Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Л. М. ЗОРІЙ

ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Проблема стійкості рівноваги є за своїм характером динамічною і вимагає дослідження малих коливань. У консервативних системах ця динамічна задача замінюється статичною — визначаються умови існування форми рівноваги, близької до досліджуваної. Однак реальні системи внаслідок наявності сил тертя та пружних недосконалостей завжди мають деякі властивості неконсервативних систем. Розповсюдженим неконсервативним навантаженням є гідростатичний тиск.

Аналіз умов стійкості рівноваги найпростішої неконсервативної системи, наведений у цій статті, показує, що мале тертя може істотно змінювати границю області стійкості. Отже, статичний підхід до задач стійкості реальних систем вимагає обгрунтування. Нижче доводиться законність застосування статичного й енергетичного методів до задач стійкості рівноваги пружних систем, коли відсутні зовнішні неконсервативні навантаження. Для кругової арки під гідростатичним тиском обгрунтовується статичний метод знаходження критичного навантаження.

СИСТЕМА З ДВОМА СТЕПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Розглянемо найпростішу модель пружної системи — «подвійний маятник» [8] (рис. 1). У шарнірах O і A введені пружні в'язі з жорсткістю c, що перешкоджають стержням OA і AB відхилятися від вертикалі, та сили тертя, пропорційні швидкості, з коефіцієнтами пропорціональності b_1 і b_2. В точках A і B зосереджені маси $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ і сили $G_1 = 2G$, $G_2 = G$. Припускається, що $OA = AB = l$. До вільного кінця прикладена сила P, яка при русі змінює свій напрям так, що $\varphi = \eta\varphi_2$, де η — деякий параметр. Для порівняння величин неконсервативної сили P і сил ваги введений параметр $\varkappa$ за допомогою співвідношення $P = \varkappa G$.

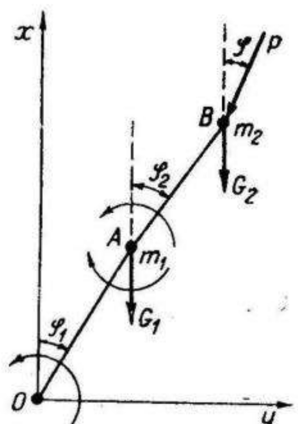

Рис. 1.

Силу P називатимемо слабо неконсервативною, якщо вона при деформації змінює свій напрям незначно або є малою в порівнянні із зовнішніми консервативними силами.

Будемо досліджувати стійкість рівноваги, коли система займає вертикальне положення. Приймаючи за узагальнені координати кути φ_1 і φ_2, складемо рівняння малих коливань навколо вказаного положення рівноваги ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). Кінетичну енергію системи T можна записати у вигляді

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j, \qquad (1)$$

де $a_{11} = 3ml^2$, $a_{12} = a_{22} = ml^2$, а потенціальну енергію П так:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}\varphi_i\varphi_j, \qquad (2)$$

де $c_{11} = 2c - 3Gl$, $c_{12} = -c$, $c_{22} = c - Gl$.

Обчислюючи елементарну роботу сили P і сил тертя, одержимо узагальнені сили (неконсервативні):

$$Q_1 = Pl(\varphi_1 - \eta\varphi_2) - 2b_1\dot{\varphi}_1 + b_2\dot{\varphi}_2;$$

$$Q_2 = Pl\varphi_2(1-\eta) + b_1\dot{\varphi}_1 - b_2\dot{\varphi}_2. \qquad (3)$$

За допомогою рівнянь Лагранжа другого роду напишемо рівняння малих коливань системи навколо прямолінійної форми рівноваги $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$:

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + 2b_1\dot{\varphi}_1 - b_2\dot{\varphi}_2 + (c_{11} - Pl)\varphi_1 + (c_{12} + Pl\eta)\varphi_2 = 0;$$

$$a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 - b_1\dot{\varphi}_1 + b_2\dot{\varphi}_2 + c_{12}\varphi_1 + [c_{22} - Pl(1-\eta)]\varphi_2 = 0. \qquad (4)$$

Характеристичне рівняння одержаної системи рівнянь можна записати у вигляді

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \qquad (5)$$

причому коефіцієнти останнього виражаються відповідно через коефіцієнти системи (4).

