Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Є. М. ПАРАСЮК

ПРО ОДИН МЕТОД ПРИВЕДЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ПЛОСКОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА

Як відомо, одним із шляхів розв'язування плоских задач теорії пружності є приведення цих задач до інтегральних рівнянь типу Фредгольма.

В літературі відомо багато методів приведення плоских задач теорії пружності до інтегральних рівнянь. Цими питаннями займались Корн, Міхлін, Шерман, Мусхелішвілі та ін.

В цій роботі подається ще один метод приведення плоских задач теорії пружності до інтегральних рівнянь типу Фредгольма, що базується на новому методі приведення граничних задач для систем диференціальних рівнянь еліптичного типу до регулярних інтегральних рівнянь, розроблений проф. Я. Б. Лопатинським. Зокрема наводиться перша основна задача плоскої теорії пружності до системи інтегральних рівнянь типу Фредгольма.

Перша основна задача розглядається як границя другої основної задачі плоскої теорії пружності при

$$\varkappa = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3_\mu} = 1,$$

де λ і μ — сталі Ламе.

Як відомо, перша основна задача плоскої теорії пружності для області D, обмеженої контуром S в матричній формі, формулюється так: Треба знайти розв'язок системи

$$(1-\varkappa)\Delta U + 2\varkappa\partial\partial' U = 0, \tag{1}$$

неперервно диференційований в $D\boxed{\text{U}}S$ і 2 рази неперервно диференційований в D, що задовольняє граничні умови

$$(1-\varkappa)[\nu_1\partial_1+\nu_2\partial_2)E+\partial\nu'] U + (3\varkappa-1)\nu\,\partial' U\big|_S = F, \tag{2}$$

де

$$U_{(x)} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, x=(x_1, x_2)\in D,$$

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\partial' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

E — одинична матриця, $F = F(y)$ — неперервна і обмежена вектор-функція на S, а $\nu' = (\nu_1, \nu_2)$ — орт внутрішньої нормалі до S.

Граничні умови (2), як відомо, виражають задання напружень на границі S плоского тіла D.

Для другої основної задачі плоскої теорії пружності на границі S задається сама функція зміщень $U(x)$, тобто

$$U(x)|_S = F_1(y), \quad (y \boxed{\in} S). \tag{3}$$

Як відомо з робіт академіка Мусхелішвілі, загальним розв'язком системи (1) є

$$2\mu U = 2\mu(u_1 + iu_2) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\varphi(x) - x\overline{\varphi'(x)} - \overline{\psi(x)}, \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — аналітичні функції в області D комплексного змінного $x = x_1 + ix_2$. Тоді гранична умова (3) для другої основної задачі набере такого вигляду:

$$\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\varphi(y) - y\overline{\varphi'(y)} - \overline{\psi(y)} = 2\mu(g_1 + ig_2) \quad (\text{на } S), \tag{5}$$

а для першої основної задачі граничну умову (2) можна записати:

$$\varphi(y) + y\overline{\varphi'(y)} + \overline{\psi(y)} = f_1 + if_2 + \text{const} \quad (\text{на } S). \tag{6}$$

Нетрудно помітити, що при $\varkappa = 1$ умова (5) набирає вигляду (6), тобто вигляду граничних умов першої основної задачі. Для цього треба в (5) замість функції $\varphi(x)$ взяти $i\varphi(x)$, а замість $\psi(x)$ — $i\psi(x)$.

Отже, перша основна задача може бути представлена як границя другої основної задачі при $\varkappa = 1$. А для другої основної задачі плоскої теорії пружності Е. Імшенецькою побудоване ядро:

$$G^{(\nu(z))}(x - z) = \frac{(x - z_1\nu)}{\pi}\left\{\frac{1 - \varkappa}{|x - z|^2} + \frac{2\varkappa}{|x - z|^4}(x - z)(x - z)'\right\}, \tag{7}$$

за допомогою якого розв'язок другої основної задачі представляється так:

$$U(x) = \int_S G^{(\nu(z))}(x - z)\mu(z)\,dz\,S, \quad (x \in D, \ z \in S), \tag{8}$$

де введено позначення

$$(x - z) = \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \end{pmatrix},$$

а $\mu(z)$ — невідома вектор-функція на S.

Природно вважати розв'язком першої основної задачі функцію (8), де

$$G^{(\nu(z))}(x - z) = \frac{2}{\pi}\frac{(x - z_1\nu)}{|x - z|^4}(x - z)(x - z)^1. \tag{9}$$

Очевидно, ядро (9) при переході через границю S терпить розрив, але інтеграл (8) збігається.

