q_1$ плита буде в пружному стані і функції $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ визначатимуться за формулами (18), (19).

Після задоволення останніх двох умов (20) функції $\alpha(x)$ і $\zeta(x)$ мають такий вигляд:

при $0 \leq x \leq b$:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x) &= -\frac{21}{64}px^2 + \zeta_0; \\ \zeta_1(x) &= -\frac{15}{64}px^2 + \zeta_0;\end{aligned}\quad (33)$$

при $b \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= -\frac{21}{64}px^2 + \frac{\Delta}{x^2} \left(\frac{b}{6} \zeta_0 - \frac{3pb^3}{128} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\Delta}{2b} + 1 \right) - \frac{9p\Delta b}{128}; \\ \zeta(x) &= -\frac{15}{64}px^2 - \frac{\Delta}{x^2} \left(\frac{b}{6} \zeta_0 - \frac{3pb^3}{128} \right) + \zeta_0 \left(\frac{\Delta}{2b} + 1 \right) - \frac{9p\Delta b}{128},\end{aligned}\quad (34)$$

де $\zeta_0 = \zeta_1(x=0) = \alpha_1(x=0)$.

З умови $\alpha(x=q) = -1$ одержимо рівняння для визначення q_1 у вигляді:

$$\frac{21}{64}pp_1^4 + \left\{ \frac{9p\Delta b}{128} - \zeta_0 \left(\frac{\Delta}{2b} + 1 \right) - 1 \right\} p_1^2 - \Delta \left(\frac{b}{6} \zeta_0 - \frac{3pb^3}{128} \right) = 0. \quad (35)$$

Тому, що система рівнянь (3) — (31) нелінійна, інтегрування її будемо проводити наближеним методом. Процес підрахунків виглядатиме так.

Припустивши, що $p > p_s$, вибираємо значення ζ_0 , а потім за формулою (35) визначаємо q_1 і за (34) — $\zeta(x=q_1)$.

В інтервалі $q_1 < x < 1$ обчислення ведуться за формулами:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)_n \delta x; \quad \zeta_{n+1} = \zeta_n + \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)_n \delta x, \quad (36)$$

де α_n, ζ_n — значення цих функцій на початку n -го інтервалу.

Підбираємо ζ_0 так, щоб задовольнити другу з граничних умов (32). Збільшуючи навантаження, обчислення проводимо таким способом до появи другої пластичної зони, для якої теж потрібно розв'язувати пружно-пластичну задачу.

Змінюючи (Δ, b) по кривій BC , будемо мати випадок одночасної появи пластичних зон біля границі $L [q_2 < x < 1]$ і в центрі плити $[0 < x < q_3]$. В інтервалі $q_2 < x < 1$ потрібно інтегрувати систему (3) — (31), а в $[0 < x < q_3]$ друге рівняння заміниться таким:

$$\frac{d\zeta}{dx} = - \frac{2 \left(1 - \frac{1}{3\zeta^2} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{\zeta} \right) + \frac{p}{2} x^2}{2 \left(1 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right) - \frac{\alpha}{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)} \cdot \frac{\zeta}{x}. \quad (37)$$

В центрі плити $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} = 0$. Обчислення проводяться в такій послідовності. Припустимо, що $p > p_s$. Вибираємо $\zeta_0 = \alpha_0$ і інтегруємо систему (3) — (37) за формулами (36) до значення $x = q_3$, при якому $\zeta_1(x=q_3) = 1$. В інтервалі $q_3 < x < b$ $\alpha(x), \zeta(x)$ визначаються за формулами (18), причому стала C_1 визначається з умови $\zeta_1 = \zeta_{q_3}$. При $b < x < q_2$ $\alpha(x), \zeta(x)$ визначаються за формулами (19), а сталі C_2 і C_3 — з останніх двох умов (20).

Значення q_2 визначаємо з умови $\alpha(x=q_2)=-1$, де $\alpha(x)$ береться з формул (19).

В інтервалі $q_2 < x < 1$ інтегруємо систему (3)–(31), використовуючи формули (36), при граничних умовах $\zeta = \zeta_{p_2}$, $2\zeta(x=1) = \alpha(x=1)$ ζ_0 підбираємо так, щоб задовольнити другу граничну умову.