Згідно з відомою теоремою Ляпунова стан рівноваги асимптотично стійкий, якщо всі корені рівняння (5) мають від'ємні дійсні частини. Для цього необхідно і досить виконання нерівностей [2]:

$$p_2 > 0;\ p_4 > 0;\ p_3(p_1p_2 - p_0p_3) - p_4p_1^2 > 0. \qquad (6)$$

Введемо параметр α, що визначається так:

$$\alpha = b_2 / b_1. \qquad (7)$$

Область стійкості рівноваги будуємо для $\eta = 1$. При цьому вважатимемо b_1 і b_2 малими величинами одного і того ж порядку малості (α — кінцеве), а членами з b_1^2 нехтуватимемо. Тоді умови (6) можна переписати в такому вигляді:

$$7c - 2Pl - 6Gl > 0;$$

$$3G^2l^2 + Gl(Pl - 5c) + c^2 > 0;$$

$$2P^2(1-\alpha)(4+3\alpha) - P\left[(11 - 7\alpha - 32\alpha^2)\frac{c}{l} - G(7 - 8\alpha - 20\alpha^2)\right] -$$

$$- G^2(1 + 6\alpha + 6\alpha^2) + G\frac{c}{l}(7 + 21\alpha + 16\alpha^2) - \frac{c^2}{l^2}(10 + 21\alpha + 10\alpha^2) < 0. \qquad (8)$$

Зауважимо, що навантаження, яке визначається умовою $p_4 = 0$, можна знайти статичним методом; тому позначатимемо його $P_к^{ст}$. Із перших двох нерівностей (8) одержуємо, що для стійкості рівноваги повинно бути:

$$P < P'; \; P > P_k^{cm} \text{ при } G > 0, \; P < P_k^{cm} \text{ при } G < 0, \tag{9}$$

де $P' = -3G + \frac{7}{2}\frac{c}{l}$; $P_k^{cm} = -3G + 5\frac{c}{l} - \frac{1}{G}\frac{c^2}{l^2}$. (10)

Тому що третя з нерівностей (8) при $\alpha = 1$ перетворюється з квадратної відносно P в лінійну, маємо два випадки. При $\alpha = 1$ одержуємо

$$P < P_*, \tag{11}$$

де

$$P_* = 13G^2 - 44G\frac{c}{l} + 41\frac{c^2}{l^2} \Big| 28\frac{c}{l} - 21G. \tag{12}$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то P повинно задовольняти умову

$$P_1 < P < P_2, \tag{13}$$

де

$$P_{1,2} = \frac{(11 - 7\alpha - 32\alpha^2)\frac{c}{l} - G(7 - 8\alpha - 20\alpha^2) \mp \sqrt{f_1 G^2 - 2f_2 G\frac{c}{l} + f_3\frac{c^2}{l^2}}}{4(1-\alpha)(4+3\alpha)} \tag{14}$$

і

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 81 + 72\alpha - 96\alpha^2 + 128\alpha^3 + 256\alpha^4; \\ f_2(\alpha) &= 189 + 171\alpha - 300\alpha^2 + 80\alpha^3 + 448\alpha^4; \\ f_3(\alpha) &= 441 + 438\alpha - 743\alpha^2 - 136\alpha^3 + 784\alpha^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Нерівності (9), (11) і (13) визначають область стійкості рівноваги для довільного $\alpha > 0$. На рис. 2 наведені області стійкості для таких значень α: 0,5; 1; 1,5. Крім цього, нанесено граничні прямі:

а) при $\alpha = 0$

$$P_1 = -G + 2\frac{c}{l}; \quad P_2 = \frac{1}{8}G - \frac{5}{8}\frac{c}{l};$$

б) при $\alpha \to +\infty$

$$P_1 = -3G + 5\frac{c}{l}; \quad P_2 = -\frac{1}{3}G + \frac{1}{3}\frac{c}{l}. \tag{16}$$

Для порівняння побудована також крива

$$P_k = -2G + \frac{7}{2}\frac{c}{l} \mp \sqrt{2\frac{c^2}{l^2} - 3\frac{c}{l}G + G^2} \tag{17}$$

з роботи [8], одержана при припущенні, що тертя відсутнє ($b_1 = b_2 = b = 0$).