Доведемо формулу стрибка для інтеграла (8) при наближенні точки x до границі S із середини і ззовні області D.

Лема 1.

$$\int_S G^{(\nu)}(x-y)\,d_y S = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in D \cup S, \\ 2E, & \quad\text{»}\quad x \in D,\ y \in S. \end{cases} \tag{10}$$

Доведення. Зобразимо ядро $G^{(\nu)}(x-y)$ у вигляді

$$G^{(\nu)}(x-y) = \sum_{k=1}^{2} \nu_k G_k^{(\nu)}(x-y),$$

де

$$G_k^{(\nu)}(x-y) = \frac{2}{\pi} \frac{(x_k - y_k)}{|x-y|^4}(x-y)(x-y)' \quad (k = 1,2).$$

Легко перевірити, що

$$\frac{\partial G_1^{(\nu)}(x-y)}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2^{(\nu)}(x-y)}{\partial x_2} = 0.$$

Звідси в силу формули Остроградського випливає перша з рівностей (10). Для доведення другої рівності (10) досить провести обчислення інтеграла (8), припустивши, що границя S є коло з центром в точці x радіуса $|x-y|$. Одержимо:

$$\int_S G^{(\nu)}(x-y)\,d_y S = \frac{2}{\pi}\int_S \frac{(x-y,\nu)}{|x-y|^4}(x-y)(x-y)' d_y S =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_S \frac{(x-y)(x-y)'}{|x-y|^3}\,d_y S. \tag{11}$$

Коли S — коло з центром в точці x, то члени матриці $\frac{(x-y)(x-y)'}{|x-y|^3}$, які рівні $\frac{(x_k-y_k)(x_i-y_i)}{|x-y|^3}$ $(i \neq k)$, при інтегруванні дадуть нуль, і залишається обчислити інтеграл від діагональних елементів.

Маємо:

$$\int_S \frac{(x_k-y_k)^2}{|x-y|^3}\,d_y S = \frac{1}{2}\int_S \frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{|x-y|^3}\,d_y S = \frac{1}{2}\int_S \frac{d_y S}{|x-y|} = \pi.$$

Підставивши цю формулу в (11), одержимо другу з рівностей (10).

Лема 2. *Пряме значення інтеграла (8) рівне E.*

$$\int_S G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_y S = E, \quad y_0 \in S.$$

Доведення. З точки y_0 (рис. 1) описуємо коло Σ_ε радіуса ε. Це коло відрізує від контура S частину S_ε. Частину кола, що знаходиться всередині D, позначимо через Σ_ε^+, а зовні D — Σ_ε^-. Проводимо в точці y_0 дотичну до S, яка розсікає коло на два півкола: σ_ε^+, що відповідає внутрішній нормалі до S, і σ_ε^-, що відповідає зовнішній нормалі до S.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS-\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS\right\}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS-\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS\right\}=0. \tag{12}$$

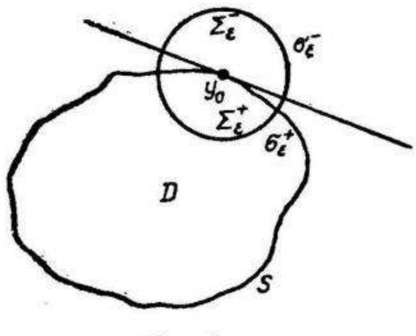

Рис. 1.

Дійсно, різниця, що стоїть у фігурних дужках, може бути записана як інтеграл від тієї ж підінтегральної функції по деякій дузі, що лежить на колі, довжина якої прямує до 0 при $\varepsilon \to 0$.

Зауважимо, що

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon^{+}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=\int\limits_{\sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS. \tag{13}$$

Це випливає з того, що

$$G^{(\nu)}(y_1,\ y_2)=G^{(\nu)}(-y_1,-y_2).$$

Із (12) і (13) випливає:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^{+}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS\right\}=0, \tag{14}$$

де в першому інтегралі розглядається внутрішня нормаль до кола Σ_ε, Далі маємо:

$$\int\limits_{S-S_\varepsilon} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=2E,$$

$$\int\limits_{S-S_\varepsilon} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon^{-}} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=0. \tag{15}$$

Зауважимо, що при інтегруванні по Σ_ε^- мається на увазі внутрішня нормаль до кола, а по Σ_ε^+ — зовнішня нормаль до кола.

