Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ, Я. М. КІЗИМА

ДО ПИТАННЯ ЗМІШАНОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Розглянемо змішану граничну задачу теорії пружності для ортотропної пластинки з круговим отвором.

Нехай безмежна ортотропна пластинка з круговим отвором радіуса R розтягується на безмежності у двох взаємно перпендикулярних напрямках зусиллями інтенсивністю Q і N.

На частині L_1 кругового отвору задані декартові компоненти вектора зміщення $u = f_1(t)$ і $v = f_2(t)$, а на останній частині краю L_2 — компоненти зовнішніх зусиль, які вважаємо рівними нулю.

Крім цього, вважається відомим головний вектор зовнішніх зусиль, прикладених до L_1.

Відомі функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ вважатимемо такими, що їх перші похідні $f_1'(t)$ і $f_2'(t)$ задовольняють на L_1 умову Гельдера.

В задачі потрібно визначити нормальні і дотичні напруження на L_1.

Розв'язок поставленої задачі для ізотропного випадку розглянуто в працях [2], [4], [5].

Загальний розв'язок цієї задачі для ортотропної пластинки у випадку відсутності напружень на безмежності дано в праці [1].

Нами розглядається узагальнення розв'язку задачі у випадку відмінності від нуля розтягуючих напружень на безмежності, а також деякі приклади, які являють самостійний інтерес.

Будемо додержуватись позначень праці [1]. На основі [1] розв'язок задачі виражається двома функціями:

$$W_3(\zeta) = \frac{X_3(\zeta)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\alpha_1(\sigma)\, d\sigma}{X_3(\sigma)(\sigma - \zeta)} + X_3(\zeta)\left[C_1 + \frac{D_1}{\zeta - z_1} + \frac{E_1}{\zeta + z_1}\right],$$

$$W_4(\zeta) = \frac{X_4(\zeta)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\beta_1(\sigma)\, d\sigma}{X_4(\sigma)(\sigma - \zeta)} + X_4(\zeta)\left[C_2 + \frac{D_2}{\zeta - z_2} + \frac{E_2}{\zeta + z_2}\right], \tag{1}$$

через які нормальні і дотичні напруження визначаються за формулами:

$$\sigma_r = \frac{S_1(\sigma)[W_4^+(\sigma) - W_4^-(\sigma)] - S_2(\sigma)[W_3^+(\sigma) - W_3^-(\sigma)]}{2\pi i\, [S_1(\sigma) - S_2(\sigma)]},$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{W_3^+(\sigma) - W_3^-(\sigma) - [W_4^+(\sigma) - W_4^-(\sigma)]}{2\pi i\, [S_1(\sigma) - S_2(\sigma)]}. \tag{2}$$

Функції $\alpha_1(\sigma)$ і $\beta_1(\sigma)$ можна записати у вигляді

$$\alpha_1(\sigma) = \alpha(\sigma) + \alpha_2(\sigma) \ \text{і} \ \beta_1(\sigma) = \beta(\sigma) + \beta_2(\sigma),$$

де $\alpha(\sigma)$ і $\beta(\sigma)$ — функції, знайдені в [1], а

$$\alpha_2(\zeta) = \frac{2\pi i \sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3} + n_2)(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})(\sigma^2 - z_1^2)} \{ Q[\sigma^2(n_5\sqrt{n_3} + n_4\sqrt{n_1}) +$$
$$+ (n_5\sqrt{n_3} - n_4\sqrt{n_1})] + N[-(n_6\sqrt{n_1} +$$
$$+ n_7\sqrt{n_3})\sigma^2 + (n_6\sqrt{n_1} - n_7\sqrt{n_3})]\},$$

$$\beta_2(\zeta) = \frac{2\pi i \sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3} - n_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})(\sigma^2 - z_2^2)} \{ Q[\sigma^2(n_4\sqrt{n_1} - n_5\sqrt{n_3}) -$$
$$- (n_5\sqrt{n_3} + n_4\sqrt{n_1})] + N[\sigma^2(n_7\sqrt{n_3} - n_6\sqrt{n_1}) + (n_6\sqrt{n_1} + n_7\sqrt{n_3})]\}.$$

При цьому $n_1 = a_{11}(\beta_1 + \beta_2)$, $n_2 = a_{12} + \frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}$, $n_3 = a_{22}\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2}$,

$$n_4 = \frac{a_{11}}{n_1} + 1, \ n_5 = \frac{a_{11}}{n_1}; \ n_6 = \frac{a_{22}}{n_3}, \ n_7 = 1 + \frac{a_{22}}{n_3}.$$

