К. С. КОСТЕНКО

СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ІНВАРІАНТНА ВІДНОСНО НЕЕВКЛІДОВОЇ ГРУПИ РУХУ

Нехай

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + \lambda u = 0 -$$

система чотирьох диференціальних рівнянь другого порядку, де $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ матричний диференціальний оператор, $u(x)$ — стовпчик невідомих функцій і λ — довільний дійсний параметр. Нехай, крім того, областю зміни аргументів системи є сфера радіуса R з центром в початку координат.

Точку $y_1(0,0,0,R)$ перетворенням, матриця якого

$$T_x = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & x_3 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

можна перевести в будь-яку точку сфери $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Це перетворення будемо записувати так:

$$x = T_x y_1. \tag{2}$$

Матриця перетворення T_x ортогональна і оборотна. Надалі матрицю перетворення будемо називати просто перетворенням.

Нехай тепер φ — будь-яке перетворення, що переводить якусь точку y сфери в будь-яку іншу точку x цієї ж сфери, тобто

$$x = \varphi y. \tag{3}$$

Очевидно, T_x є частковий випадок перетворення φ, а тому

$$\varphi y_1 = T_x y_1,$$

звідки

$$y_1 = T_x^{-1} \varphi y_1. \tag{4}$$

Із останнього випливає, що перетворення $T_x^{-1}\varphi$ залишає нерухомою вісь ox_4. Таким чином, перетворення (4) є обертання навколо осі ox_4. Позначимо його через

$$P = T_x^{-1}\varphi,$$

звідки

$$\varphi = T_x P.$$

Обертання навколо осі ox_4 можна здійснити за допомогою трьох таких перетворень:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система диференціальних рівнянь називається інваріантною відносно перетворення φ, якщо

$$G \sum_{k\,l=1}^{4} A_{\kappa l}(y) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} G^{-1} = A_{ij}(x),$$

$$G \sum_{k=1}^{4} A_{\kappa}(y) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} G^{-1} = A_i(x),$$

$$GA_0(y)\, G^{-1} = A_0(x).$$

Якщо система буде інваріантною відносно перетворення φ, то вона повинна бути інваріантною і відносно його часткового випадку T_x, а тому як для перетворення T_x, так і для перетворення $T_x\, P$, коефіцієнти системи повинні бути тотожними.

Виходячи з цього, умови інваріантності для матриць коефіцієнтів при других похідних системи відносно перетворення φ на сфері радіуса R можна записати у вигляді

$$T_x \sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}^{(y)} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y} T_x^{-1} \equiv T_x P \sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(y) \frac{\partial x_k}{\partial y_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} P^{-1} T_x^{-1},$$

звідки

$$\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(y) \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \equiv P \sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}(y) \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} P^{-1}, \tag{5}$$

де $A_{ij}(y)$ — матриці коефіцієнтів при других похідних системи.

Умови (5) можна записати окремо для матриць P_1, P_2 і P_3. Тому що ці умови є тотожні, то вони, зокрема, мають місце і для $y_1(0,0,0,R)$. В цій точці і знаходимо матриці коефіцієнтів A_{ij}. Співвідношення (5) диференціюємо по φ_i і припускаємо, що $\varphi_i = 0$. Використовуючи (5), знаходимо конкретний вигляд матриць A_{ij}.

Матриці коефіцієнтів при перших похідних системи і вільні члени знаходять аналогічно з використанням умов інваріантності для них, подібних (5).

Маючи зв'язок між матрицями коефіцієнтів системи в точках y і x:

$$T_x \sum_{k,l=1}^{4} A_{kl}(y) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} T_x^{-1} = A_{ij}(x),$$

$$T_x \sum_{k=1}^{4} A_k(y) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} T_x^{-1} = A_i(x),$$

$$T_x A_0(y) T_x^{-1} = A_0(x),$$

знаходимо їх конкретний вигляд у будь-якій точці x. При знаходженні матриць коефіцієнтів системи враховувалась також умова ортогональності системи до вектора $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Одержану систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими, інваріантну відносно обертання в чотиривимірному просторі і ортогональну до вектора $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$, перераховуємо в сферичній системі координат. Тому що для сфери R— стала, незалежними змінними залишуються α_1, α_2, α_3. При цьому використовуємо зв'язок між координатами точки в декартовій і сферичній системах координат:

$$x_1 = R \cos \alpha_1,$$

$$x_2 = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

$$x_3 = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3,$$

$$x_4 = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3.$$

Вимога, щоб система була ортогональною до вектора $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$, тотожня вимозі, щоб розв'язок цієї системи був ортогональним до x, тобто розв'язок повинен бути ортогональним до радіуса сфери (знаходитись в дотичній площині до сфери). Звідси стовпчик розв'язків виглядає так:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Після підрахунків одержуємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими, яка буде інваріантною відносно обертань на сфері. А тому що обертання на сфері утворюють групу руху в неевклідовому просторі, одержимо систему рівнянь, інваріантну відносно неевклідової групи руху:

$$\sum_{i,j=1}^{3} A'_{ij} \frac{\partial v}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^{3} A'_i \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} + A'_0 v = 0,$$

$$A'_{11} = \begin{pmatrix} a_{11}^{11}(R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{11}(R) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{11}(R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A'_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a^{12}_{12}(R) & 0 & 0 \\ \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{12}_{12}(R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A'_{22} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^{11}_{11}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A'_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{a^{12}_{12}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A'_{33} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^{11}_{22}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a^{11}_{11}(R)}{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$