Із аналізу рис. 2 випливають такі особливості задачі стійкості рівноваги неконсервативної системи з двома степенями вільності:

1) при безмежно малих коефіцієнтах тертя область стійкості, як правило, істотно залежить від їх відношення;

2) в даній задачі можна вказати переміщення, на яких нестійкість рівноваги має місце при від'ємно-означеній роботі всіх сил, прикладених до системи;

3) мале тертя не змінює області стійкості, коли сила P досить мала.

Перша і третя особливості очевидні. Друга стає наочною, коли помітити таке: робота всіх сил без врахування розсіювання на довільному малому переміщенні при умові, що φ_1 і φ_2 змінюються монотонно, може бути записана у вигляді:

$$A = -\frac{1}{2}\left[(c_{11} - Pl)\,\varphi_1^2 + (2c_{12} + Pl)\,\varphi_1\varphi_2 + c_{22}\varphi_2^2\right]. \tag{18}$$

Нехай, наприклад, $G = -\frac{c}{l}$, $P = 2\frac{c}{l}$. Не важко переконатися, що тоді форма (18) є від'ємно-означеною, а рівновага системи — нестійкою.

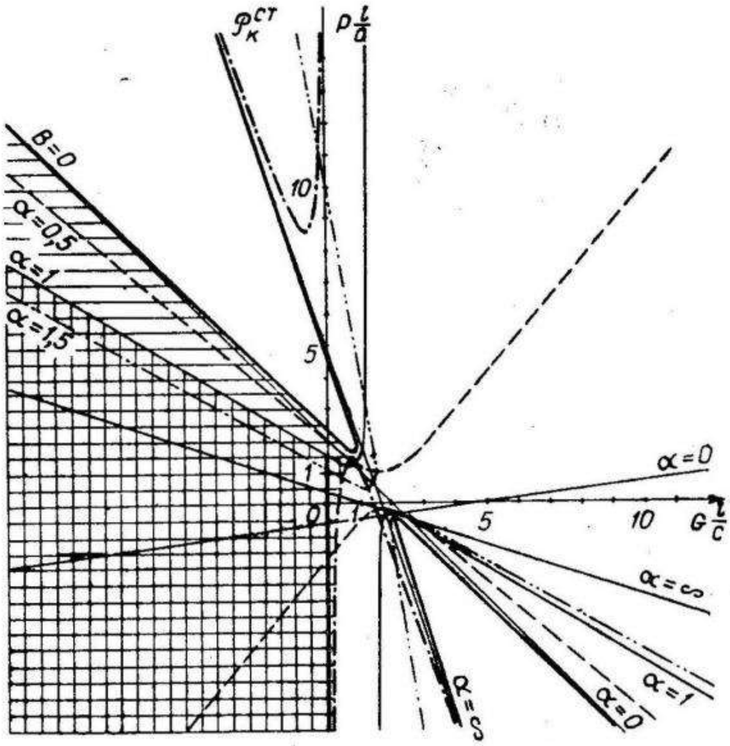

Рис. 2.

Покажемо, що при слабо неконсервативній силі P задачу стійкості рівноваги системи (рис. 1) можна розв'язувати статичним методом.

Введемо дисипативну функцію

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j, \tag{19}$$

де $b_{11} = 2b_1$; $b_{12} = -\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$; $b_{22} = b_2$.

При цьому система рівнянь (4) може бути записана так:

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + b_{11}\dot{\varphi}_1 + b_{12}\dot{\varphi}_2 + g_{12}\dot{\varphi}_2 + (c_{11} - Pl)\,\varphi_1 + (c_{12} + Pl\eta)\,\varphi_2 = 0;$$

$$a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + b_{12}\dot{\varphi}_1 + b_{22}\dot{\varphi}_2 - g_{12}\dot{\varphi}_1 + c_{12}\varphi_1 + [c_{22} - Pl(1-\eta)]\,\varphi_2 + 0, \tag{20}$$

де $g_{12} = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$.

