Е. І. ЛУНЬ

ПРУЖНА ПІВПЛОЩИНА З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ЖОРСТКИМ КІЛЬЦЕМ

В роботі методом лінійного спряження розв'язується задача про напружений стан пружної півплощини, яка навантажена розподіленими зусиллями на прямолінійній границі і має круговий отвір, підкріплений абсолютно жорстким кільцем. Задача про підкріплення кругового отвору пружної півплощини пружним кільцем розв'язана І. Г. Арамановичем (1) методом Д. І. Шермана і І. О. Прусовим (4) методом лінійного спряження.

Нехай пружна невагома півплощина має круговий отвір одиничного радіуса з центром на віддалі h від границі півплощини, причому в отвір півплощини впаяно жорстке кільце (рис. 1). Границю півплощини і кругового отвору позначимо відповідно через L і L_1. Систему координат комплексної площини $z = x + iy$ виберемо так, як показано на рисунку. Знайдемо пружний стан півплощини, якщо на L, за винятком відрізка $(-a, +a)$, і на відрізку $(-a, +a)$ відповідно діють тиски q і $q + N$.

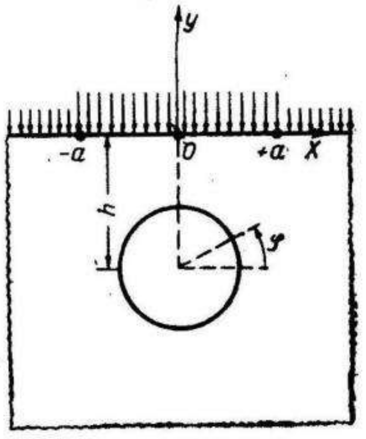

Рис. 1.

Нехай $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ — функції напружень Колосова—Мусхелішвілі, визначені в області півплощини при $y < 0$. Тоді на границі півплощини одержуємо таку граничну умову [4]:

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) \doteq \begin{cases} q \text{ на } L \text{ без } (-a, +a), \\ q + N \text{ на } (-a, +a). \end{cases} \tag{1}$$

Як і в роботі [4], рівняння (1) задовільнимо, припустивши, що

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2} q + \frac{N}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z+a} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^{-k} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (z + z_0)^{-k} \quad \text{при } y < 0, \tag{2}$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2} q + \frac{N}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z+a} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^{-k} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} b_k (z+z_0)^{-k} \text{ при } y>0, \tag{3}$$

де $z_0=-ih$, a_k і b_k — невідомі сталі коефіцієнти.

Функцію $\Psi_1(z)$ при $y<0$ знаходимо за формулою $\Psi_1(z) = -\Phi_1(z) - \overline{\Phi}_1(z) - z\Phi_1'(z)$, що, враховуючи (2) і (3), дає:

$$\Psi_1(z) = -\frac{Naz}{\pi i (z^2-a^2)} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(a_k + z_0 a_{k-1}) - \overline{b}_k](z-z_0)^{-k} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(b_k - z_0 b_{k-1}) - \overline{a}_k](z+z_0)^{-k}. \tag{4}$$

Робимо заміну $z=\zeta+z_0$. Тоді з (2) і (4) одержимо:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta+z_0) = -\frac{1}{2}q + \frac{N}{2\pi i}\ln\frac{\zeta+z_0-a}{\zeta+z_0+a} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} a_k\zeta^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(\zeta+2z_0)^{-k}, \tag{5}$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi_1(\zeta+z_0) + \overline{z}_0\Phi_1'(\zeta+z_0) = -\frac{Na(\zeta+2z_0)}{\pi i[(\zeta+z_0)^2-a^2]} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(a_k+2z_0 a_{k-1}) - \overline{b}_k]\zeta^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)b_k - \overline{a}_k](\zeta+2z_0)^{-k}. \tag{6}$$

Розклавши в ряд по степенях ζ праві частини (5) і (6), для ζ за модулем, близьким до одиниці, одержуємо:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k\zeta^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k\zeta^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\zeta^{-k}, \quad (|\zeta|>1), \tag{7}$$

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_k+B_k)\zeta^k + \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(a_k+2z_0 a_{k-1}) - \overline{b}_k]\zeta^{-k}, \quad (|\zeta|>1), \tag{8}$$

де

$$M_0 = -\frac{1}{2}\left(q+\frac{Na}{\pi}\right);\quad M_k = (-1)^{k+1}\frac{N}{2\pi ik}\left[\frac{1}{(z_0-a)^k} - \frac{1}{(z_0+a)^k}\right], \quad (k\geqslant 1),$$

$$T_k = (-1)^{k+1}\frac{N}{2\pi i}\left[\frac{z_0+a}{(z_0-a)^{k+1}} - \frac{z_0-a}{(z_0+a)^{k+1}}\right], \quad (k\geqslant 0), \tag{9}$$

$$A_k = (-1)^k\cdot\sum_{n=2}^{\infty}(2z_0)^{-(k+n)} C_{n+k-1}^n b_n,$$

$$B_k = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^k(2z_0)^{-(k+n)} C_{n+k-1}^n [(n-1)b_n - \overline{a}_n], \tag{10}$$

α — кут між прямими, що проходять через центр колового отвору і точки $-a$ і $+a$ на прямолінійному контурі L.

