Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

А. М. КУЗЕМКО, С. П. ГАВЕЛЯ

ПРУЖНА РІВНОВАГА ТОНКОЇ ОБОЛОНКИ З ПРЯМОКУТНИМ КОНТУРОМ ПРИ ШАРНІРНОМУ ЗАКРІПЛЕННІ КРАЮ

Запропонований в [2] спосіб розв'язування граничних задач теорії тонких пологих оболонок за допомогою регулярних інтегральних рівнянь виявляється застосовним і до певних класів непологих оболонок. В результаті виникає можливість дати оцінку деяким загальновживаним припущенням, які робляться у випадку пологості. Нижче такі оцінки будуються для конкретної задачі про пружну рівновагу оболонки з розгортуваною серединною поверхнею. При цьому функції Гріна відповідних допоміжних задач для прямокутної області визначаються безпосередньо в явному вигляді, що дозволяє звести задачу до одного розв'язуючого регулярного інтегрального рівняння.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Як відомо [1], диференціальні рівняння загальної технічної моментної теорії тонких оболонок мають такий вигляд:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}(1-\sigma)\frac{1}{B}\frac{\partial\varkappa}{\partial x_2}+(1-\sigma)\left(Ku_1-\frac{K_2}{A}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1,$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial\Theta}{\partial x_2}-(1-\sigma)\frac{1}{A}\frac{\partial\varkappa}{\partial x_1}+(1-\sigma)\left(Ku_2-\frac{K_1}{B}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2, \tag{1}$$

$$-(k_1+k_2)\Theta+\frac{1-\sigma}{AB}\Big[2ABKw+\frac{\partial}{\partial x_1}(Bk_2u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(Ak_1u_2)-$$

$$-\frac{h^2}{12}\nabla^2(k_1^2+k_2^2)w-\frac{h^2}{12}\nabla^2\nabla^2 w=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_3.$$

Тут Θ та χ визначаються формулами

$$\Theta=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(Bu_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(Au_2)\right]+(k_1+k_2)w;$$

$$\chi=\frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(Bu_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(Au_1)\right].$$

Через ∇^2 позначено оператор

$$\nabla^2=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right],$$

u_1, u_2, w — компоненти вектора зміщень, k_1, k_2 — головні кривини, h — товщина, σ — коефіцієнт Пуассона, E — модуль Юнга, X_1, X_2, X_3 —

складові зовнішнього навантаження оболонки. Величини $A = A(x)$; $B = B(x)$ являють собою коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні $ds^2 = A^2 dx_1^2 + B^2 dx_2^2$, $K = k, k_2$ — її гауссова кривина (поверхня вважається віднесеною до її ліній кривини).

У випадку розгортуваності серединної поверхні, очевидно,

$$A = B = \mathrm{const};\ K = k_1 = 0;\ k_2 = k \neq 0. \tag{2}$$

Тоді система (1) набирає вигляду

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u_1 + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + Ak\sigma\frac{\partial w}{\partial x_1} + A\frac{\partial k}{\partial x_1}w = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_1;$$

$$\frac{1-\sigma}{2}\Delta u_2 + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + Ak\frac{\partial w}{\partial x_2} + A\frac{\partial k}{\partial x_2}w = -A^2\frac{1-\sigma^2}{Eh}X_2; \tag{3}$$

$$\Delta\Delta w + A^2\left(k^2\Delta w + 2\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{12k^4}{h^2}A^2 + \Delta k^2\right)A^2 w +$$

$$+ \frac{12k}{h^2}A^3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - 12A^3\frac{1-\sigma}{h^2}\frac{\partial}{\partial x_1}(ku_1) = \frac{12A^4(1-\sigma^2)}{Eh^3}X_3.$$

Δ означає тут оператор Лапласа.

Далі будуть розглядатись умови шарнірного закріплення контура

$$u_1|_s = u_2|_s = 0, \tag{4}$$

$$w|_s = \Delta w|_s = 0, \tag{5}$$

де Ω — область $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$, S — її контур.