Щоб одержати більш прості умови стійкості, перейдемо за допомогою неособливого лінійного перетворення до нових змінних Θ_1 і Θ_2: $\varphi_1 = \beta_1\Theta_1 + \beta_2\Theta_2$, $\varphi_2 = \Theta_1 + \Theta_2$, вибравши β_1 і β_2 так, щоб у нових координатах кінетична енергія (1) і дисипативна функція (19) були зведені до суми квадратів:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} A_i \dot{\Theta}^2{}_i; \quad F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} B_i \dot{\Theta}^2{}_i. \tag{21}$$

Відомо [4], що при цьому β_1 і β_2 визначаються як корені квадратного рівняння

$$\beta^2 - v\beta + u = 0, \tag{22}$$

де

$$v=\frac{b_{11}a_{22}-b_{22}a_{11}}{a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}}, \quad u=\frac{b_{22}a_{12}-b_{12}a_{22}}{a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}}, \tag{23}$$

і тоді

$$A_i = a_{11}\beta^2{}_i + 2a_{12}\beta_i + a_{22},$$
$$B_i = b_{11}\beta^2{}_i + 2b_{12}\beta_i + b_{22} \quad (i=1,2). \tag{24}$$

З фізичного змісту задачі випливає, що корені рівняння (22) завжди дійсні. Потенціальна енергія (2) в нових координатах має вигляд

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} C_{ij}\Theta_i\Theta_i, \tag{25}$$

причому

$$C_{ii} = c_{11}\beta^2{}_i + 2c_{12}\beta_i + c_{22},$$
$$C_{12} = c_{11}u + c_{12}v + c_{22} \tag{26}$$
$$(i=1,\ 2),$$

а узагальнені сили без дисипативних членів можна записати так:

$$Q_1{}^* = -Pl(m_{11}\Theta_1 + m_{12}\Theta_2) - G_{12}\Theta_2,$$
$$Q_2{}^* = -Pl(m_{21}\Theta_1 + m_{22}\Theta_2) + G_{12}\Theta_1, \tag{27}$$

де

$$m_{ij} = \eta(\beta_i + 1) - (\beta_i\beta_j + 1) \tag{28}$$
$$(i,\ j=1,\ 2),$$
$$G_{12} = g_{12}(\beta_1 - \beta_2). \tag{29}$$

За допомогою рівнянь Лагранжа одержимо рівняння першого наближення в нових координатах:

$$A_1\ddot{\Theta}_1 + B_1\dot{\Theta}_1 + G_{12}\dot{\Theta}_2 + (C_{11} + m_{11}Pl)\Theta_1 + (C_{12} + m_{12}Pl)\Theta_2 = 0,$$
$$A_2\ddot{\Theta}_2 + B_2\dot{\Theta}_2 - G_{12}\dot{\Theta}_1 + (C_{12} + m_{21}Pl)\Theta_1 + (C_{22} + m_{22}Pl)\Theta_2 = 0. \tag{30}$$

Припустимо, що

$$D_{ii} = C_{ii} + m_{ii}Pl \quad (i=1,2), \tag{31}$$
$$D_{12} = C_{12} + \frac{1}{2}\left(m_{12} + m_{21}\right)Pl; \quad E_{12} = \frac{1}{2}(m_{12} - m_{21})Pl.$$

Після цього система рівнянь (30) матиме вигляд:

$$A_1\ddot{\Theta}_1 + B_1\dot{\Theta}_1 + G_{12}\dot{\Theta}_2 + D_{11}\Theta_1 + D_{12}\Theta_2 + E_{12}\Theta_2 = 0,$$

$$A_2\ddot{\Theta}_2 + B_2\dot{\Theta}_2 - G_{12}\dot{\Theta}_1 + D_{12}\Theta_1 + D_{22}\Theta_2 - E_{12}\Theta_1 = 0. \quad (32)$$

Характеристичне рівняння останньої системи таке:

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \quad (33)$$

де

$$\begin{aligned} &p_0 = A_1A_2, \quad p_1 = A_1B_2 + A_2B_1, \\ &p_2 = A_1D_{22} + A_2D_{11} + B_1B_2 + G_{12}^2, \\ &p_3 = B_1D_{22} + B_2D_{11} + 2G_{12}E_{12}, \\ &p_4 = D_{11}D_{22} - D_{12}^2 + E_{12}^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Приймаючи тертя малим настільки, що у виразі для p_2 можна нехтувати двома останніми членами, одержуємо необхідні і достатні умови (6), щоб усі корені рівняння (33) мали від'ємні дійсні частини:

$$\begin{gathered} A_1D_{22} + A_2D_{11} > 0; \; D_{11}D_{22} - D_{12}^2 + E_{12}^2 > 0, \\ B_1B_2(A_1D_{22} - A_2D_{11})^2 + (A_1B_2 + A_2B_1)^2(D_{12}^2 - E_{12}^2) + \quad (35) \\ + 2E_{12}G_{12}[A_1^2B_2D_{22} + A_2^2B_1D_{11} - A_1A_2(B_1D_{22} + B_2D_{11} - 2G_{12}E_{12})] > 0. \end{gathered}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $b_1 = b_2$. Тоді із (20) випливає, що $g_{12} = 0$; отже, зникає коефіцієнт G_{12} (29), тобто відсутні гіроскопічні сили. При цьому остання з нерівностей (35) значно спрощується.

Нехай параметри системи такі, що виконується умова

$$E_{12}^2 < D_{12}^2. \quad (36)$$

Очевидно, при цьому третя з нерівностей (35) задовольняється.

Оскільки стан рівноваги, що досліджується, є стійким при досить малих зовнішніх силах, то втрата стійкості може настати при збільшенні навантаження тільки внаслідок порушення другої із нерівностей (35); це означає, що система поводиться так само, як при відсутності неконсервативності, тобто стає нестійкою після проходження стану байдужої рівноваги.

Покажемо, що останній висновок має місце також при наявності гіроскопічних сил, які задовольняють деяку додаткову умову. Системі (32) рівнозначна така система рівнянь першого порядку:

$$\begin{gathered} \frac{d\Theta_1}{dt} = \Theta_3; \quad \frac{d\Theta_2}{dt} = \Theta_4; \\ \frac{d\Theta_3}{dt} = -\frac{D_{11}}{A_1}\Theta_1 - \frac{D_{12}+E_{12}}{A_1}\Theta_2 - \frac{B_1}{A_1}\Theta_3 - \frac{G_{12}}{A_1}\Theta_4; \\ \frac{d\Theta_4}{dt} = -\frac{D_{12}-E_{12}}{A_2}\Theta_1 - \frac{D_{22}}{A_2}\Theta_2 + \frac{G_{12}}{A_2}\Theta_3 - \frac{B_2}{A_2}\Theta_4. \end{gathered} \quad (37)$$

Достатні умови стійкості можна одержати за допомогою прямого методу Ляпунова. За функцію V приймемо квадратичну форму

$$V = \frac{1}{2}(\alpha_{11}\Theta_1^2 + 2\alpha_{12}\Theta_1\Theta_2 + \alpha_{22}\Theta_2^2 + \alpha_{33}\Theta_3^2 + \alpha_{44}\Theta_4^2), \quad (38)$$

де $\alpha_{11} = D_{11}(D_{12} - E_{12})$; $\alpha_{22} = D_{22}(D_{12} + E_{12})$; $\alpha_{33} = A_1(D_{12} - E_{12})$; (39)

$$\alpha_{44} = A_2(D_{12} + E_{12}); \quad \alpha_{12} = D_{12}^2 - E_{12}^2.$$

Похідна функції V по часу має вигляд

$$V' = -[B_1(D_{12}-E_{12})\Theta_3^2 - 2G_{12}E_{12}\Theta_3\Theta_4 + B_2(D_{12}+E_{12})\Theta_4^2]. \tag{40}$$

Умови додатньої означеності функції V при $D_{12} > 0$ можна записати так:

$$D_{11} > 0;\ D_{11}D_{22} - D_{12}^2 + E_{12}^2 > 0. \tag{41}$$

V' є знакосталою функцією знака протилежного V, якщо

$$B_1B_2(D_{12}^2 - E_{12}^2) - G_{12}^2E_{12}^2 > 0, \tag{42}$$

і може ставати нулем тільки на множині $\Theta_3^2 + \Theta_4^2 = 0$. Тому що перетин останньої з множиною $V = \text{const} > 0$ не містить траєкторій системи, то нульовий розв'язок системи (37) асимптотично стійкий в цілому [1]. Звідси випливає, що стан рівноваги $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ стійкий.

Можна переконатися, що при $D_{12} < 0$ доведення аналогічне; функція V є тоді від'ємно-означеною, а V' — знакосталою додатною. Зауважимо, що умови (41) рівнозначні першим двом із (35). Отже, якщо виконується (36), а гіроскопічні сили задовольняють (42), то довільні дисипативні члени не порушують стійкості (нестійкості) і границею між положеннями стійкої та нестійкої рівноваги є стан байдужої рівноваги.