Із рівності (15), враховуючи (14), одержимо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S-S_\varepsilon} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=\int\limits_{S} G^{(\nu)}(y_0-y)\,d_yS=E.$$

Л е м а 3. *Для будь-якої вектор-функції $\mu(y)$, неперервної на контурі S, інтеграл (8) зазнає розриву вздовж S, що визначається формулами:*

$$U^+(y_0)=U(y_0)+\mu(x_0), \tag{16}$$
$$U^-(y_0)=U(y_0)-\mu(y_0),\ y_0\in S,$$

де $U^+(y)$ — граничне значення $U(x)$ при $x\to y_0$ із середини D,
$U^-(y)$ — граничне значення $U(x)$ при $x\to y_0$ ззовні D.

Доведення. Перепишемо інтеграл (8) так:

$$U(x)=\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,[\mu(y)-\mu(y_0)]\,d_yS+$$
$$+\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,\mu(y_0)\,d_yS. \tag{17}$$

Оскільки $\mu(y)$ — неперервна на S і контур S такий, що має місце оцінка на S:

$$|\nu(y_0)-\nu(y)|<K|y_0-y|^{\alpha},\ \alpha<1,$$

то оцінка для $G^{(\nu)}(x-y)$ буде порядку $\frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}$ і перший інтеграл у формулі (17) неперервний у точці $y_0\in S$.

Перейдемо в (17) до границі при $x\to y_0$. Одержимо:

$$U^{+}(y_0)=U(y_0)+\mu(y_0),\ \text{коли } x\to y_0 \text{ із середини } D,$$
$$U^{-}(y_0)=U(y_0)-\mu(y_0),\ \text{коли } x\to y_0 \text{ ззовні } D.$$

Використовуючи ці формули і переходячи в (8) до границі при $x\to y$, де $y\in S$, для першої основної задачі одержуємо таку систему інтегральних рівнянь Фредгольма II роду:

$$\mu(y)+\int\limits_S G^{(\nu)}(y-z)\,\mu(z)\,d_zS=f(y) \tag{18}$$

для внутрішньої задачі і

$$-\mu(y)+\int\limits_S G^{(\nu)}(y-z)\,\mu(z)\,d_zS=f(y) \tag{19}$$

для зовнішньої задачі, де $f(y)$ — задача неперервна і обмежена функція на S.

Доведемо одне твердження. Всяку функцію виду

$$U(x)=\int\limits_S G^{(\nu)}(x-y)\,\mu(y)\,d_\nu S,\ x\in D,\ y\in S \tag{20}$$

можна зобразити так:

$$U(x)=\varphi(x)-x\overline{\varphi'(x)}-\overline{\psi(x)}, \tag{21}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — аналітичні функції в області D.

Це означає, що будь-який розв'язок інтегрального рівняння (18) дає розв'язок першої основної задачі плоскої теорії пружності.

Доведення. Помножимо рівність (20) на рядок $(1, i)$. Враховуючи, що оскільки $\nu=\nu_1+i\nu_2$, $\tau=\nu_2-i\nu_1$, то

$$\tau=-i\nu,\ \text{і}\ \tau d_\nu S=dy,$$
$$\bar\tau=i\bar\nu \qquad \bar\tau d_y S=d\bar y,$$

одержимо:

$$U(x)=\frac{x}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\overline{\mu(y)}}{(\bar x-\bar y)^2}\,d\bar y-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{y\,\overline{\mu(y)}}{(\bar x-\bar y)^2}\,d\bar y+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\mu(y)}{\bar x-\bar y}\,d\bar y-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\mu(y)}}{\overline{x}-\overline{y}}\,dy-\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\mu(y)}{x-y}\,dy. \tag{22}$$

Взявши

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\mu(y)}{y-x}\,dy,$$

$$\overline{\psi(x)}=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{y\overline{\mu(y)}}{(\overline{x}-\overline{y})^2}\,d\overline{y}-\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\mu(y)}{\overline{x}-\overline{y}}\,d\overline{y}+\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\mu(y)}}{\overline{x}-\overline{y}}\,dy,$$

із формули (22) одержимо функцію виду (21).

ЛІТЕРАТУРА

1. Имшенецкая Е. Ф. Кандидатская диссертация. Львов, 1953.
2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, 2 изд. М.—Л., 1947.
3. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. матем. журнал, т. 5, № 2, 1953.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 4 изд. М., 1954.