Б. В. КОВАЛЬЧУК

НАБЛИЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ, ВИЗНАЧЕНИХ ПОЛІГАРМОНІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

Нехай $\Lambda^{(r)} H_{\omega_1, \omega_2}$ — клас функцій $f(x,y)$ періоду 2π по x і y, що мають узагальнену похідну (за Соболєвим) $2r$-го порядку:

$$\varphi(x,y) = \Delta^r f = \Delta(\Delta^{r-1} f) \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

для якої виконується співвідношення

$$|\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)| \leqslant \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|), \tag{1}$$

де ω_1 і ω_2 — задані модулі неперервності.

Позначимо через

$$E_{m,n}(\Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}; x,y) = \sup_{f \in \Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}} |f(x,y) - S_{m,n}(f;x,y)| \tag{2}$$

верхню грань відхилень $f(x,y)$ від їх сум Фур'є $S_{m,n}(f;x,y)$, поширену на ввесь клас $\Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}$.

Треба довести таку теорему.

Теорема. *Для $r \geqslant 1$ (r — ціле) має місце асимптотична рівність*

$$E_{m,n}(\Lambda^{(r)} H_{\omega_1,\omega_2}; x, y) =$$

$$= \Theta_{m,n} \frac{8}{\pi^4} \frac{\ln m \ln n}{(m^2+n^2)^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{m}\right), \omega_2\left(\frac{2v}{n}\right)\right\} \sin u \sin v \, du \, dv +$$

$$+ O\left[\left(\ln m + \ln n\right)\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{2r}} + \frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{2r}}\right)\right], \tag{3}$$

де $\Theta_{m,n} = 1$, якщо ω_1 і ω_2 — випуклі функції, а в загальному випадку

$$\frac{1}{2} \leqslant \Theta_{m,n} \leqslant 1.$$

Доведення. Оскільки верхня грань (2) не залежить від x і y, то при її знаходженні можна припустити, що $x = y = 0$. Крім цього, шукана верхня грань не зміниться, якщо її поширити на більш вузький клас $H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}$ функцій φ, які належать до класу H_{ω_1,ω_2} і задовольняють умову $\varphi(0,0)=0$.

Далі, для даного класу функцій можна одержати інтегральне зображення [2]:

$$f(x, y)=\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{(r)}\lambda_{k,l}}{\pi^2(k^2+l^2)^r}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+u, y+v)\cos ku\cos lv\,du\,dv,$$

де штрих при сумі означає, що пропущений член $k=l=0$,

$$\lambda_{\kappa,l}=\begin{cases}1 \text{ при } k\geqslant 1,\ l\geqslant 1,\\ \frac{1}{2} \text{ при } k=0,\ l\geqslant 1;\ k\geqslant 1;\ l=0.\end{cases}$$

Тепер не важко знайти, що

$$E_{m,n}=\sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}}\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u, v)\sum_{0}^{m}\sum_{0}^{n}D_{\kappa,l}(u, v)\,du\,dv\right|, \tag{4}$$

де

$$D_{k,l}(u, v)=\left(\sum_{k+1}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}+\sum_{0}^{k}\sum_{l+1}^{\infty}\right)\frac{\lambda_{ij}}{(i^2+j^2)^r}\cos iu\cos jv.$$

Звідси, спираючись на результати [3], [4], [5], після ряду оцінок приходимо до рівності

$$E_{m,n}=\sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}}\left|\frac{1}{(m^2+n^2)^r\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u,v)D_{\kappa}(u)D_l(v)\,du\,dv\right|+$$
$$+O\left[(\ln m+\ln n)\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)}{m^{2r}}+\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{2r}}\right)\right], \tag{5}$$

де $D_{\kappa}(u)$ — ядро Діріхле.

Але на основі теореми П. Т. Бугайця [1] маємо:

$$\sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}}\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u, v)D_{\kappa}(u)D_l(v)\,du\,dv\right|=$$

$$=\Theta_{m,n}\frac{8\ln m\ln n}{\pi^4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{m}\right), \omega_2\left(\frac{2v}{n}\right)\right\}\sin u\sin v\,du\,dv+$$
$$+O\left[(\ln m+\ln n)\left(\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$

Цим завершується доведення теореми.

Зауважимо, що рівність (3) є асимптотичною при $m, n \to \infty$, якщо $C_1 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant C_2$, де C_1 і C_2 — додатні константи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугаец П. Т. ДАН СССР, 79, № 4, 1951.
2. Бугров Я. С. Успехи матем. наук, XIII, вып. 2, № 2, 1958.
3. Ковальчук Б. В. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций. Тезисы докладов. Л., 1959.
4. Никольский С. М. ДАН СССР, 52, № 3, 1946.
5. Трофимов В. Н. Успехи матем. наук, XV, вып. 5 (95), 1960.