Нехай

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right),\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},\quad \varkappa = \frac{1+\sigma}{3-\sigma},\ \Delta w = w^*.$$

В цих позначеннях задачі

$$(1-\varkappa)\Delta u(x) + 2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{6}$$

$$u(y) = 0 \qquad (y \in S) \tag{7}$$

та

$$\Delta w - w^* = \varphi_1(x) \qquad (x \in \Omega)$$

$$\Delta w^* = \varphi_2(x) \tag{8}$$

$$w(y) = w^*(y) = 0 \qquad (y \in S) \tag{9}$$

домовимось називати першою та другою допоміжними задачами відповідно.

ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ ГРІНА ДОПОМІЖНИХ ЗАДАЧ

Фундаментальна матриця системи (7), як наведено в [4], може бути взята у вигляді

$$\omega(x, \xi) = \frac{1-\varkappa^2}{\pi}\left\{I \ln r - \varkappa \frac{(x-\xi)(x-\xi)^*}{r^2}\right\}, \tag{10}$$

де $r = |x - \xi|$, $(x-\xi) = \begin{pmatrix} x_1 - \xi_1 \\ x_2 - \xi_2 \end{pmatrix}$, $(x-\xi)^* = (x_1 - \xi_1,\ x_2 - \xi_2)$.

Нехай

$$\omega^*(x, \xi) = \frac{1-\varkappa^2}{\pi}\left\{I \ln \bar{r} - \varkappa \frac{(x-\xi)(x-\xi)^*}{\bar{r}^2}\right\},$$

де

$$\bar{r} = \sqrt{|x-\xi|^2 + x_1 x_2 (a - x_1)(b - x_2)}.$$

Матриця Гріна $H(x, \xi)$ задач (6), (8) може бути зображена тоді у вигляді

$$H(x, \xi) = \omega(x, \xi) - \omega^*(x, \xi) + \omega^{**}(x, \xi), \tag{11}$$

де $\omega^{**}(x, \xi)$ визначається умовами

$$(1-\varkappa)\Delta_x \omega^{**}(x, \xi) + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega^{**}(x, \xi) =$$

$$= (1-\varkappa)\Delta_x \omega^*(x, \xi) + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega^*(x, \xi), \tag{12}$$

$$\omega^{**}(y, \xi) = 0. \tag{13}$$

В роботі [4] доведено, що розв'язок задач (12), (13) може бути знайдений у вигляді необмежено диференційовного по x в області Ω при $\varkappa < 1$ ряду

$$\omega^{**}(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varkappa^k \omega_\kappa(x, \xi), \tag{14}$$

коефіцієнти якого послідовно визначаються умовами

$$\Delta_x \omega_0(x, \xi) = F(x, \xi); \quad \Delta_x \omega_\kappa(x, \xi) = \Delta_x \omega_{k-1}(x, \xi) - 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega_{\kappa-1}(x, \xi); \tag{15}$$

$$\omega_0(y, \xi) = 0; \qquad \omega_\kappa(y, \xi) = 0; \qquad (x, \xi \in \Omega, y \in S),$$

де $F(x, \xi) = (1-\varkappa)\Delta_x \omega^*(x, \xi) + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^*}{\partial x}\omega^*(x, \xi)$ — матриця необмежено-диференційовних по x при довільному $\xi \in \Omega$ функцій $F_{ij}(x, \xi)(i, j = 1,2)$. З цих властивостей функцій $F_{ij}(x, \xi)$ випливає ефективність збіжності (при $\xi \in \Omega$) рядів

$$F_{ij}(x, \xi) = \sum_{m, n}^{\infty} f_{ij}^{mn}(\xi) \sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \tag{16}$$

де

$$f_{ij}^{m.n}(\xi) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F_{ij}(x, \xi)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}. \tag{17}$$

Шукаючи, далі, розв'язки задач (15) у вигляді

$$\omega_{k;i,j}(x,\xi)=\sum_{m,n}^{\infty}\alpha_{k;i,j}^{m,n}\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \tag{18}$$

одержуємо такі вирази коефіцієнтів:

$$\alpha_{o;i,j}^{m,n}=\frac{4abf_{i,j}^{m,n}(\xi)}{\pi^2(b^2m^2+a^2n^2)}, \tag{19}$$

. . . .