Відмітимо, що умови (36) і (42) виконуються завжди, якщо один із параметрів η, $\varkappa$ досить малий, тобто сила P слабо неконсервативна.

Розглянемо випадок, коли

$$E_{12}^2 > D_{12}^2. \tag{43}$$

Нехай втрата стійкості настає внаслідок порушення останньої з умов (35) та $b_1 = b_2 = b$. Покажемо, що при цьому нехтування тертям завжди приводить до помилки у визначенні критичної сили.

При $b \to 0$ коефіцієнти рівняння (22) такі:

$$v = -\frac{2a_{22} - a_{11}}{a_{11} + 2a_{12}};\quad u = -\frac{a_{12} + a_{22}}{a_{11} + 2a_{12}}. \tag{44}$$

Характеристичне рівняння (33) має тоді вигляд

$$p_0\lambda^4 + p_2^*\lambda^2 + p_4 = 0, \tag{45}$$

де $p_2^* = A_1D_{22} + A_2D_{11}$, а p_0 і p_4 визначаються згідно з (34).

Стійкість рівноваги можлива при виконанні нерівностей

$$p_4 > 0;\ p_2^* > 0;\ \Delta > 0, \tag{46}$$

де дискримінант рівняння (45)

$$\Delta = (A_1D_{22} - A_2D_{11})^2 + 4A_1A_2(D_{12}^2 - E_{12}^2), \tag{47}$$

бо при цьому корені характеристичного рівняння є чисто уявними.

Перші дві умови (46) співпадають з першими двома (35). Згідно з припущенням нестійкість настає внаслідок порушення останньої з умов (35), яка в даному випадку при $b \to 0$ переходить у таку:

$$(A_1D_{22} - A_2D_{11})^2 + (A_1^2\gamma + 2A_1A_2 + A_2^2\gamma^{-1})(D_{12}^2 - E_{12}^2) > 0, \tag{48}$$

де

$$\gamma = \frac{2\beta_2^2 - 2\beta_2 + 1}{2\beta_1^2 - 2\beta_1 + 1}. \tag{49}$$

Порівняння умов (47) і (48) дає нерівність

$$A_1^2\gamma^2 - 2A_1A_2\gamma + A_2^2 \geqslant 0, \tag{50}$$

яка має місце при довільному γ і стає рівністю тільки для

$$\gamma = A_2 / A_1. \tag{51}$$

Зауважимо, що рівність нулеві виразу (51) означає, що сумнівна область співпадає з областю стійкості. Нам залишилося показати, що це неможливо. Порівнюючи (49) і (51), одержуємо:

$$A_1(2\beta_2^2 - 2\beta_2 + 1) - A_2(2\beta_1^2 - 2\beta_1 + 1) = 0. \tag{52}$$

Підставивши сюди значення A_i (24), після елементарних перетворень бачимо, що ліва частина останнього виразу завжди додатна.

Отже, якщо втрата стійкості має коливний характер, то мале тертя обов'язково треба враховувати; нехтування тертям у цьому випадку приведе до істотної помилки при визначенні критичної сили (завжди в бік перебільшення останньої). При цьому, природно, статичний і енергетичний методи незастосовні до розв'язання задачі стійкості рівноваги даної системи.

ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ РЕАЛЬНИХ СИСТЕМ ПРИ МАЛІЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОСТІ

Рівняння збуреного руху деякої голономної системи навколо положення рівноваги $q_1 = \ldots = q_k = 0$ можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \Gamma_i = \varepsilon_i f_i(q_1, \ldots, q_k) \tag{53}$$

$$(i = 1, \ldots, k),$$

де T — кінетична енергія; Π — потенціальна енергія; F — функція розсіювання, причому дисипація повна; Γ_i — гіроскопічні сили; ε_i — довільно малі сталі величини; f_i — деякі неперервні функції узагальнених координат, які в околі нуля допускають зображення

$$f_i(q_1, \ldots, q_k) = \sum_{j=1}^{k} d_{ij} q_{ij} + f_i'(q_1, \ldots, q_k) \tag{54}$$

$$(i = 1, \ldots, k).$$

Тут d_{ij} — сталі, а f_i' — сукупність членів порядку малості, вищого від першого. Припускається [7], що останні задовольняють умови

$$|f_i'(q_1, \ldots, q_k)| < \zeta\{|q_1| + \ldots + |q_k|\}$$

$$(i = 1, \ldots, k), \tag{55}$$

де ζ — досить мала стала, і є такими, що рівняння (53) для кожної сукупності достатньо малих початкових значень узагальнених координат і швидкостей допускають єдиний розв'язок. Праві частини в (53) є узагальненими силами, які внаслідок малості ε_i називаються слабо неконсервативними.

