Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

В. М. ГНАТИКІВ

# ПОЛОГА СФЕРИЧНА ОБОЛОНКА ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

Розглянемо пологу сферичну оболонку під дією нормальних до поверхні зосереджених сил при довільних крайових умовах.

Напружено-деформований стан пологих сферичних оболонок визначається функцією прогинів $w(\alpha, \beta)$ і функцією напружень $\varphi(\alpha, \beta)$, які задовольняють такі рівняння:

$$\Delta\Delta\varphi + \frac{Eh}{k^2R}\Delta w = 0,$$

$$\Delta\Delta w - \frac{1}{Dk^2R}\Delta\varphi = \frac{1}{Dk^4}P(\alpha, \beta), \tag{1}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$, $k^4 = \frac{Eh}{R^2D}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,

$\alpha$, $\beta$ — безрозмірні координати, зв'язані з розмірними $x$, $y$ такими співвідношеннями: $\alpha = kx$, $\beta = ky$. Як показано в роботах [1] і [2], загальний розв'язок системи (1) можна подати в такому вигляді:

$$w(\alpha, \beta) = w^1(\alpha, \beta) + w^0(\alpha, \beta) + \frac{1}{Dk^2R}\Phi(\alpha, \beta),$$

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi^1(\alpha, \beta) + \varphi^0(\alpha, \beta) + \Psi(\alpha, \beta), \tag{2}$$

де $w^1(\alpha, \beta)$ — розв'язок однорідного рівняння

$$\Delta\Delta w^1 + w^1 = 0; \tag{3}$$

$w^0(\alpha, \beta)$ — частковий розв'язок неоднорідного рівняння

$$\Delta\Delta w^0 + w^0 = \frac{1}{Dk^4}P(\alpha, \beta); \tag{4}$$

$\Phi(\alpha, \beta)$ і $\Psi(\alpha, \beta)$ — гармонічні функції.

Функції $\varphi^1(\alpha, \beta)$ і $\varphi^0(\alpha, \beta)$ зв'язані із $w^1(\alpha, \beta)$ і $w^0(\alpha, \beta)$ такими формулами:

$$\varphi^1 = \frac{Eh}{k^2R}\Delta w^1,$$

$$\Delta\varphi^0 = -\frac{Eh}{k^2R}w^0. \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (3) будемо шукати в полярній системі координат у вигляді ряду

$$w^1 = \sum_0^\infty w_n(r)\cos n\Theta. \tag{6}$$

Підставивши (6) в (3), одержуємо для функції $w_n(r)$ рівняння, розв'язками якого є функції Бесселя і Ганкеля першого роду, $n$-го порядку. Тоді розв'язок (6) набере такої форми:

$$w^1 = \sum_0^\infty [A_n u_n(r) + B_n v_n(r) + C_n f_n(r) + D_n g_n(r)]\cos n\Theta, \tag{7}$$

де $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ — сталі коефіцієнти.

$$u_n(r) = \operatorname{Re} j_n(r\sqrt{i}),\ v_n(r) = Im\, j_n(r\sqrt{i}),$$

$$f_n(r) = \operatorname{Re} H_n^{(1)}(r\sqrt{i}),\ g_n(r) = Im\, H_n^{(1)}(r\sqrt{i}).$$

Часткові розв'язки неоднорідного рівняння (4) для різних видів несиметричних навантажень одержані в роботі [1]. У випадку дії на оболонку одної зосередженої сили цей розв'язок одержаний у формі:

$$w^0 = \frac{P}{4k^2D} F_3(\rho), \tag{8}$$

де $F_3(\varrho)$ — дійсна частина функції Ганкеля нульового порядку, аргументу $\varrho\sqrt{i}$, $\varrho$ — віддаль від точки прикладання сили $P$.

Використовуючи теорему додавання циліндричних функцій нульового порядку, частковий розв'язок (8) можна зобразити в такому вигляді:

при $r \leqslant r_0$:

$$w^0(r, \Theta) = \frac{P}{2k^2D} {\sum_0^\infty}' [f_n(r_0) u_n(r) - g_n(r_0) v_n(r)]\cos n\Theta;$$

при $r \geqslant r_0$:

$$w^0(r, \Theta) = \frac{P}{2k^2D} {\sum_0^\infty}' [u_n(r_0) f_n(r) - v_n(r_0) g_n(r)]\cos n\Theta, \tag{9}$$

де $r_0$ — віддаль точки прикладання сили $P$ від початку координат. Знак $'$ при сумах означає, що перший доданок необхідно взяти з половинним коефіцієнтом.