$$\alpha_{k;i,j}^{m,n}=\frac{4abf_{k;i,j}^{m,n}(\xi)}{\pi^2(b^2m^2+a^2n^2)},$$

де

$$f_{k;1,1}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)\alpha_{k-1;1,1}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n-q^2)}\alpha_{k-1;2,1}^{p,q}(\xi),$$

$$f_{k;2,2}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{n^2}{b^2}-\frac{m^2}{a^2}\right)\alpha_{k-1;2,2}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}\alpha_{k-1,1,2}^{p,q}(\xi),$$

$$f_{k;1,2}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)\alpha_{k-1;1,2}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}\alpha_{k-1;2,2}^{p,q}(\xi),$$

$$f_{k;2,1}^{m,n}(\xi)=\pi^2\left(\frac{n^2}{b^2}-\frac{m^2}{a^2}\right)\alpha_{k-1;2,1}^{m,n}(\xi)-\frac{32}{ab}\sum_{p,q}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}\alpha_{k-1;1,1}^{p,q}(\xi).$$

В сумі $\sum\limits_{p,q}^{\infty}$ індекс p (або q) набирає лише парних значень, якщо m (або відповідно n) непарне, і навпаки.

З формул (17) та (19) легко бачити, що визначені таким чином ряди (18) принаймні двічі неперервно диференційовні. З цього та властивостей ряду (14) випливає принаймні двічі неперервна диференційовність ряду

$$\omega^{**}(x,\xi)=\sum_{m,n}^{\infty}\omega_{m,n}^{**}(\xi)\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \tag{20}$$

де

$$\omega_{m,n}^{**}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa^k\alpha_k^{m,n}(\xi),\quad \alpha_k^{m,n}(\xi)=\begin{pmatrix}\alpha_{k;1,1}^{m,n}(\xi) & \alpha_{k;1,2}^{m,n}(\xi)\\ \alpha_{k;2,1}^{m,n}(\xi) & \alpha_{k;2,2}^{m,n}(\xi)\end{pmatrix}.$$

Слід зауважити, що коефіцієнти $\omega_{m,n}^{**}(\xi)$ в (20) можуть бути одержані безпосередньо з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка утворюється в результаті підставлення виразу (20) в рівняння (12), якщо при цьому взяти до уваги, що

$$\cos\frac{m\pi x_1}{a} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{l=1,3,5,\ldots}^{\infty} \dfrac{l}{l^2-m^2} \sin\dfrac{l\pi x_1}{a} & \text{при } m \text{ парному,} \\ \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{l=2,4,6,\ldots}^{\infty} \dfrac{l}{l^2-m^2} \sin\dfrac{l\pi x_1}{a} & \text{при } m \text{ непарному.} \end{cases}$$

Результати роботи [4] переконують, отже, в можливості знаходження розв'язку одержуваної таким чином системи методом послідовних наближень.

Побудована таким способом функція Гріна $H(x, \xi)$ дає, очевидно, розв'язання задачі про плоску деформацію жорстко затиснутої прямокутної пластинки під дією навантаження $f(x)$ у вигляді

$$u(x) = \iint_{\Omega} H(x, \xi) f(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

де $u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$ — вектор зміщень, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$.

Функція Гріна $\Gamma(x, \xi)$ другої допоміжної задачі (8), (9) може бути визначена виразом

$$\Gamma(x,\xi) = \frac{1}{2\pi} I \ln\frac{\overline{r}}{r} + \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ 0 & \omega_{22} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

де $\omega_{ik}(x, \xi)$ задовольняють умови

$$\Delta\omega_{11}(x, \xi) = -\Delta \ln \overline{r}, \qquad \Delta\omega_{22}(x, \xi) = -\Delta \ln \overline{r},$$

$$\Delta\omega_{12}(x, \xi) = \omega_{22}(x, \xi) + \ln\frac{\overline{r}}{r}, \qquad (x, \xi \in \Omega),$$

$$\omega_{11}(y, \xi) = \omega_{12}(y, \xi) = \omega_{22}(y, \xi) = 0, \qquad (y \in S).$$

Шукаючи $\omega_{ij}(x, \xi)$ у вигляді

$$\omega_{ij}(x, \xi) = \sum_{k,l}^{\infty} \omega_{ij}^{k,l}(\xi) \sin\frac{k\pi x_1}{a} \sin\frac{l\pi x_2}{b}, \tag{22}$$