За допомогою прямого методу Ляпунова можна довести такі узагальнення відомих теорем Томсона і Тета.

Т е о р е м а 1. *Якщо рівновага стійка при самих консервативних силах, то вона стає асимптотично стійкою при добавленні довільних дисипативних сил з повною дисипацією, гіроскопічних і слабо неконсервативних сил.*

Теорема 2. *Рівновага, нестійка під дією потенціальних сил, залишається нестійкою при добавленні будь-яких дисипативних сил з повною дисипацією, гіроскопічних і слабо неконсервативних сил.*

Доведення вказаних узагальнень грунтується на тому факті, що похідна функції W, запропонованої М. Г. Четаєвим [7] для випадку відсутності слабо неконсервативних сил ($\varepsilon_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$), завдяки додатній означеності функції F залишається від'ємно-означеною внаслідок малості ε_i також при наявності слабо неконсервативних сил. Наведені теореми можна перенести на системи з безмежним (зліченним) числом степенів вільності.

Оскільки положення пружної системи визначається зліченним числом координат, дані твердження вірні для систем з розподіленими параметрами. Теореми 1 і 2 дозволяють зробити висновок: статичний і енергетичний методи визначення критичного навантаження в реальних пружних системах, де відсутні зовнішні неконсервативні сили, є законними.

СТІЙКІСТЬ АРКИ ПРИ ГІДРОСТАТИЧНОМУ ТИСКУ

В задачах на дослідження стійкості деякої форми рівноваги криволінійних стержнів часто зустрічається неконсервативне навантаження у формі гідростатичного тиску. Тому тут виникає питання про можливість застосування статичних методів.

Для вивчення вказаного питання розглянемо рівняння малих коливань стержня навколо досліджуваної форми рівноваги. Вводячи сили інерції в рівняння рівноваги, виведене А. Р. Ржаніциним [6], одержимо:

$$\{\rho[EI(\rho u')'']''\}' + \left\{\rho\left[EI\left(\frac{u}{\rho}\right)'\right]''\right\}' + \frac{1}{\rho}[EI(\rho u')'']' +$$
$$+ \frac{1}{\rho}\left[EI\left(\frac{u}{\rho}\right)'\right]' + \left\{\rho^2 q\left[(\rho u')'' + \left(\frac{u}{\rho}\right)'\right]\right\}' - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(m\rho^2\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)' = 0, \tag{56}$$

де ϱ — радіус кривини плоского стержня; EI — жорсткість на згин; u — зміщення по дотичній у напрямі зростання дуги; q — радіальне навантаження; m — маса на одиницю довжини дуги s. Штрих означає диференціювання по дузі, t — час. Рівняння (56) — це рівняння малих коливань плоского стержня малої кривини в його площині навколо положення рівноваги, що визначається функцією $\varrho = \varrho(s)$, означеною на інтервалі $(0, l)$.

Припускаючи, що $\varrho = R = \text{const}$, $q = \text{const}$, із (56) одержуємо рівняння малих коливань кругової арки довільного поперечного перерізу під гідростатичним тиском навколо кругової форми рівноваги:

$$R^4(EIu''')''' + R^2(EIu')''' + R^2(EIu''')' + (EIu')' +$$
$$+ R^5 q u^{IV} + R^3 q u'' - mR^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R^4\left(m\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)' = 0. \tag{57}$$

Часткові розв'язки останнього рівняння шукаємо у вигляді

$$u(s, t) = z(s)T(t). \tag{58}$$

Це дає такі два рівняння:

$$R^4(EIz''')''' + R^2(EIz')''' + R^2(EIz''')' + (EIz')' +$$
$$+ R^5 q z^{IV} + R^3 q z'' = a[mR^2 z - R^4(mz')']; \tag{59}$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - aT = 0, \tag{60}$$

де a — стала розділення.