Коли (Δ, b) знаходяться на кривій CD , пластичні зони появляются одночасно біля границі L і на внутрішній стороні L_1 ($x < b$). При $0 < x < q_4$ мають місце формули (33). Припустивши, що ζ_0 , для визначення q_4 будемо мати рівняння:

$$\frac{21}{64}pp_4^2 - \zeta_0 - 1 = 0. \quad (38)$$

Знайшовши $\zeta(x=q_4)$, інтегруємо систему (3)–(31) в інтервалі $[q_4 < x < b]$ за формулами (36) і знаходимо $\alpha_1(x=b)$, $\zeta_1(x=b)$. За формулою (5) визначаємо $\frac{dw_1}{dx}$ при $x=b$. Підставивши $\alpha_1(x=b)$ і $\frac{dw_1}{dx}(x=b)$ в останні дві умови (20), одержимо два рівняння для визначення сталих C_2 і C_3 , які входять у формули (19). Вони мають місце на інтервалі $[b < x < q_5]$. Величину q_5 визначаємо з умови $\alpha(x=q_5) = -1$, де $\alpha(x=q_5)$ визначається за першою з формул (19). В інтервалі $[q_5 < x < 1]$ інтегруємо систему (3)–(31) при граничних умовах $\zeta = \zeta_{p_5}$, $2\zeta(x=1) = \alpha(x=1)$. ζ_0 підбираємо так, щоб задовольнити другу граничну умову.

На рис. 2 наведені графіки функції $\alpha(x)$ в залежності від (Δ, b) , які знаходяться на кривій $ABCD$.

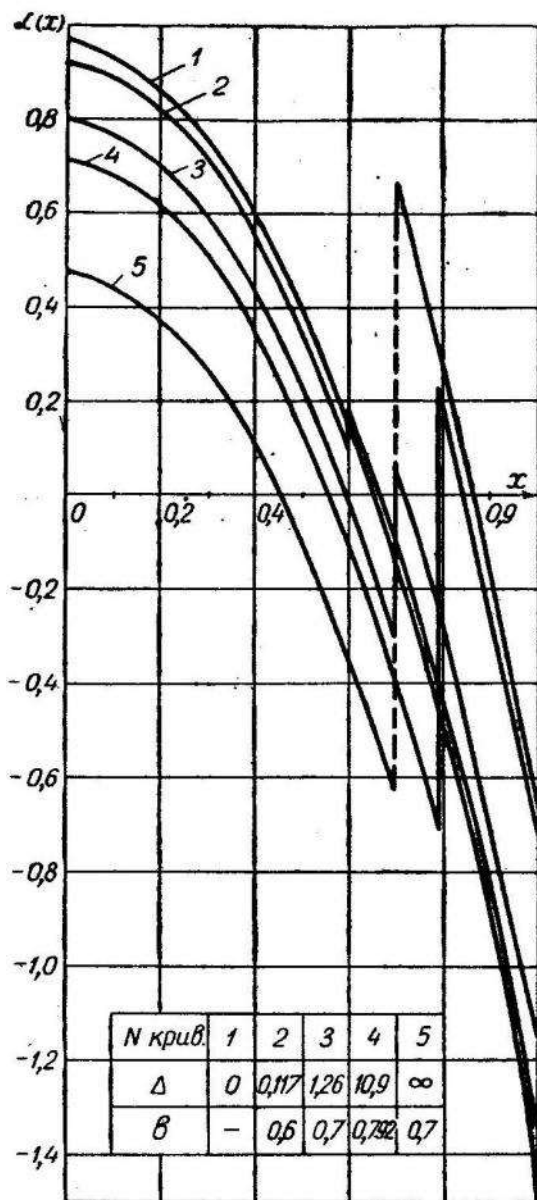


Рис. 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Григорьев А. С. Изгиб круглой плиты при линейном упрочнении материала. Инженерный сборник, т. 13, 1952.
2. Григорьев А. С. Изгиб кольцевых и круговых пластин переменной и постоянной толщины за пределом упругости. Инженерный сборник, т. 20, 1954.
3. Флейшман Н. П. Пружна рівновага плити з ребрами жорсткості змінної кривизни. Наукові записки Львівського ун-ту, т. 44, вип. 8, 1957.