одержуємо

$$\omega_{ij}^{k,l}(x, \xi) = \frac{4ab\beta_{ij}^{k,l}(\xi)}{\pi^2(k^2b^2 + l^2a^2)}, \tag{23}$$

де

$$\beta_{22}^{k,l}(\xi) = \beta_{11}^{k,l}(\xi) = -\frac{q}{ab} \int_0^a \int_0^b \Delta \ln \overline{r} \sin\frac{k\pi x_1}{a} \sin\frac{l\pi x_2}{b}\, dx_1\, dx_2, \tag{24}$$

$$\beta_{1,2}^{k,l}(\xi) = -\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \ln\frac{\overline{r}}{r} \sin\frac{k\pi x_1}{a} \sin\frac{l\pi x_2}{b}\, dx_1\, dx_2 + \frac{4ab\beta_{22}^{k,l}(\xi)}{\pi^2(k^2b^2 + l^2a^2)}. \tag{25}$$

З виразів (24), (25) випливає допустимість почленного диференціювання рядів (22).

Визначена виразом (21) функція Гріна $\Gamma(x, \xi)$ дає розв'язання задачі про згин жорстко затиснутої прямокутної пластинки під дією навантаження $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ у вигляді

$$w(x) = \iint_\Omega \Gamma(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d_\xi \Omega.$$

РОЗВ'ЯЗУЮЧЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

Розв'язок задач (3), (4), (5) будемо шукати у вигляді

$$u_1(x) = \iint_\Omega g_{11}(x, \xi)\, \mu_1(\xi)\, d_\xi \Omega + \iint_\Omega g_{12}(x, \xi)\, \mu_2(\xi) d_\xi \Omega;$$

$$u_2(x) = \iint_\Omega g_{21}(x, \xi)\, \mu_1(\xi)\, d_\xi \Omega + \iint_\Omega g_{22}(x, \xi)\, \mu_2(\xi)\, d_\xi \Omega; \tag{26}$$

$$w(x) = \iint_\Omega \gamma_{11}(x, \xi)\, \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega + \iint_\Omega \gamma_{12}(x, \xi) \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega; \tag{27}$$

$$w^*(x) = \iint_\Omega \gamma_{22}(x, \xi)\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

де $g_{ij}(x, \xi)$ та $\gamma_{ij}(x, \xi)$ — елементи матриць Гріна першої та другої допоміжної задач відповідно.

Підстановка потенціалів (26) та (27) в систему

$$\frac{1-\sigma}{2} \Delta u_1 + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + A k \sigma \frac{\partial w}{\partial x_1} + A \frac{\partial k}{\partial x_1} w = -A^2 \frac{1-\sigma^2}{Eh} X_1;$$

$$\frac{1-\sigma}{2} \Delta u_2 + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + A k \frac{\partial w}{\partial x_2} + A \frac{\partial k}{\partial x_2} w = -A^2 \frac{1-\sigma^2}{Eh} X_2;$$

$$\Delta w^* + A^2 \left(k^2 w^* + 2 \frac{\partial k^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial k^2}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{12 k^4}{h^2} A^2 + \Delta k^2 \right) A^2 w +$$

$$+ A^3 \frac{12k}{h^2} \left(\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - 12 A^3 \frac{1-\sigma}{h^2} \frac{\partial k}{\partial x_1} u_1 = \frac{12 A^4 (1-\sigma^2)}{Eh^3} X_3;$$

$$\Delta w - w^* = 0$$

дає послідовно

$$\mu_1(x) = -A^2 \frac{1-\sigma^2}{Eh} X_1(x) - A \iint_\Omega \left\{ k\sigma \frac{\partial \gamma_{11}(x_1 \xi)}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial k}{\partial x_1} \gamma_1(x_1, \xi) \right\} \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega - A \iint_\Omega \left\{ k\sigma \frac{\partial \gamma_{12}(x_1 \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial k}{\partial x_1} \gamma_{12}(x, \xi) \right\} \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega; \tag{28}$$

$$\mu_2(x) = -A^2 \frac{1-\sigma^2}{Eh} X_2(x) - A \iint_\Omega \left\{ k \frac{\partial \gamma_{11}(x, \xi)}{\partial x_2} + \frac{\partial k}{\partial x_2} \gamma_{11}(x, \xi) \right\} \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega -$$

$$- A \iint_\Omega \left\{ k \frac{\partial \gamma_{12}(x, \xi)}{\partial x_2} + \frac{\partial k}{\partial x_2} \gamma_{12}(x, \xi) \right\} \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega;$$

$$u_i(x) = P_i(x) - \iint_{\Omega} K_{i1}(x, \xi)\, \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega - \iint_{\Omega} k_{i2}(x, \xi)\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega, \tag{29}$$