Із граничних умов задачі (57) одержимо граничні умови для рівняння (59), які можна записати так:

$$U_j z = 0 \quad (j = 1, \ldots, 6), \tag{61}$$

де оператори U_j залежать від способу закріплення кінців арки.

Покажемо, що задача (59)—(61) є самоспряженою [7]. Для цього, як відомо, досить встановити, що оператори, які входять в (59), — самоспряжені, а рівності (61) задовольняють відповідні умови. Неважко переконатися, що ліву частину (59) можна записати так:

$$Az \equiv [R^3q + EI + R^2(EI)'')z']' + [R^2(R^3q + 2EI)z'']'' + (R^4EIz''')'''. \tag{62}$$

Отже, оператор A — самоспряжений. Самоспряженість оператора

$$Bz \equiv mR^2z - R^4(mz')', \tag{63}$$

що знаходиться в правій частині (59), очевидна.

Переходимо до перевірки граничних умов. Вони повинні бути такими, щоб при будь-яких шість раз диференційованих функціях f і g із рівностей

$$U_jf = U_jg = 0 \ (j = 1, \ldots, 6) \tag{64}$$

випливали рівності

$$[A(f,\ g)]_0^l = 0,\ [B(f,\ g)]_0^l = 0, \tag{65}$$

де

$$\left.\begin{aligned} A(f, g) &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j+k=i-1} (-1)^j \left[(a_i f^{(i)})^{(k)} g^{(j)} - (a_i g^{(i)})^{(k)} f^{(j)}\right] \\ B(f, g) &= R^4 m(f'g - g'f); \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

а a_i $(i = 1, 2, 3)$ — коефіцієнти оператора A в (62).

Для арки з шарнірно закріпленими кінцями граничні умови (61) такі:

$$z(0) = z'(0) = z'''(0) = 0,\ z(l) = z'(l) = z'''(l) = 0, \tag{67}$$

а для безшарнірної

$$z(0) = z'(0) = z''(0) = 0,\ \ z(l) = z'(l) = z''(l) = 0. \tag{68}$$

Підставляючи f і g в (67) або в (68) і складаючи форми (66), переконуємося, що в обох випадках умови (65) виконуються. Отже, задача (59)—(61) — самоспряжена.

Покажемо тепер, що ця ж задача є нормальною. Для цього розглянемо вираз

$$I = \int_0^l fBf dx, \tag{69}$$

де f — довільна допустима функція. Інтегруванням по частинах останній вираз легко перетворити до вигляду

$$I = R^2 \int_0^l m(x)[f^2 + R^2 f'^2] dx. \tag{70}$$

Із (70) бачимо, що $I > 0$, коли $f(x) \not\equiv 0$, а цього, як відомо, досить для нормальності даної задачі.

Отже, гранична задача (59) — (61) є самоспряженою нормальною. Звідси випливає, що власні числа задачі a дійсні і утворюють не більше, як злічeнну множину, яка не має граничних точок на кінцевій віддалі. Останнє має місце при довільному значенні гідростатичного навантаження q. Очевидно, що при досить малому навантаженні кругова форма рівноваги стійка і величини a в (60) від'ємні для всіх часткових розв'язків (58). Нестійкість настає, коли хоча б одно власне значення стане додатним. Оскільки a дійсні, то границею області стійкості (нестійкості) є значення частоти $a = 0$, тобто стан байдужої рівноваги. Тому задачу стійкості рівноваги кругової арки під гідростатичним тиском можна розв'язувати статичним методом.

Зауважимо, що випадок $\varrho = \text{const}$, $q = \text{const}$ є єдиним, в якому гранична задача, яка відповідає рівнянню (57), самоспряжена. Отже, застосування статичних методів до задач стійкості рівноваги некругових арок при неконсервативному навантаженні, що, наприклад, має місце в роботі [3], вимагає обгрунтування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. XXXVI, № 3, 1952.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1953.
3. Динник А. Н. Устойчивость арок. Гостехиздат, 1946.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
5. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 2. ГИТТЛ, 1955.
6. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. ГИТТЛ, 1955.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1955.
8. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing. Arch., XX Band, № 1, 1952.
9. Katke E. Über die definifen selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Math. Zeitschrift, 46 B., 1940.