Гармонічні функції $\Phi$ і $\Psi$ теж можна подати у формі ряду

$$\Phi = a_0 + b_0 \ln r + \sum_1^\infty (a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\Theta, \tag{10}$$

$$\Psi = c_0 + d_0 \ln r + \sum_1^\infty (c_n r^n + d_n r^{-n})\cos n\Theta.$$

Підставивши (7) і (9) в (5), одержуємо такі вирази для $\varphi^0$ і $\varphi^1$:

$$\varphi^1(r, \Theta) = \frac{Eh}{k^2R}\sum_0^\infty [A_n v_n(r) - B_n u_n(r) + C_n g_n(r) - D_n f_n(r)]\cos n\Theta; \tag{11}$$

при $r \leqslant r_0$:

$$\varphi^0(r, \Theta) = \frac{RP}{2} \sum_0^{\infty}{}' [f_n(r_0) v_n(r) + g_n(r_0) u_n(r)] \cos n\Theta;$$

при $r \geqslant r_0$: (12)

$$\varphi^0(r, \Theta) = \frac{RP}{2} \sum_0^{\infty}{}' [u_n(r_0) g_n(r) + v_n(r_0) f_n(r)] \cos n\Theta.$$

Якщо на оболонку діє $N+1$ — сили, які розміщені по колу радіуса $r_0$ і на рівній віддалі одна від одної, то функція прогинів $w(r, \Theta)$ і функція напружень $\varphi(r, \Theta)$ наберуть такого вигляду:

при $r \leqslant r_0$:

$$w(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(r) + B_n v_n(r) + C_n f_n(r) + D_n g_n(r)] \cos n\Theta + \frac{1}{Dk^2 R} [a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\Theta] + \frac{P}{2k^2 D} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty}{}' [f_n(r_0) u_n(r) - g_n(r_0) v_n(r)] \cos n(m\gamma - \Theta); \quad (13)$$

$$\varphi(r, \Theta) = \frac{Eh}{k^2 R} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n v_n(r) - B_n u_n(r) + C_n g_n(r) - D_n f_n(r)] \cos n\Theta + [c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{-n}) \cos n\Theta] + \frac{RP}{2} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty}{}' [f_n(r_0) v_n(r) + g_n(r_0) u_n(r)] \cos n(m\gamma - \Theta);$$

при $r \geqslant r_0$:

$$w(r, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(r) + B_n v_n(r) + C_n f_n(r) + D_n g_n(r)] \cos n\Theta + \frac{1}{Dk^2 R} \sum_{m=0}^{N} [a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\Theta] + \frac{P}{2k^2 D} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty}{}' [u_n(r_0) f_n(r) -$$

$$- v_n(r_0)\, g_n(r)] \cos n(m\gamma - \Theta);$$

$$\varphi(r, \Theta) = \frac{Eh}{k^2 R} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n v_n(r) - B_n u_n(r) + C_n g_n(r) -$$

$$- D_n f_n(r)] \cos n\Theta + [c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n +$$

$$+ d_n r^{-n}) \cos n\Theta + \frac{RP}{2} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty}{}' [u_n(r_0)\, g_n(r) +$$

$$+ v_n(r_0)\, f_n(r)] \cos n(m\gamma - \Theta),$$

де $\gamma = \frac{2\pi}{N+1}$.

Якщо розв'язується крайова задача суцільної пологої сферичної оболонки під дією вказаного вище навантаження, то із обмеженості зусиль, моментів і переміщень у вершині оболонки (при $r = 0$) випливає, що

$$C_n = D_n = b_n = d_n = 0.$$

Всі інші сталі коефіцієнти визначаються із крайових умов.

Одержані вище розв'язки можна використати при розв'язуванні задач пологих сферичних оболонок з концентричним отвором у вершині оболонки. В цьому випадку всі сталі коефіцієнти визначаються із крайових умов.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гнатыкив В. Н. Частные решения уравнений пологих сферических оболочек под действием некоторых частичных нагрузок. Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1960.

2. Reissner E. On the determination of stresses and displacements for unsymmetrical deformations of shallow spherical shells. J. Math. and Phys., № 1, 1959.