де

$$P_i(x) = -A^2 \frac{1-\sigma^2}{Eh} \iint_{\Omega} [g_{i1}(x, \xi)\, X_1(\xi) + g_{i2}(x, \xi)\, X_2(\xi)]\, d_\xi \Omega,$$

$$K_{ij}(x, \xi) = A \iint_{\Omega} \partial_{i1}(x, \xi) \left[\sigma \frac{\partial k(\zeta)\, \gamma_{1j}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial k(\zeta)\, \gamma_{1i}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_1}\right] d_\zeta \Omega +$$

$$+ A \iint_{\Omega} g_{i2}(x, \zeta) \left[(\sigma + 1) \frac{\partial k(\zeta)\, \gamma_{1i}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_1} + \sigma\, k(\zeta)\, \frac{\partial \gamma_{2i}(\zeta, \xi)}{\partial \zeta_2}\right] d_\zeta \Omega,$$

$$\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sigma \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \iint_{\Omega} \left[\sigma \frac{\partial K_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{21}(x, \xi)}{\partial x_2}\right] \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega -$$

$$- \iint_{\Omega} \left[\sigma \frac{\partial K_{12}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{22}(x, \xi)}{\partial x_2}\right] \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$\nu_1(x) = \iint_{\Omega} \gamma_{22}(x, \xi)\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$\nu_2(x) + \iint_{\Omega} \Big\{ 2A^2 \frac{\partial k^2}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + 2A^2 \frac{\partial k}{\partial x_2} \frac{\partial \gamma_{11}(x, \xi)}{\partial x_2} +$$

$$+ \left(\frac{12k^4}{h^2} A^2 + \Delta k^2\right) A^2 \gamma_{11}(x, \xi) - \frac{12\, A^3 k}{h^2} \left(\sigma \frac{\partial K_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{x K_{21}(x, \xi)}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ \frac{12(1-\sigma)}{h^2} A^3 K_{11}(x, \xi) \Big\}\, \nu_1(\xi)\, d_\xi \Omega + \iint_{\Omega} \Big\{ A^2 k^2 \gamma_{22}(x, \xi) + \tag{30}$$

$$+ 2A^2 \frac{\partial k^2}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_{12}(x, \xi)}{\partial x_1} + 2A^2 \frac{\partial k}{\partial x_2} \frac{\partial \gamma_{12}(x, \xi)}{\partial x_2} + \frac{12 A^4 k^4}{h^2} \gamma_{12}(x, \xi) +$$

$$+ A^2 \Delta k^2 \gamma_{12}(x, \xi) - \frac{12\, A^3 k}{h^2} \left(\sigma \frac{\partial K_{11}(x, \xi)}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{21}(x, \xi)}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ \frac{12 A^3 (1-\sigma)}{h^2} K_{12}(x, \xi) \Big\}\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega + \frac{12}{h^2} A^3 \left(k\sigma \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + k \frac{\partial P_2}{\partial x_2} +\right.$$

$$\left. + (1-\sigma) \frac{\partial k}{\partial x_1} P_1(x)\right) = \frac{12\, A^4 (1-\sigma^2)}{E h^3} X_3.$$