Розповсюджуючи визначення функції $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta|<1$ за формулою

$$\Phi(\zeta)=-\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{1}{\zeta}\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{1}{\zeta^2}\Psi\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

з (7) і (8) знаходимо:

$$\Phi(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(\overline{M}_k+\overline{A}_k)\zeta^{-k}-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\overline{a}_k\zeta^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(\overline{a}_{k+2}-2z_0\overline{a}_{k-1})-b_{k+2}]\zeta^k+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}(\overline{T}_{k-2}+\overline{B}_{k-2})\zeta^{-k},\quad (|\zeta|<1). \tag{11}$$

На контурі колового отвору має місце така умова [2]:

$$\varkappa\Phi^-(\sigma)+\Phi^+(\sigma)=0. \tag{12}$$

Підставивши в (12) вирази (7) і (11), одержимо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa(M_k+A_k)\sigma^k+\sum_{k=2}^{\infty}\varkappa a_k\sigma^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}(\overline{M}_k+\overline{A}_k)(k-1)\sigma^{-k}-$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\overline{a}_k\sigma^k+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)(\overline{a}_{k+2}-2z_0\overline{a}_{k+1})-b_{k+2}]\sigma^k+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}(\overline{T}_{k-2}+\overline{B}_{k-2})\sigma^{-k}=0. \tag{13}$$

Прирівнюючи в (13) коефіцієнти при однакових степенях σ і враховуючи, що a_k, b_k, A_k, B_k, M_k і T_k дійсні при k парному і уявні при k непарному, одержимо такі дві безмежні системи рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa a_2+M_2+A_2+T_0+B_0=0,\\
&\varkappa a_3-2(M_3+A_3)-T_1-B_1=0,\\
&\varkappa a_4+3(M_4+A_4)+T_2+B_2=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varkappa a_k+(-1)^k[(k-1)(M_k+A_k)+T_{k-2}+B_{k-2}]=0.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(\varkappa-1)(M_0+A_0)+a_2-b_2=0,\\
\varkappa(M_1+A_1)-2(a_3+2z_0a_2)-b_3=0,\\
\varkappa(M_2+A_2)-3a_2+3(a_4+2z_0a_3)-b_4=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varkappa(M_k+A_k)-[(k+1)(a_k-a_{k+2}-2z_0a_{k+1})](-1)^k-b_{k+2}=0.\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\}
$$

Розписуючи (10) і враховуючи наші попередні умови, одержуємо вирази для A_k і B_k через a_k і b_k:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{4z_0^2}b_2+\frac{1}{8z_0^3}b_3+\frac{1}{16z_0^4}b_4+\dots,\\
A_1 &= -\frac{1}{4z_0^3}b_2-\frac{1}{16z_0^4}b_3-\frac{1}{8z_0^5}b_4-\frac{5}{64z_0^6}b_5-\dots,\\
A_2 &= \frac{3}{16z_0^4}b_2+\frac{3}{16z_0^5}b_3+\frac{5}{32z_0^6}b_4+\frac{1}{128z_0^7}b_5+\dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
B_0 &= \frac{1}{4z_0^2}(b_2-a_2)+\frac{1}{8z_0^3}(2b_3+a_3)+\frac{1}{16z_0^4}(3b_4-a_4)+\dots,\\
B_1 &= -\frac{1}{4z_0^3}(b_2-a_2)-\frac{3}{16z_0^4}(2b_3+a_3)-\frac{1}{8z_0^5}(3b_4-a_4)-\dots,\\
B_2 &= \frac{3}{16z_0^4}(b_2-a_2)+\frac{3}{16z_0^5}(2b_3+a_3)+\frac{5}{32z_0^6}(3b_4-a_4)+\dots,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Виразивши з (14) a_k і b_k через M_k, T_k, A_k, і B_k і підставивши їх в (15), одержимо системи рівнянь для визначення A_k і B_k. Знайшовши A_k і B_k, зможемо знайти коефіцієнти a_k і b_k функцій Φ і Ψ, а через них за відомими формулами [2] і напруження в будь-якій точці пружної півплощини.

В окремому випадку, якщо припустити, що $a=h=3$, $\varkappa=2$, для компонентів напружень на границі колового отвору одержимо:

φ	σ_r	σ_φ	$\tau_{r\varphi}$
$\frac{\pi}{2}$	$-1{,}372\,N-1{,}418\,q$	$-0{,}460\,N-0{,}473\,q$	0
$\frac{\pi}{4}$	$-0{,}780\,N-1{,}457\,q$	$-0{,}259\,N-0{,}485\,q$	$-0{,}351\,N+0{,}0086\,q$
0	$-0{,}260\,N-1{,}479\,q$	$-0{,}0853\,N-0{,}493\,q$	$+0{,}207\,N-0{,}0182\,q$
$-\frac{\pi}{4}$	$-0{,}664\,N-1{,}466\,q$	$-0{,}222\,N-0{,}489\,q$	$+0{,}471\,N-0{,}020\,q$
$-\frac{\pi}{2}$	$-0{,}960\,N-1{,}458\,q$	$-0{,}320\,N-0{,}485\,q$	0

З граничних умов задачі виходить, що на границі L в точці $\zeta=3i$ напруження $\sigma_r=-N-q$.

Обчисливши за допомогою функцій Φ і Ψ напруження σ_r в цій точці, одержимо:

$$\sigma_r = -0{,}964\,N - 0{,}991\,q.$$

Це вказує на достатню точність проведених підрахунків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Араманович И. Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. ДАН СССР, т. 104, № 3, 1955.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4. М., 1954.
3. Мусхелишвили Н. И. Основные граничные задачи теории упругости для полуплоскости. Сообщения АН ГрузССР, т. 2, № 10, 1941.
4. Прусов І. О. Пружна півплощина з підкріпленим круговим отвором. Наукові записки Львівського ун-ту, серія мех.-мат, т. 44, в. 8, 1957.