Для визначення сталих D_1, E_1, D_2, E_2, $A_1 = \int\limits_{L_1} \sigma_r \frac{d\sigma}{\sigma}$ і $B_1 = \int\limits_{L_1} \tau_{r\varphi} \frac{d\sigma}{\sigma}$ маємо такі умови [1]:

$$D_1 = i\frac{z_1}{X_3(z_1)}\int\limits_{L_1}\tau_{r\varphi}\frac{d\sigma}{\sigma - z_1}, \ D_2 = i\frac{z_2}{X_4(z_2)}\int\limits_{L_1}\tau_{r\varphi}\frac{d\sigma}{\sigma - z_2},$$

$$E_1 = -i\frac{z_1}{X_3(-z_1)}\int\limits_{L_1}\tau_{r\varphi}\frac{d\sigma}{\sigma + z_1}, \ E_2 = -i\frac{z_2}{X_4(-z_2)}\int\limits_{L_1}\tau_{r\varphi}\frac{d\sigma}{\sigma + z_2}; \tag{3}$$

$$A_1 - iB_1 = X_3(0)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\alpha_1(\sigma)\,d\sigma}{X_3(\sigma)\sigma} + C_1 + \frac{E_1 - D_1}{z_1}\right],$$

$$A_1 - iB_1 = X_4(0)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\beta_1(\sigma)\,d\sigma}{X_4(\sigma)\sigma} + C_2 + \frac{E_2 - D_2}{z_2}\right]. \tag{4}$$

Спираючись на результати праці [1], розглянемо два приклади, які становлять самостійний практичний інтерес.

П р и к л а д 1. Нехай до дуги L_1 кругового отвору в ортотропній пластинці (рис. 1) прикладений жорсткий штамп, який має форму дуги отвору того ж радіуса, нерухомо зв'язаний з пружним тілом і вдавлюється нормальною силою P, прикладеною симетрично і направленою по осі ox. В цьому випадку маємо:

$$P_x = P, \ P_y = 0, \ Q = 0, \ N = 0, \ f_1'(\sigma) = 0, \ f_2'(\sigma) = 0,$$
$$C_1 = C_2 = i\frac{P}{R} \tag{5}$$

і внаслідок симетрії задачі

$$B_1 = \int\limits_{L_1}\tau_{r\varphi}\frac{d\sigma}{\sigma} = 0.$$

Враховуючи (5), одержимо:

$$\alpha_1(\sigma) = \frac{2\sqrt{n_1}}{(\sqrt{n_1 n_3} + n_2)(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})(\sigma^2 - z_1^2)} \left[-i(n_2 + n_3)\frac{P}{R}\sigma + \right.$$

$$\left. + \sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})A_1 \right],$$

$$\beta_1(\sigma) = \frac{2\sqrt{n_1}}{(\sqrt{n_1 n_3} - n_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})(\sigma^2 - z_2^2)} \left[i(n_2 + n_3)\frac{P}{R}\sigma + \right.$$

$$\left. + \sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})A_1 \right].$$

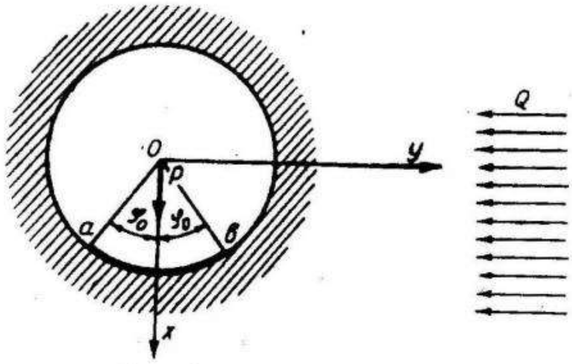

Рис. 1.

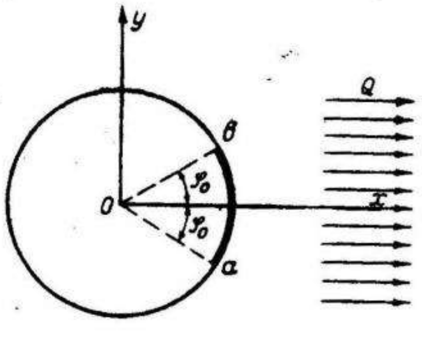

Рис. 2.