Звідси одержуємо таке розв'язуюче рівняння:

$$\nu_2(x) + \iint_{\Omega} [M(x, \xi) + m(x, \xi)]\, \nu_2(\xi)\, d_\xi \Omega =$$

$$= \frac{12}{E h^3} A^4 (1-\sigma^2)\, X_3 - \frac{12}{h^3} A^3 Q, \tag{31}$$

де

$$M(x, \xi) = \left(\frac{12 A^2 k^4}{h^2} + \Delta k^2\right) A^2 \gamma_{11}(x, \xi) +$$

$$+\frac{12K}{h^2}A^3\left(\sigma\frac{\partial K_{12}(x,\xi)}{\partial x_1}+\frac{\partial K_{22}(x,\xi)}{\partial x_2}+\frac{1-\sigma}{k}K_{12}(x,\xi)\right)+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\left\{\left(\frac{12k^4}{h^2}A^2+\Delta k^2\right)A^2\gamma_{11}(x,\zeta)-\frac{12A^3}{h^2}\left(k\sigma\frac{\partial K_{11}(x,\zeta)}{\partial x_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+k\frac{\partial K_{21}(x,\zeta)}{\partial x_2}+(1-\sigma)K_{11}(x,\zeta)\right)\right\}\gamma_{22}(\zeta,\xi)\,d_{\zeta}\Omega;$$

$$m(x,\xi)=A^2k^2\gamma_{22}(x,\xi)+2A^2\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_{12}(x,\xi)}{\partial x_1}+2A^2\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial\gamma_{12}(x,\xi)}{\partial x_2}+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}2A^2\left\{\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\gamma_{11}(x,\zeta)}{\partial x_2}+\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial\gamma_{11}(x,\zeta)}{\partial x_2}\right\}\gamma_{22}(\zeta,\xi)\,d_{\xi}\Omega;$$

$$Q=k\sigma\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+k\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+(1-\sigma)\frac{\partial k}{\partial x_1}P_1(x).$$

З цих виразів легко переконатись в регулярності одержаного рівняння (31).

ОЦІНКИ ДЕЯКИХ ПРИПУЩЕНЬ

У випадку пологості розглядуваної оболонки в системі (3) часто нехтують членами

$$A^2\left(k^2\Delta w+2\frac{\partial k^2}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1}+2\frac{\partial k^2}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) \tag{32}$$

(див., наприклад, [1], стор. 317). Розв'язуюче рівняння (31) дозволяє ефективно оцінити абсолютні похибки δu_1, δu_2, δw, компонент вектора зміщень, які вносить це нехтування. А саме, використовуючи результати, наведені в [3] на стор. 158 (які, очевидно, залишаються справедливими і для двовимірного випадку), маємо:

$$\delta\nu_2(x)<q,$$

де $\delta\nu_2(x)$ — абсолютна похибка величини $\nu_2(x)$,

$$q=\frac{Nm^*(1+B)^2}{1-m^*(1+B)},$$

$$N>\frac{12A^3(1-\sigma^2)}{Eh^3}|z|,\; m^*>\iint\limits_{\Omega}|m(x,\xi)|\,d_{\xi}\Omega,$$

$$B>\iint\limits_{\Omega}R(x,\xi)\,d_{\xi}\Omega,\; z=AX_3-EQ,$$

$R(x,\xi)$ — резольвента рівняння (31).

З (29), (30) та (27) тоді одержимо:

$$\delta u_1<qQ_1,\; \delta u_2=qQ_2,\; \delta w<qQ_3,$$

де

$$Q_1>\iint\limits_{\Omega}\left|\iint\limits_{\Omega}K_{11}(x,\zeta)\gamma_{22}(\zeta,\xi)\,d_{\zeta}\Omega+K_{12}(x,\xi)\right|d_{\xi}\Omega,$$

$$Q_2 > \iint_{\Omega} \left| \iint_{\Omega} K_{21}(x, \zeta)\, \gamma_{22}(\zeta, \xi)\, d_{\zeta}\Omega + K_{22}(x, \xi) \right| d_{\xi}\Omega,$$

$$Q_3 > \iint_{\Omega} \left| \iint_{\Omega} \gamma_{11}(x, \zeta)\, \gamma_{22}(\zeta, \xi)\, d_{\zeta}\Omega + \gamma_{12}(x, \xi) \right| d_{\xi}\Omega.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, 1949.
2. Гавеля С. П., Кузeмко А. М. Збірник праць аспірантів мех.-мат. факультету Львів. університету. Вид. Львів. ун-ту, 1961.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, 1952.
4. Лопатинский Я. Б. Теоретическая и прикладная математика, в. I. Львов, 1958.