Обчислюючи інтеграли типу Коші в (1) і користуючись (2), отримуємо:

$$\sigma_r = -\frac{\sqrt{n_1 n_3}\, S_2(\sigma) X_3(\sigma)}{\pi i(\sqrt{n_1 n_3} - n_2)[S_1(\sigma) - S_2(\sigma)]} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})} \frac{i}{2} \left[\frac{1}{X_3(z_1)(\sigma - z_1)} \times \right.\right.$$

$$\times \left(\frac{n_2 + n_3}{R} P + \sqrt{n_3}\sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + \frac{1}{X_3(-z_1)(\sigma + z_1)} \left(\frac{n_2 + n_3}{R} P - \right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{n_3}\sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + 2(n_2 + n_3)\frac{P}{R} \right] + \left. \left(i\frac{P}{R} + \frac{D_1}{\sigma - z_1} + \frac{E_1}{\sigma + z_1} \right) \right\} + \tag{6}$$

$$+ \frac{\sqrt{n_1 n_3}\, S_1(\sigma) X_4(\sigma)}{\pi i(\sqrt{n_1 n_3} + n_2)[S_1(\sigma) - S_2(\sigma)]} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})} \frac{i}{2} \left[\frac{1}{X_4(z_2)(\sigma - z_2)} \right.\right.$$

$$\left(-\frac{n_2 + n_3}{R} P + \sqrt{n_3}\sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - \frac{1}{X_4(-z_2)(\sigma + z_2)} \left(\frac{n_2 + n_3}{R} P + \right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{n_3}\sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - 2(n_2 + n_3)\frac{P}{R} \right] + \left.\left(\frac{iP}{R} + \frac{D_2}{\sigma - z_2} + \frac{E_2}{\sigma + z_2} \right) \right\};$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\sqrt{n_1 n_3}\, X_3(\sigma)}{\pi i \sqrt{n_1 n_3} - n_2)[S_1(\sigma) - S_2(\sigma)]} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})} \times \right.$$

$$\times \frac{i}{2} \left[\frac{1}{X_3(z_1)(\sigma - z_1)} \left(\frac{n_2 + n_3}{R} P + \sqrt{n_3}\sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{X_3(-z_1)(\sigma + z_1)} \left(\frac{n_2 + n_3}{R} P - \sqrt{n_3}\sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) +$$

$$\left. + 2(n_2 + n_3)\frac{P}{R} \right] + \left.\left(i\frac{P}{R} + \frac{D_1}{\sigma - z_1} + \frac{E_1}{\sigma + z_1} \right) \right\} - \tag{7}$$

$$-\frac{\sqrt{n_1 n_3}\, X_4(\sigma)}{\pi i\left(\sqrt{n_1 n_3}+n_2\right)\left[S_1(\sigma)-S_2(\sigma)\right]}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_3}\left(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}\right)}\frac{i}{2}\left[\frac{1}{X_4(z_2)(\sigma-z_2)}\left(-\frac{n_2+n_3}{R}P+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}\,A_1\right)-\frac{1}{X_4(-z_2)(\sigma+z_2)}\left(\frac{n_2+n_3}{R}P+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{n_3}\sqrt{n_1-n_3}\cdot A_1\right)-2\left(n_2+n_3\right)\frac{P}{R}\right]+\left(i\frac{P}{R}+\frac{D_2}{\sigma-z_2}+\frac{E_2}{\sigma+z_2}\right)\right\}.$$

Підставивши $\tau_{r\varphi}$ з (7) в (3) і прирівнявши праві частини (4), знаходимо п'ять рівнянь для визначення п'яти невідомих D_1, E_1, D_2, E_2 і A_1. Результати обчислень не наводимо через їх громіздкість.

Наведемо остаточний результат для контактних напружень на L_1:

$$\sigma_r=-\frac{P\left(n_3-n_1\right)}{8\pi R\sqrt{n_3}\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\left\{\frac{\sqrt{n_1 n_3}+n_2}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}\cdot\right. \tag{8}$$

$$\cdot e^{\varphi_0\delta}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\right)+z_2^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{n_1 n_3}-n_2}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}e^{-\varphi_0\delta}\left[z_1^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\right)\right]\right\};$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{P\left(n_3-n_1\right)}{8\pi R\sqrt{n_3}\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\left\{\frac{\sqrt{n_1 n_3}+n_2}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}\cdot\right. \tag{9}$$

$$\cdot e^{\varphi_0\delta}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\right)+z_2^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\sqrt{n_1 n_3}-n_2}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}e^{-\varphi_0\delta}\left[z_1^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\right)\right]\right\};$$

$$z_1=i\sqrt{\frac{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3}}};\quad z_2=i\sqrt{\frac{\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}};$$

$$\alpha=\delta\ln\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}};$$

$$\delta=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{n_1 n_3}-n_2}{\sqrt{n_1 n_3}+n_2},$$

а φ_0 вказано на рис. 1.

Приклад 2. Ортотропна пластинка з круговим отвором радіуса R рівномірно розтягується на безмежності паралельно осі ox зусиллями інтенсивністю Q. З дугою L_1 нерухомо спаяна жорстка накладка так, що ця дуга може зміщуватись лише як ціле (рис. 2).

Будемо розглядати тільки такі положення накладки, для яких дуга L_1 зміщується поступально. Розглянемо випадок, вказаний на рис. 2.

В цьому випадку $P_x=P_y=0$, $N=0$, $C_1=C_2=0$, $f_1'(\sigma)=f_2'(\sigma)=0$ і $B_1=\int\limits_{L_1}\tau_{r\varphi}\frac{d\sigma}{\sigma}=0$ в силу симетрії. (10)

Враховуючи (10), маємо:

$$\alpha_1(\sigma)=\frac{2\sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3}+n_2)(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})(\sigma^2-z_1^2)}\left\{\pi Q i\left[\sigma^2(n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(n_5\sqrt{n_3}-n_4\sqrt{n_1})\right]+(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3})A_1\right\},$$

$$\beta_1(\sigma)=\frac{2\sqrt{n_1 n_3}}{(\sqrt{n_1 n_3}-n_2)(\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3})(\sigma^2-z_2^2)}\left\{\pi Q i\left[\sigma^2(n_4\sqrt{n_1}-n_5\sqrt{n_3})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1})\right]+(\sqrt{n_1}-\sqrt{n_3})A_1\right\}.$$

Як і в прикладі 1, на L_1 одержуємо:

$$\sigma_r=\frac{Q(n_3-n_1)}{8\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\left\{\frac{n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}e^{\varphi_0\delta}\left[z_2^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\right)+C'_1 z_2^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{5}{2}\varphi-\alpha\right)+C'_1\cos\left(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\right)\right]+$$

$$+\frac{n_4\sqrt{n_1}-n_5\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}\cdot e^{-\varphi_0\delta}\left[z_1^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)+F'_1 z_1^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\cos\left[\frac{5}{2}\varphi+\alpha\right)+F_1^1\cos\left(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\right)\right]\right\};\qquad(11)$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{Q(n_3-n_1)}{8\sqrt{n_1 n_3-n_2^2}\sqrt{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}}\left\{\frac{n_5\sqrt{n_3}+n_4\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_3}-\sqrt{n_1}}e^{\varphi_0\delta}\left[z_2^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\right)-C'_1 z_2^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{5}{2}\varphi-\alpha\right)-C'_1\sin\left(\frac{3}{2}\varphi-\alpha\right)\right]-$$

$$-\frac{n_4\sqrt{n_1}-n_5\sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1}+\sqrt{n_3}}\cdot e^{-\varphi_0\delta}\left[-z_1^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)+F'_1 z_1^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sin\left(\frac{5}{2}\varphi+\alpha\right)+F'_1\sin\left(\frac{3}{2}\varphi+\alpha\right)\right]\right\},\qquad(12)$$

де $C_1'=-\cos\varphi_0+2\delta\sin\varphi_0$,
$F_1'=-(\cos\varphi_0+2\delta\sin\varphi_0)$,
а φ_0 вказано на рис. 2.

В границі формули (8), (9), (11) і (12) співпадають з відомими результатами праці Б. Л. Мінцберга [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Грилицький Д. В. Змішана гранична задача теорії пружності для ортотропного масиву з круговим вирізом. Прикладна механіка, вип. 4, 1957.
2. Карцивадзе И. Н. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сообщения АН ГрузССР, т. VII, № 8, 1946.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ГИТТЛ, 1957.
4. Минцберг Б. Л. Смешанная граничная задача теории упругости для плоскости с круговым отверстием. ПММ, т. 12, в. 4, 1948.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.